SIGNÁLY A SOUSTAVY V MATEMATICKÉ BIOLOGII

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

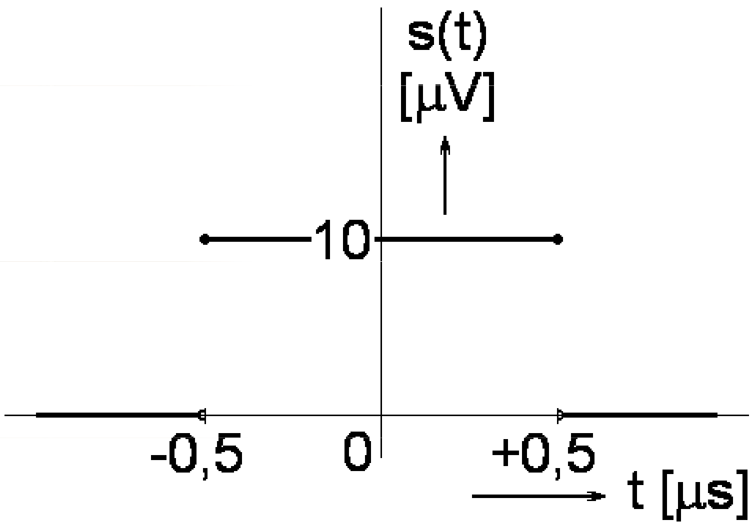
holcik@iba.muni.cz

III. SPOJITÉ SIGNÁLY
POPIS V ČASOVÉ A FREKVENČNÍ DOMÉNĚ

SIGNÁLY

matematické modely - příklady

☑ jednorázový deterministický signál



$s(t) = 10.10^{-6}$ V pro $t \in \langle -0,5\ \mu s; 0,5\ \mu s \rangle$

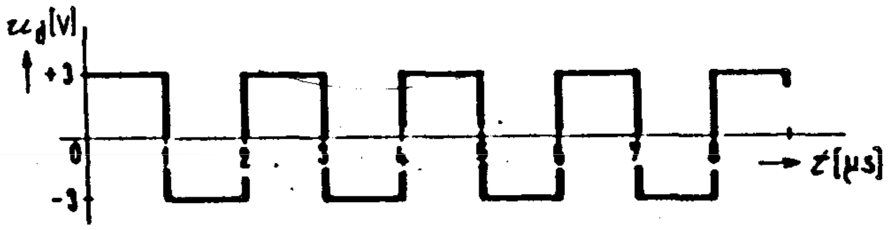
$s(t) = 0$ V pro $t \in (0,5\ \mu s; \infty \rangle$

$s(t) = 0$ V pro $t \in \langle -\infty; -0,5\ \mu s\ )$

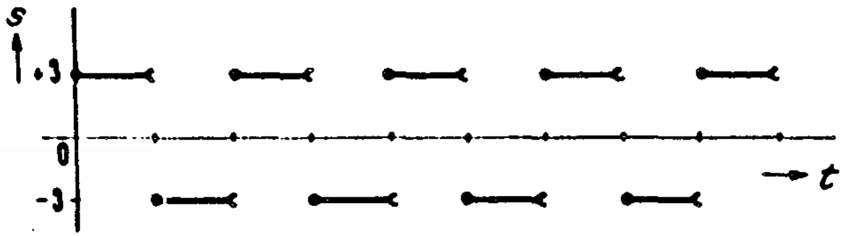
SIGNÁLY

matematické modely - příklady

☑ periodický deterministický signál



Deterministický fyzikální model datového signálu.



Graf matematického modelu signálu

$s(t) = 3 \quad \text{pro } t \in \langle 0\text{ s}; 10^{-6}\text{ s}\rangle$

$s(t) = -3 \text{ pro } t \in \langle 10^{-6}\text{ s}; 2.10^{-6}\text{ s}\rangle$

$\forall n \in \Re\text{:} \; s(t+n.2.10^{-6}) = s(t)$

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

- **změna časového měřítka**

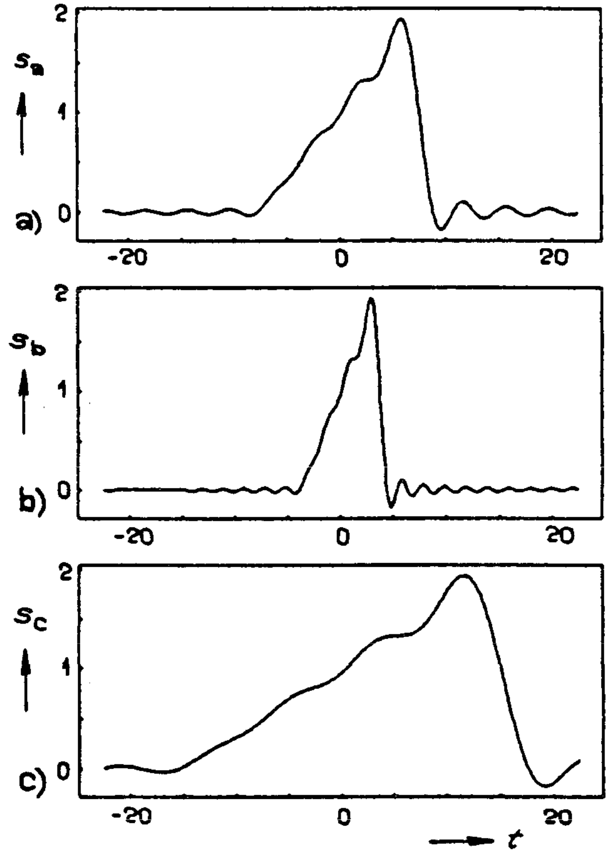
$$s(t) \sim s(kt),$$

kde k je kladné reálné číslo

k > 1 – časová komprese;

k < 1 – časová expanze

k = 1 – nic se neděje



Změna časového měřítka: a) původní signál; b) stlačený signál, $m = 2$; c) roztažený signál, $m = 0{,}5$.

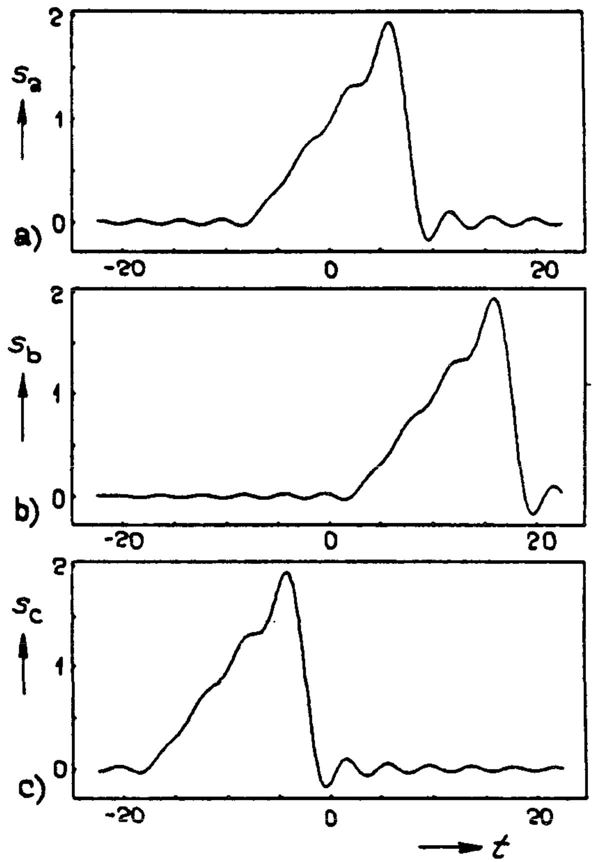
ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

