

Příklady na šesté cvičení v počítačové učebně, SMI. PS 2007

Příklad 1.: Je sledována výrobní linka, která se může nacházet buď v provozu (stav 0) nebo v opravě (stav 1). Ve stavu 0 je možný provoz „bez kontroly agregátů“ (strategie 1) nebo „s kontrolou agregátů“ (strategie 2). Ve stavu 1 je možno rozlišit opravu „bez výměny agregátů“ (strategie 1) nebo „s výměnou agregátů“ (strategie 2). Matice přechodu a matice výnosů jsou následující:

$${}^1P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, {}^1R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, {}^2P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, {}^2R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pro první tři kroky najděte maximální střední hodnotu celkového výnosu a optimální strategii.

Řešení:

$${}^1q_0 = {}^1p_{00} {}^1r_{00} + {}^1p_{01} {}^1r_{01} = 0,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 0 = 1, {}^1q_1 = {}^1p_{10} {}^1r_{10} + {}^1p_{11} {}^1r_{11} = 0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot (-5) = -0,2$$

$${}^2q_0 = {}^2p_{00} {}^2r_{00} + {}^2p_{01} {}^2r_{01} = 0,4 \cdot 3 + 0,6 \cdot 1 = 1,8, {}^2q_1 = {}^2p_{10} {}^2r_{10} + {}^2p_{11} {}^2r_{11} = 0,4 \cdot 2 + 0,6 \cdot (-2) = -0,4$$

$${}^1\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,2 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1,8 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

$$v_0(1) = \max\{1, 1,8\} = 1,8 \Rightarrow d_0^*(1) = 2, v_1(1) = \max\{-0,2; -0,4\} = -0,2 \Rightarrow d_1^*(1) = 1$$

$$v_0(2) = \max\{{}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0(1) + {}^1p_{01}v_1(1); {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0(1) + {}^2p_{01}v_1(1)\} = \\ = \max\{1 + 0,5 \cdot 1,8 + 0,5 \cdot (-0,2); 1,8 + 0,4 \cdot 1,8 + 0,6 \cdot (-0,2)\} = \max\{1,8; 2,4\} = 2,4 \Rightarrow d_0^*(2) = 2$$

$$v_1(2) = \max\{{}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0(1) + {}^1p_{11}v_1(1); {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0(1) + {}^2p_{11}v_1(1)\} = \\ = \max\{-0,2 + 0,2 \cdot 1,8 + 0,8 \cdot (-0,2); -0,4 + 0,4 \cdot 1,8 + 0,6 \cdot (-0,2)\} = \max\{0; 0,2\} = 0,2 \Rightarrow d_1^*(2) = 2$$

$$v_0(3) = \max\{{}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0(2) + {}^1p_{01}v_1(2); {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0(2) + {}^2p_{01}v_1(2)\} = \\ = \max\{1 + 0,5 \cdot 2,4 + 0,5 \cdot 0,2; 1,8 + 0,4 \cdot 2,4 + 0,6 \cdot 0,2\} = \max\{2,3; 2,88\} = 2,88 \Rightarrow d_0^*(3) = 2$$

$$v_1(3) = \max\{{}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0(2) + {}^1p_{11}v_1(2); {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0(2) + {}^2p_{11}v_1(2)\} = \\ = \max\{-0,2 + 0,2 \cdot 2,4 + 0,8 \cdot 0,2; -0,4 + 0,4 \cdot 2,4 + 0,6 \cdot 0,2\} = \max\{0,44; 0,68\} = 0,68 \Rightarrow d_1^*(3) = 2$$

Závěr: V prvním kroku je vektor optimálních strategií $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ve druhém a třetím kroku $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matice ${}^1P, {}^1R, {}^2P, {}^2R$:

$P1=[0.5 0.5;0.2 0.8]; R1=[2 0;1 -5]; P2=[0.4 0.6;0.4 0.6]; R2=[3 1;2 -2];$

Vypočteme pomocné matice $Q1=P1*R1'; Q2=P2*R2'$;

Diagonála matice Q1 je vektor $q1=diag(Q1)$

Diagonála matice Q2 je vektor $q2=diag(Q2)$

Vypočteme vektor $v1=\max(q1,q2)$

(Protože první složka vektoru v1 odpovídá první složce vektoru q2, znamená to, že když je linka v provozu, je optimální strategie v 1. kroku strategie 2.

