9. Vytvořující funkce a jejich aplikace při analýze homogenních markovských řetězců

9.1. Motivace

9.2. Definice: Definice vytvořující funkce posloupnosti reálných čísel.

9.3. Příklad: Najděte vytvořující funkce k posloupnostem:
a) $a_n = 1$, n = 0, 1, ...
b) $a_n = n$, n = 0, 1, ...
c) $a_n = x^n$, n = 0, 1, ...
d) $a_n = nx^n$, n = 0, 1, ...

Řešení:

ad a) $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$

ad b) $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}, |z| < 1$

ad c) $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (xz)^n = \frac{1}{1-xz}, |z| < |x|$

ad d)
$$G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(xz)^n = |\text{substituce } t = xz| = t\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = t\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} t^n =$$
$$= t\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{xz}{(1-xz)^2}, |z| < \frac{1}{|x|}$$

Výsledky uspořádáme do přehledné tabulky:

a_n	$G_a(z)$
1	$1/(1-z)$
n	$z/(1-z)^2$
x^n	$1/(1-xz)$
nx^n	$xz/(1-xz)^2$

9.4. Věta: Výpočet členů posloupnosti pomocí vytvořující funkce

9.5. Příklad: Je dána vytvořující funkce $G_a(z) = e^z$. Najděte odpovídající posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešení: $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{1}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3!}, \ldots$, tedy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

9.6. Definice: Definice konvoluce a konvoluční mocniny.

9.7. Věta: Výpočet vytvořující funkce konvoluce a konvoluční mocniny.

9.8. Definice: Definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů resp. matic.

9.9. Věta: Výpočet vytvořující funkce posloupnosti matic přechodu HMŘ po n krocích.

9.10. Věta: Výpočet vytvořující funkce posloupnosti vektorů absolutních pravděpodobností HMŘ po n krocích.

9.11. Poznámka: Poznámka o úspoře numerických výpočtů při použití vytvořujících funkcí.

9.12. Příklad: Nechť homogenní markovský řetězec $\{X_n ; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1,2\}$ popisuje chování výrobní linky, která se v n-tém období nachází buď v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Dlouhodobým sledováním byla zjištěna matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$. Pomocí vytvořujících funkcí najděte matici přechodu po n krocích $\mathbf{P}^n$ a vektor absolutních pravděpodobností po n krocích $\mathbf{p}(n)$.

Řešení: Z věty 9.9. plyne, že $G_{\mathbf{P}}(z) = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{z}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{4} & \frac{3z}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{z}{2} & -\frac{z}{2} \\ -\frac{z}{4} & 1-\frac{3z}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I}\text{-}z\mathbf{P}) = \left(1-\frac{z}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{3z}{2}\right) - \frac{z^2}{9} = \mathrm{K} = (1-z)\cdot\left(1-\frac{z}{4}\right)$$

$$(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)\left(1-\frac{z}{4}\right)}\begin{pmatrix} 1-\frac{3z}{4} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & 1-\frac{z}{2} \end{pmatrix} = \Lambda = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\frac{z}{4}}\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(Upozornění: Prvky matice $(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$ byly získány rozkladem na parciální zlomky. Např. prvek $a_{11} = \dfrac{1-\frac{3z}{4}}{(1-z)\left(1-\frac{z}{4}\right)} = \dfrac{A}{1-z} + \dfrac{B}{1-\frac{z}{4}} = \mathrm{K} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-z} + \dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{z}{4}}$. Podobně získáme další prvky.)

$\dfrac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = 1$, n = 0, 1, 2, ...

$\dfrac{1}{1-\frac{z}{4}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, n = 0, 1, 2, ...

Matici $\mathbf{P}^n$ lze tedy psát ve tvaru: $\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Interpretace: První matice je konstantní a nezávisí na počtu kroků. Lze snadno ověřit, že je to limitní matice přechodu **A**. Druhá matice násobená koeficientem $\left(\frac{1}{4}\right)^n$, představuje přechodnou složku daného homogenního markovského řetězce.

Pro vektor absolutních pravděpodobností platí:

$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0).\mathbf{P}^n = \mathbf{p}(0)\left[\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\right]$. Druhý sčítanec v závorce pro $n \to \infty$ konverguje k 0, tedy lze psát

$\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{cases} (1,0)\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ (0,1)\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$. Pomocí vytvořujících funkcí jsme tedy dostali vektor limitních pravděpodobností $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.