- ☑ **posunutí v čase**

$$s(t) \sim s(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – zpoždění

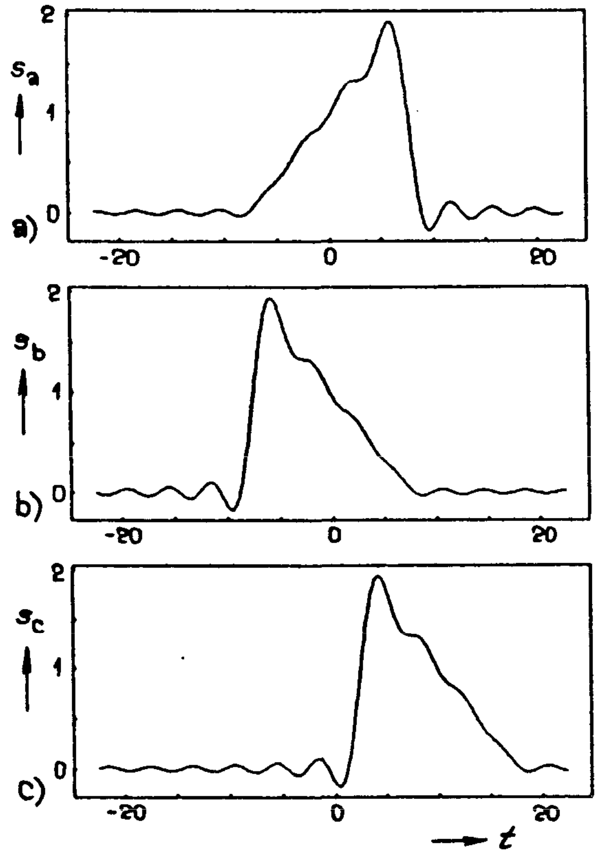


Posunutí v čase: a) původní signál $s(t)$, b) signál $s(t - 10)$, c) signál $s(t + 10)$.

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

- ☑ **obrácení (inverze) časové osy**

$$s(t) \sim s(-t) \,,$$



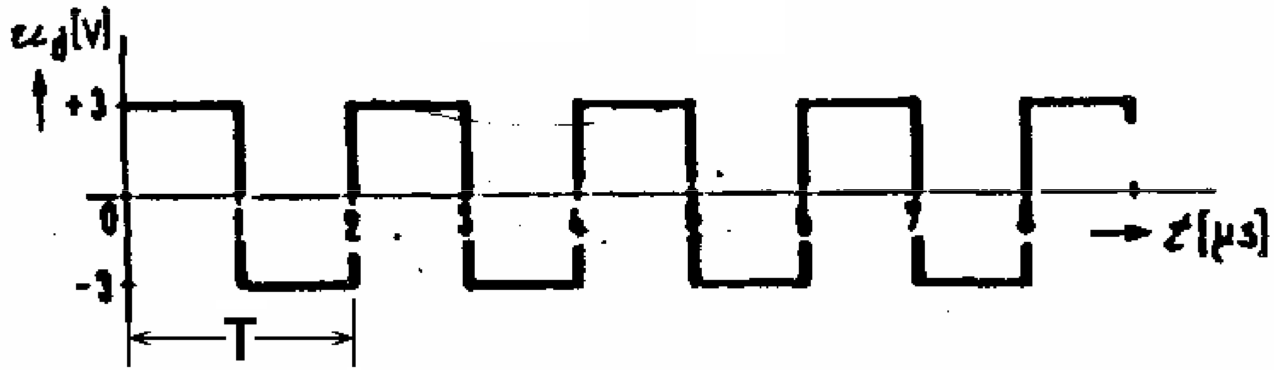
Reversace s translací: a) signál $s(t)$, b) signál obrácený, $s(-t)$, c) signál obrácený i posunutý, $s(10 - t)$.

PERIODICKÉ SIGNÁLY

- ☑ pro průběh periodického signálu platí vztah

$$s(t+nT) = s(t), \text{ pro } t \in \langle 0, T)$$

kde n je celé číslo a T nazýváme **periodou** (T je nejmenší kladné číslo, pro které výše uvedený vztah platí)



HARMONICKÝ SIGNÁL

- **harmonický signál** je definován funkcí

$$s(t) = C_1.\cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

kde

$C_1>0$ je amplituda harmonického signálu

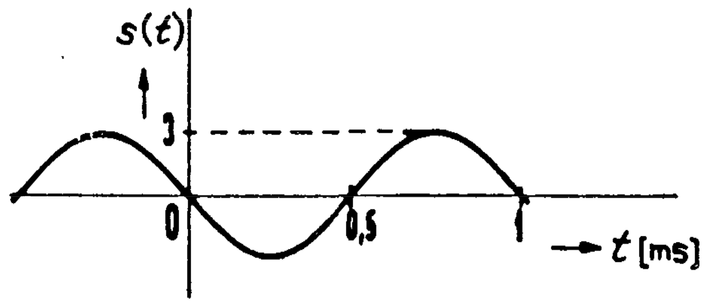
$\omega_1 >0$ je úhlový kmitočet h.s.

φ_1 je počáteční fáze, tj. fáze v čase t=0

$\omega_1 t + \varphi_1$ je fáze harmonického signálu

Perioda harmonického signálu je dána vztahem

$$T_1 = 2\pi/\omega_1$$



HARMONICKÝ SIGNÁL

- další definice

$$s(t) = \mathcal{Re}\{\hat{S}(t)\} = \mathcal{Re}\{C_1.\exp[j(\omega_1 t + \varphi_1)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

HARMONICKÝ SIGNÁL

kupodivu lze použít i vztah

$$s(t) = \mathcal{Re}\{C_1.\exp[j(-\omega_1 t - \varphi_1)]\} = \mathcal{Re}\{\hat{S}^*(t)\}$$

pozor !!! pozor

- záporný kmitočet - ale funguje to

HARMONICKÝ SIGNÁL

Protože platí

$$s(t) = Re\{\hat{S}(t)\} = Re\{\hat{S}^*(t)\} \text{ a } Im\{\hat{S}(t)\} = -Im\{\hat{S}^*(t)\}$$

je i

$$s(t) = ½.\{\hat{S}(t) + \hat{S}^*(t)\}$$

$$s(t) = ½.\{C_1 \exp(j\varphi_1).\exp(j\omega_1 t)\} +$$
$$+ ½.\{C_1 \exp(-j\varphi_1).\exp(-j\omega_1 t)\}$$

