# Příklady na páté cvičení v počítačové učebně, SMI, PS 2007

**Příklad 1.:** Řidič taxi dlouhodobým pozorováním zjistil, že když se v daném okamžiku nachází ve městě A, pak s pravděpodobností 0,3 poveze příštího zákazníka do města B a s pravděpodobností 0,7 bude zákazník žádat jízdu uvnitř A. Jestliže se řidič taxi nachází ve městě B, pak se stejnou pravděpodobností buď poveze příštího zákazníka do A nebo bude jezdit uvnitř B. Průměrná tržba za jízdu (v obou směrech) mezi A a B činí 1000 Kč a uvnitř měst A a B 100 Kč. Vypočítejte střední hodnotu tržby za první dvě jízdy, vyjede-li řidič z města A resp. B.

**Řešení:**

Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v okamžiku n je řidič ve městě A (resp. B). Matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 100 & 1000 \\ 1000 & 100 \end{pmatrix}$.

$q_0 = 0,7.100 + 0,3.1000 = 370$, $q_1 = 0,5.1000 + 0,5.100 = 550$

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}$

$\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 794 \\ 1010 \end{pmatrix}$

Vyjede-li řidič z města A, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 794 Kč. Vyjede-li řidič z města B, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 1010 Kč.

**Návod na řešení v MATLABu:**

Zadáme matice **P**, **R** a vektor **v**0:

P=[0.7 0.3;0.5 0.5]; R=[100 1000;1000 100];v0=[0 0]‘;

Vypočteme pomocnou matici Q=P*R’;

Diagonála matice Q je vektor q=diag(Q);

Vypočteme vektor v1=q+P*v0

Vypočteme vektor v2=q+P*v1

**Příklad 2.:** Předpokládejme, že chovatel má slepici, která buď snáší vejce (stav 0) nebo sedí na vejcích (stav 1). Uvažujeme období o délce 1 měsíc. Matice přechodu a matice výnosů jsou:

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Pomocí vytvořujících funkcí najděte vektor středních hodnot celkových výnosů po n měsících.
b) Jaký je vektor středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, …, 24? Graficky znázorněte závislost středních hodnot celkových výnosů na n.

**Řešení:**

Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v měsíci n slepice snáší vejce (resp. sedí na vejcích). Matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

$q_0 = 0,6.8 + 0,4.2 = 5,6$, $q_1 = 0,3.3 + 0,7.(-6) = -3,3$

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 5,6 \\ -3,3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z}(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q} = \ldots = \frac{z}{(1-z)^2}\begin{pmatrix} \frac{36}{70} \\ \frac{36}{70} \end{pmatrix} + \frac{\frac{10}{7}}{1-z} + \frac{-\frac{10}{7}}{1-\frac{3z}{10}}\begin{pmatrix} \frac{356}{70} \\ -\frac{267}{70} \end{pmatrix}$$

$\frac{z}{(1-z)^2}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = n$, n = 0, 1, 2, ...

$\frac{10}{7}\cdot\frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \frac{10}{7}\cdot 1^n = \frac{10}{7}$, n = 0, 1, 2, ...

$-\frac{10}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{3z}{10}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -\frac{10}{7}\cdot 0{,}3^n$, n = 0, 1, 2, ...

Celkem:

$$\mathbf{v}(n) = n\begin{pmatrix} \frac{36}{70} \\ \frac{36}{70} \end{pmatrix} + \frac{10}{7}\left(1 - 0{,}3^n\right)\begin{pmatrix} \frac{356}{70} \\ -\frac{267}{70} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 5,6 \\ -3,3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 7,64 \\ -3,93 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 8,612 \\ -3,759 \end{pmatrix}$, …, $\mathbf{v}(24) = \begin{pmatrix} 19,6082 \\ 6,8939 \end{pmatrix}$.

**Návod na řešení v MATLABu:**
Zadáme vektor n: n=[0:1:24];
Napíšeme vyjádření pro první složku vektoru **v**(n):
v0n=n.*(36/70)+(10/7)*(1-0.3.^n)*(356/70)
Napíšeme vyjádření pro druhou složku vektoru **v**(n):
v1n=n.*(36/70)+(10/7)*(1-0.3.^n)*(-267/70)
Graficky znázorníme závislost středních hodnot celkových výnosů na n:
plot(n,v0n,’o’,n,v1n,’*’)

**Příklad 3.:** Výrobce limonád pravidelně sleduje prodejnost nového výrobku na domácím trhu. Výrobek hodnotí v každém sledovaném období jako úspěšný (stav 0) nebo jako neúspěšný (stav 1), přičemž lze předpokládat, že úspěšnost či neúspěšnost prodeje v daném období je ovlivněna jen tím, jak se výrobek prodával v předchozím období. Dlouhodobým sledováním prodeje byly zjištěny tyto poznatky: pokud byl výrobek v jednom období úspěšný, pak v následujícím období bude úspěšný s pravděpodobností 0,8. Jestliže byl výrobek v jednom období neúspěšný, tak v následujícím období zůstane neúspěšný s pravděpodobností 0,7. Zůstává-li výrobek úspěšný, je výnos 10 jednotek. Změní-li se z úspěšného na neúspěšný, klesne výnos na 5 jednotek. Při změně z neúspěšného na úspěšný je výnos 10 jednotek a zůstává-li výrobek neúspěšný, dojde ke ztrátě 20 jednotek.
a) Modelujte proces pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a matici výnosů.
b) Pomocí rekurentního vzorce **v**(n) = **q** + **P** **v**(n-1) vypočtěte pro oba stavy střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n období, n = 1, 2, ..., 6.

c) Pomocí aproximačního vzorce $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{Aq} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$ najděte přibližné vyjádření pro vektor středních hodnot celkových výnosů $\mathbf{v}(n)$. Pro n = 1, 2, ..., 6 porovnejte výsledky s přesným vyjádřením získaným v bodě (b).

**Řešení:**

ad a) Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v n-tém období je výrobek úspěšný (resp. neúspěšný). Matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

ad b) Výpočet pomocí rekurentního vzorce:

$q_0 = 0,8.10 + 0,2.5 = 9$, $q_1 = 0,3.10 + 0,7.(-20) = -11$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 14 \\ -16 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(4) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -18,5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(5) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20,5 \\ -18,25 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(6) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21,75 \\ -17,625 \end{pmatrix}$$

ad c) Výpočet pomocí aproximačního vzorce:

Nejprve najdeme stacionární vektor **a** matice **P** (viz Příklady na druhé cvičení v počítačové učebně) a sestavíme limitní matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$. Po dosazení do aproximačního vzorce získáme výsledky:

$$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 18 \\ -22 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -21 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21 \\ -19 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(6) = \begin{pmatrix} 22 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že aproximační vzorec je pro malá n nevhodný.