Protože druhá složka vektoru v1 odpovídá druhé složce vektoru q1, znamená to, že když je linka v opravě, je optimální strategie v 1. kroku strategie 1.)

Spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 2. kroku pro strategii 1, je-li linka v provozu:

$$v2_provoz_s1 = q1(1) + P1(1,1)*v1(1) + P1(1,2)*v1(2)$$

a totéž pro strategii 2:

$$v2_provoz_s2 = q2(1) + P2(1,1)*v1(1) + P2(1,2)*v1(2)$$

Dále spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 2. kroku pro strategii 1, je-li linka v opravě:

$$v2_oprava_s1 = q1(2) + P1(2,1) \cdot v1(1) + P1(2,2) \cdot v1(2)$$

a totéž pro strategii 2:

$$v2_oprava_s2 = q2(2) + P2(2,1) \cdot v1(1) + P2(2,2) \cdot v1(2)$$

Vypočítáme vektor v2:

$$v2 = [\max(v2_provoz_s1, v2_provoz_s2); \max(v2_oprava_s1, v2_oprava_s2)]$$

(Vidíme, že první složka vektoru v2 odpovídá strategii 2 a druhá složka rovněž.)

Spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 3. kroku pro strategii 1, je-li linka v provozu:

$$v3_provoz_s1 = q1(1) + P1(1,1) \cdot v2(1) + P1(1,2) \cdot v2(2)$$

a totéž pro strategii 2:

$$v3_provoz_s2 = q2(1) + P2(1,1) \cdot v2(1) + P2(1,2) \cdot v2(2)$$

Dále spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 3. kroku pro strategii 1, je-li linka v opravě:

$$v3_oprava_s1 = q1(2) + P1(2,1) \cdot v2(1) + P1(2,2) \cdot v2(2)$$

a totéž pro strategii 2:

$$v3_oprava_s2 = q2(2) + P2(2,1) \cdot v2(1) + P2(2,2) \cdot v2(2)$$

Vypočítáme vektor v3:

$$v3 = [\max(v3_provoz_s1, v3_provoz_s2); \max(v3_oprava_s1, v3_oprava_s2)]$$

(Vidíme, že první složka vektoru v3 odpovídá strategii 2 a druhá složka rovněž.)

Upozornění: Uvedené řešení je pouze jedním z možných, zajisté lze vytvořit lepší.

Příklad 2.: Závod produkuje nějaký spotřební výrobek, u něhož lze rozeznat dva stavy: stav 0 – výrobek je úspěšný s dobrým odbytem a cenou, stav 1 – výrobek je neúspěšný, odbyl vážně a cena je nízká. Při 1. strategii vedení závodu neinvestuje ani do technického rozvoje ani do

reklamy. Při této strategii je matice přechodu ${}^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ a matice výnosů

${}^1\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$. Při 2. strategii vedení závodu zajistí technický rozvoj a investuje do reklamy.

Matice přechodu: ${}^2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$, matice výnosů: ${}^2\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{pmatrix}$. (Při 2. strategii se vyšší

náklady promítnou do zisku, proto výnos ${}^2r_{00}$ musí být nižší než ${}^1r_{00}$, stejně tak ${}^2r_{11}$ musí být nižší než ${}^1r_{11}$.) Pomocí iterační metody je třeba zjistit, jakou strategii doporučit vedení závodu, aby střední hodnota celkového výnosu byla maximální.