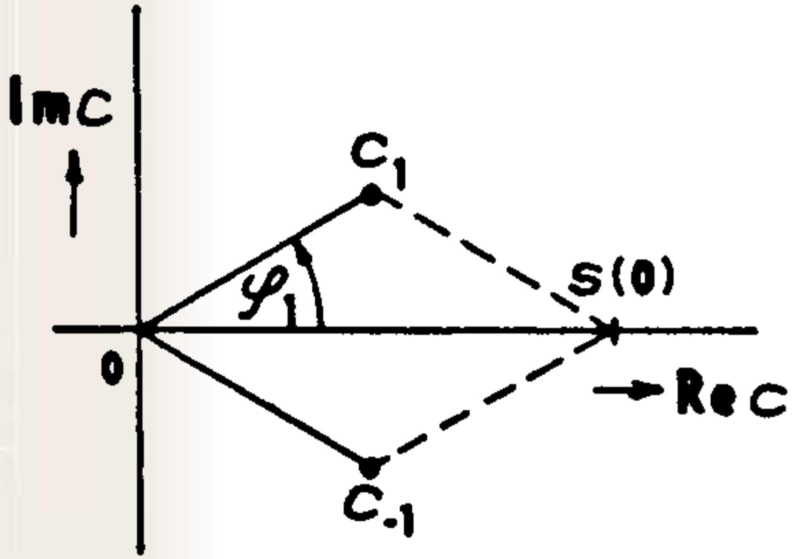
Označíme-li

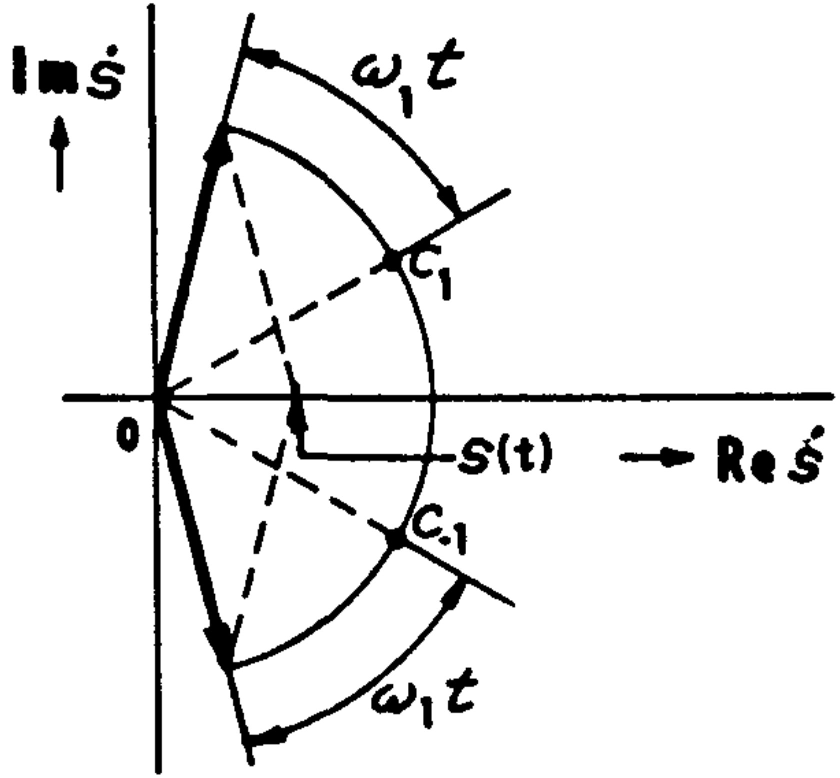
$$c_1 = ½.C_1 \exp(j\varphi_1) \quad \text{a} \quad c_{-1} = ½.C_1 \exp(-j\varphi_1)$$

je

$$s(t) = c_1.\exp(j\omega_1 t) + c_{-1}.\exp[j(-\omega_1)t]$$

HARMONICKÝ SIGNÁL

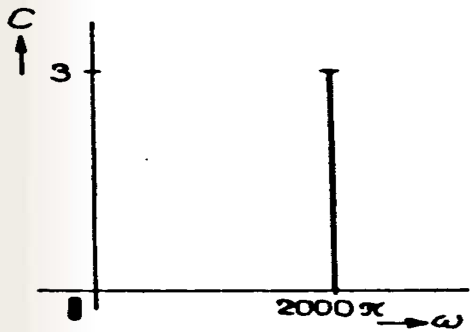




HARMONICKÝ SIGNÁL

- tříparametrický harmonický signál lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách amplituda x úhlový kmitočet a počáteční fáze x úhlový kmitočet:

$$C_1 = C_1(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_1 = \varphi_1(\omega);$$



spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

FREKVENČNÍ SPEKTRUM

Frekvenční spektrum signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

- ☑ Fourierova analýza – snaha vyjádřit (rozložit, rozvinout) signál jako součet jednoduchých funkcí (harmonických signálů, složek).
- ☑ počty těchto harmonických složek, jejich amplitudy, frekvence a fázové posuny charakterizují analyzovaný signál.

- ☑ Fourierova řada
- ☑ Fourierův integrál, Fourierova transformace

- ☑ Fourierovy řady mohou být vyjádřeny buď v trigonometrickém nebo komplexním tvaru.

- ☑ zpracovávat můžeme spojité nebo diskrétní signály.

TAYLORŮV ROZVOJ

Nechť funkce f(x) má v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 derivace až do řádu n+1 včetně

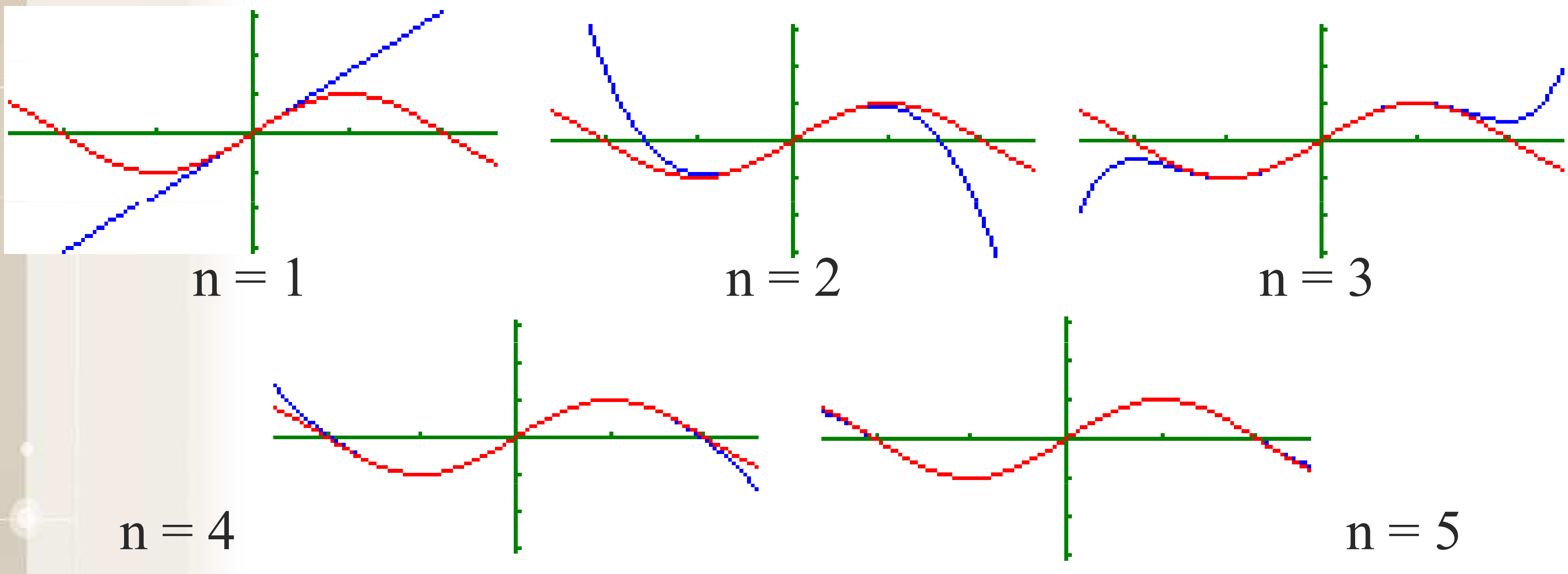
Taylorova řada

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Maclaurinova řada, tj. Taylorova řada pro $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

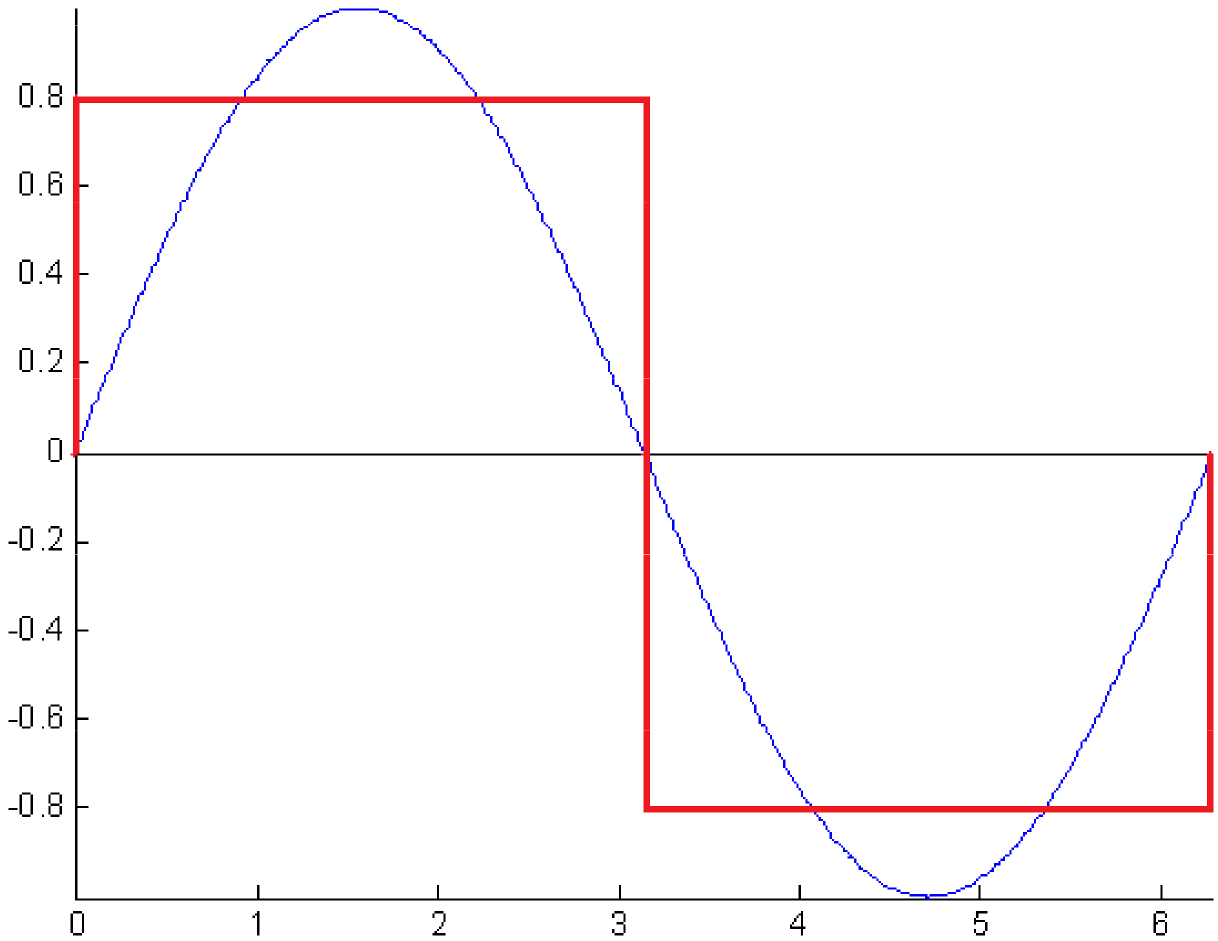
TAYLORŮV ROZVOJ FUNKCE y = sin(x) PRO x = 0