Řešení: Nejprve vypočítáme vektory ${}^1\mathbf{q} = ({}^1q_0, {}^1q_1)$ a ${}^2\mathbf{q} = ({}^2q_0, {}^2q_1)$.

$${}^1q_0 = {}^1p_{00} \cdot {}^1r_{00} + {}^1p_{01} \cdot {}^1r_{01} = 0,5 \cdot 9 + 0,5 \cdot 3 = 6, {}^1q_1 = {}^1p_{10} \cdot {}^1r_{10} + {}^1p_{11} \cdot {}^1r_{11} = 0,4 \cdot 3 + 0,6 \cdot (-7) = -3$$

$${}^1\mathbf{q} = (6, -3)$$

$${}^2q_0 = {}^2p_{00} \cdot {}^2r_{00} + {}^2p_{01} \cdot {}^2r_{01} = 0,8 \cdot 4 + 0,2 \cdot 4 = 4, {}^2q_1 = {}^2p_{10} \cdot {}^2r_{10} + {}^2p_{11} \cdot {}^2r_{11} = 0,7 \cdot 1 + 0,3 \cdot (-19) = -5$$

$${}^2\mathbf{q} = (4, -5)$$

1. iterace: zvolíme $d_0(1) = 1, d_1(1) = 1$ a vyřešíme systém rovnic (přitom položíme $v_1 = 0$)

$$g + v_0 = {}^1q_0 + {}^1p_{00} v_0 + {}^1p_{01} v_1 : g + v_0 = 6 + 0,5 \cdot v_0$$

$$g + v_1 = {}^1q_1 + {}^1p_{10} v_0 + {}^1p_{11} v_1 : g = -3 + 0,4 \cdot v_0$$

Řešením tohoto systému obdržíme $v_0 = 10, g = 1$.

2. iterace:

$$i = 0, k = 1: {}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0 + {}^1p_{01}v_1 = 6 + 0,5 \cdot 10 = 11$$

$$k = 2: {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0 + {}^2p_{01}v_1 = 4 + 0,8 \cdot 10 = 12$$

$\max\{11, 12\} = 12$, tedy $d_0(2) = 2$

$$i = 1, k = 1: {}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0 + {}^1p_{11}v_1 = -3 + 0,4 \cdot 10 = 1$$

$$k = 2: {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0 + {}^2p_{11}v_1 = -5 + 0,7 \cdot 10 = 2$$

$\max\{1, 2\} = 2$, tedy $d_1(2) = 2$

Výsledek 2. iterace dává vektor strategií (2, 2).

S tímto vektorem vyřešíme systém rovnic (přitom položíme $v_1 = 0$)

$$g + v_0 = {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0 + {}^2p_{01}v_1 : g + v_0 = 4 + 0,8 \cdot v_0$$

$$g + v_1 = {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0 + {}^2p_{11}v_1 : g = -5 + 0,7 \cdot v_0$$

Řešením tohoto systému obdržíme $v_0 = 10$, $g = 2$.

3. iterace:

$$i = 0, k = 1: {}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0 + {}^1p_{01}v_1 = 6 + 0,5 \cdot 10 = 11$$

$$k = 2: {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0 + {}^2p_{01}v_1 = 4 + 0,8 \cdot 10 = 12$$

$\max\{11, 12\} = 12$, tedy $d_0(3) = 2$

$$i = 1, k = 1: {}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0 + {}^1p_{11}v_1 = -3 + 0,4 \cdot 10 = 1$$

$$k = 2: {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0 + {}^2p_{11}v_1 = -5 + 0,7 \cdot 10 = 2$$

$\max\{1, 2\} = 2$, tedy $d_1(3) = 2$

Výsledek 3. iterace dává vektor strategií (2, 2).

Protože ve dvou po sobě jdoucích iteracích jsme dostali stejný vektor strategií, výpočet končí.
Interpretace: Kromě počátečního kroku přinese větší zisk ta strategie, která zahrnuje náklady na technický rozvoj a reklamu výrobku.

Návod na řešení v MATLABu:

Použít funkci howard.m (vytvořil Pavel Mizera) – uložena v ISu v Učebních materiálech.