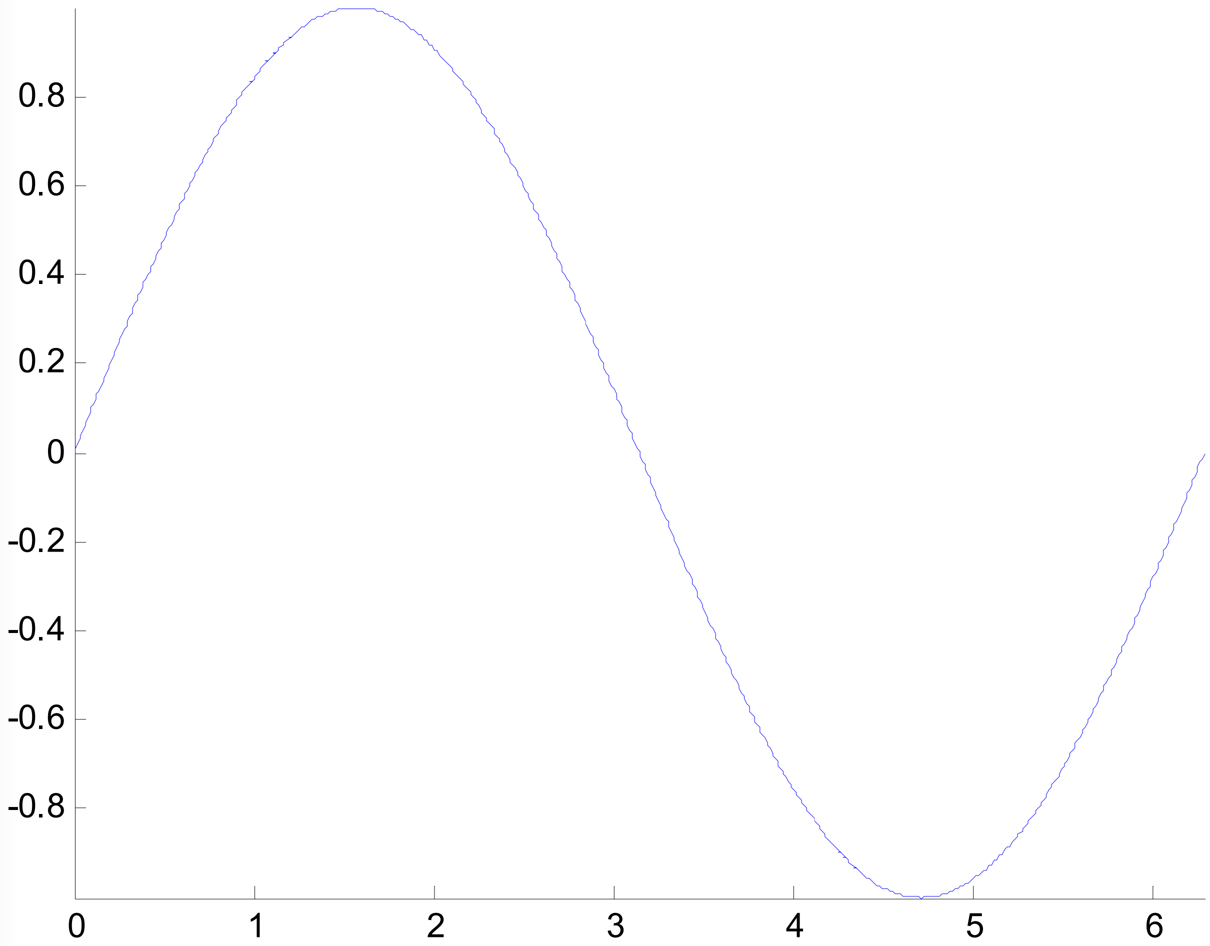


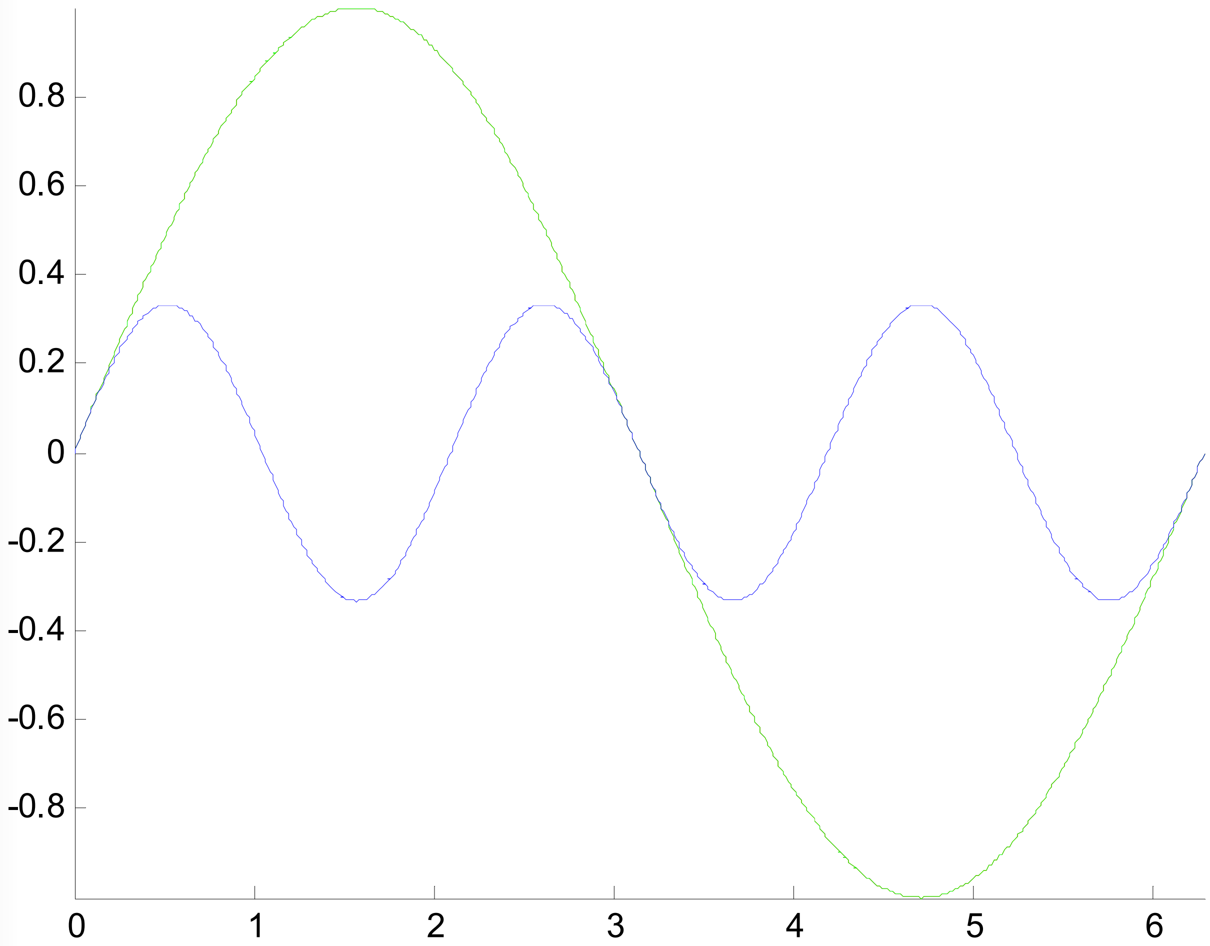
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} . \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

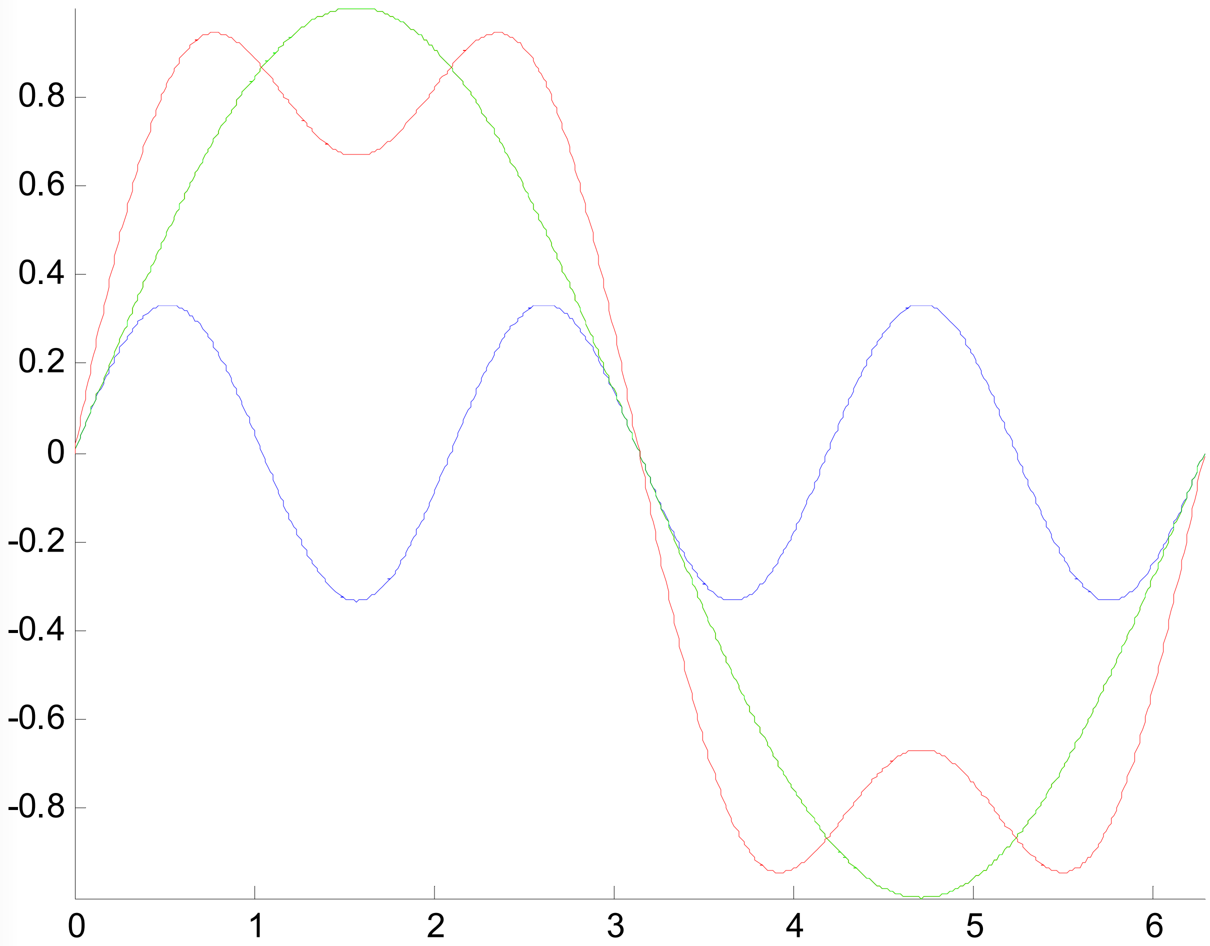
ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY FOURIEROVY ŘADY

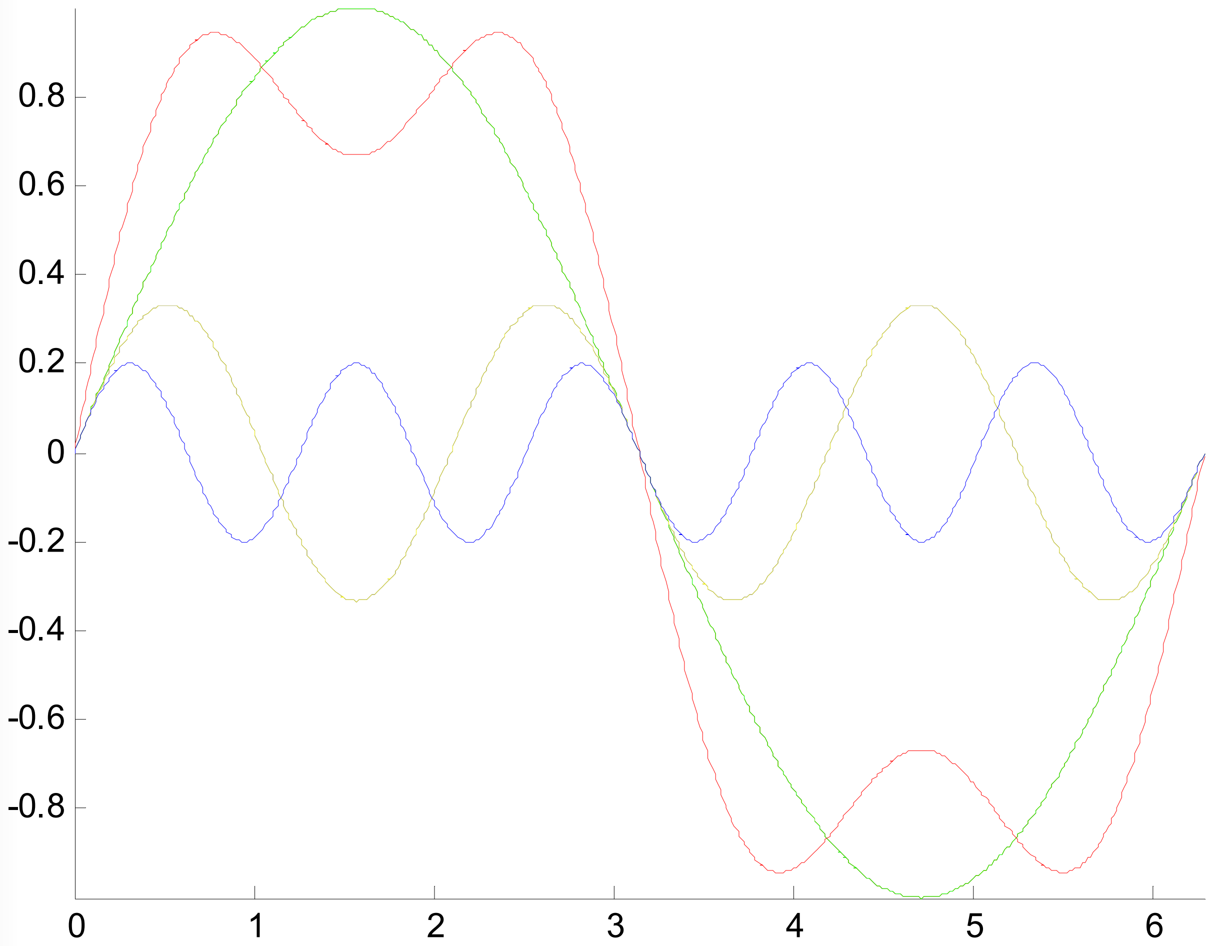
- ☑ poznali jsme, že funkci je možné vyjádřit jako mocninou řadu
- jinou možností je vyjádřit funkci jako trigonometrickou řadu (tj. jako součet harmonických signálů (funkcí)).
- pomocí trigonometrických řad lze vyjádřit obsáhlejší třídu funkcí než mocninnými řadami.


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

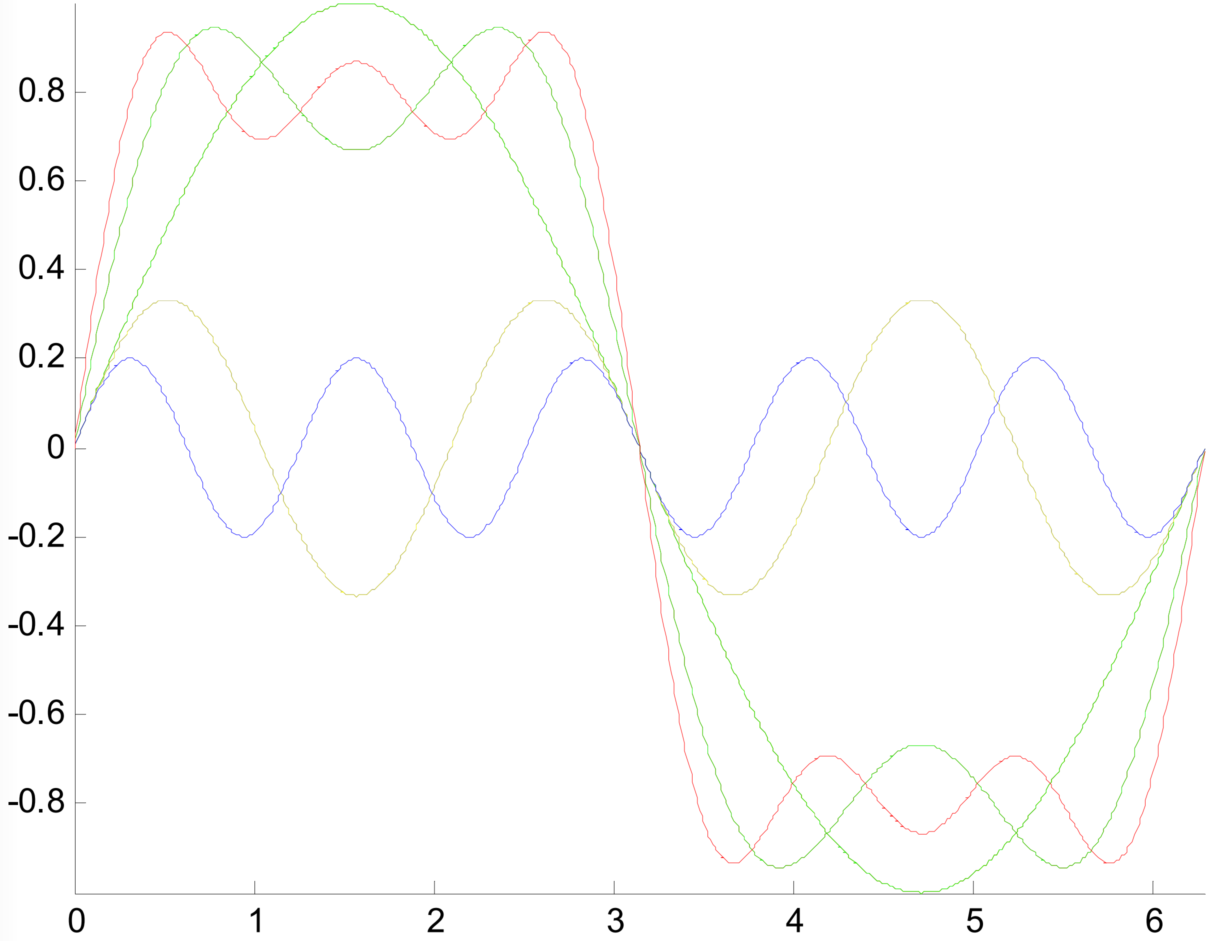

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

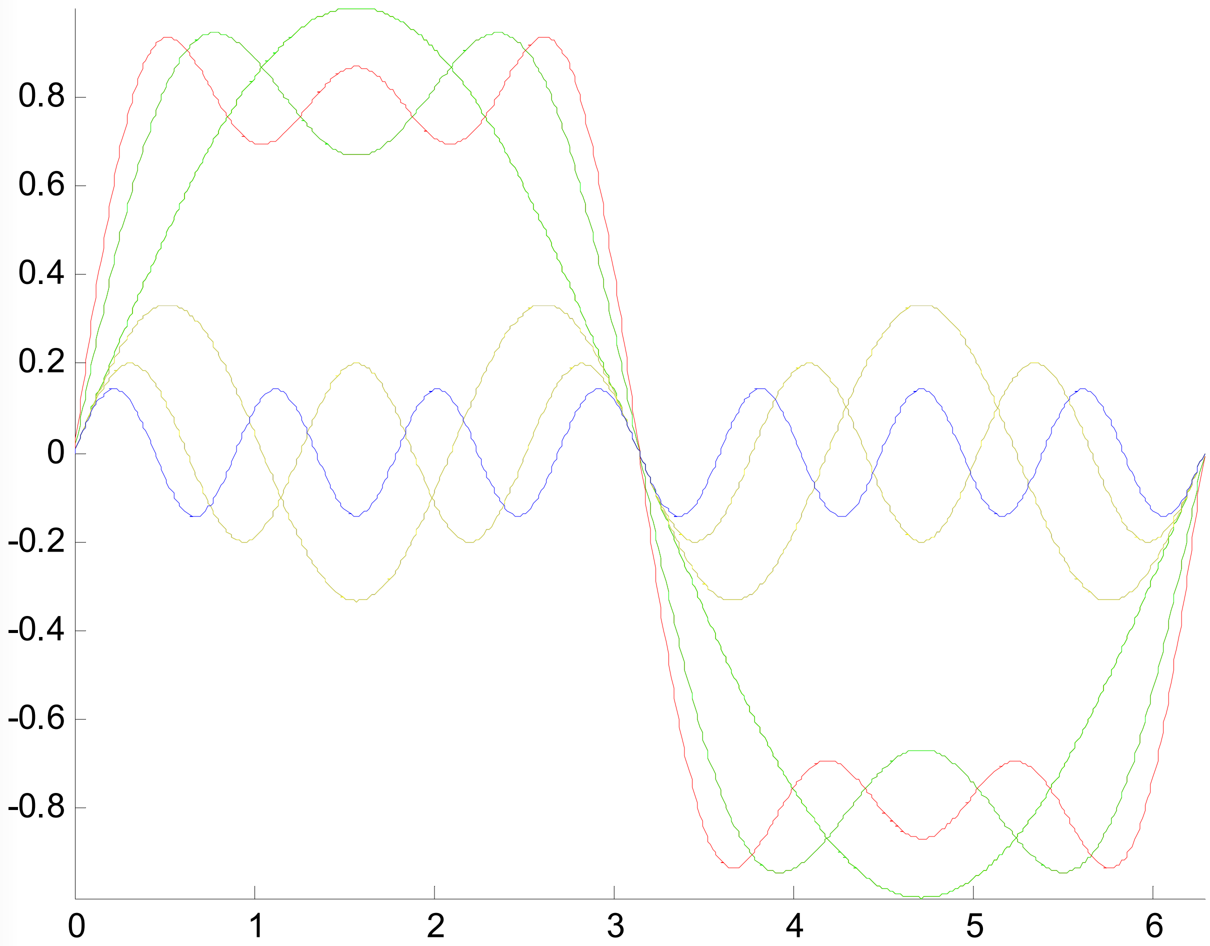

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

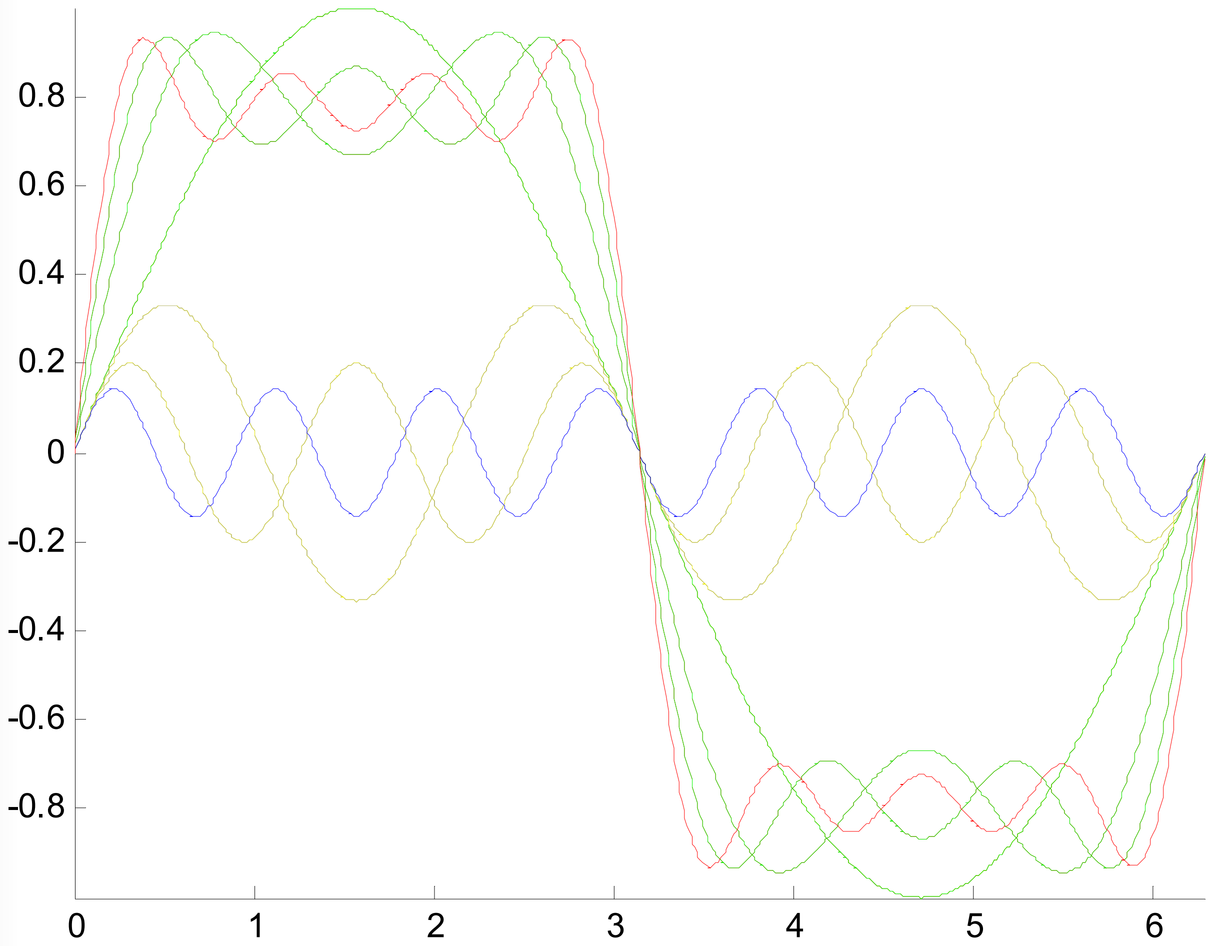

0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

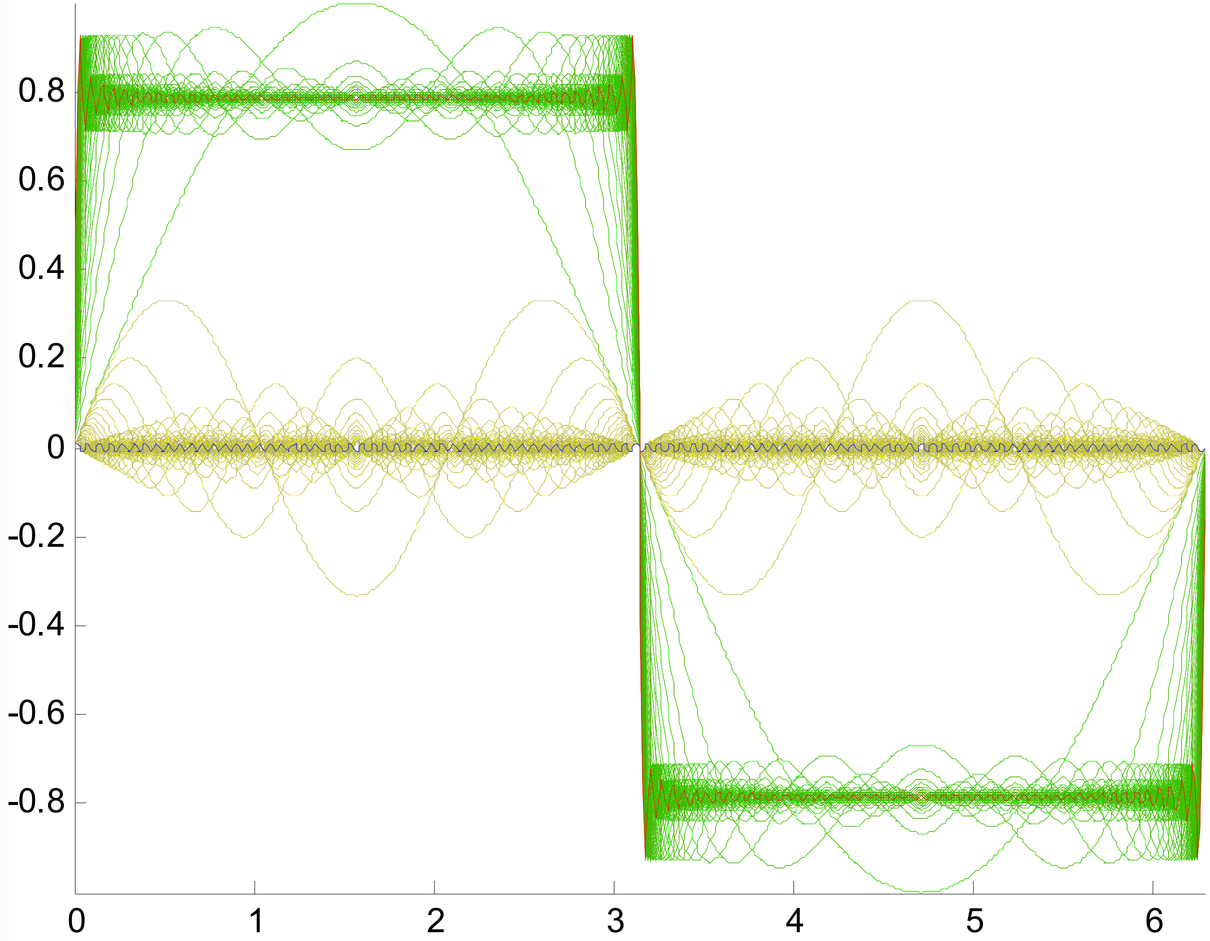


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
1
2
3
4
5
6

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY FOURIEROVY ŘADY

Trigonometrická řada

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- uvedený vztah můžeme psát pouze tehdy, jestliže řada na pravé straně konverguje.
- konverguje-li řada, potom je její součet periodickou funkcí proměnné *x* s periodou 2π.

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY
FOURIEROVY ŘADY

- ☑ každou periodickou funkci f(x) = f(x+kX), která splňuje tzv. Dirichletovy podmínky lze vyjádřit uvedenou trigonometrickou řadou, kde se koeficienty (amplitudy) a_n, b_n vypočítají ze vztahů

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dirichletovy podmínky

- Funkce musí být absolutně integrovatelná přes jednu periodu tj.

$$\int_{t}^{t+T} |f(t)| \, dt < \infty \, ;$$

- Funkce musí mít na intervalu $(t; t+T)$ konečný počet nespojitostí a konečný počet maxim i minim.

- Dirichletovy podmínky jsou postačující, nikoliv nutné.
- Všechny fyzikálně realizovatelné funkce splňují D.p.

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY
FOURIEROVY ŘADY

- uvedená trigonometrická řada s koeficienty určenými z výše uvedených vztahů se nazývá (trigonometrická) Fourierova řada (příslušná k funkci f).

- Fourierova řada se zjednoduší, je-li funkce f lichá nebo sudá.

- Pro lichou funkci platí

$$a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY
FOURIEROVY ŘADY

- Pro sudou funkci platí

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \ldots$$

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY
FOURIEROVY ŘADY

Příklad 1: Rozviňme funkci $f(x) = x$ ve Fourierovu řadu.

Funkce $f(x)$ je lichá, a proto $a_n = 0$. Koeficienty b_n spočítáme ze vztahu

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

Integrací per partes dostaneme

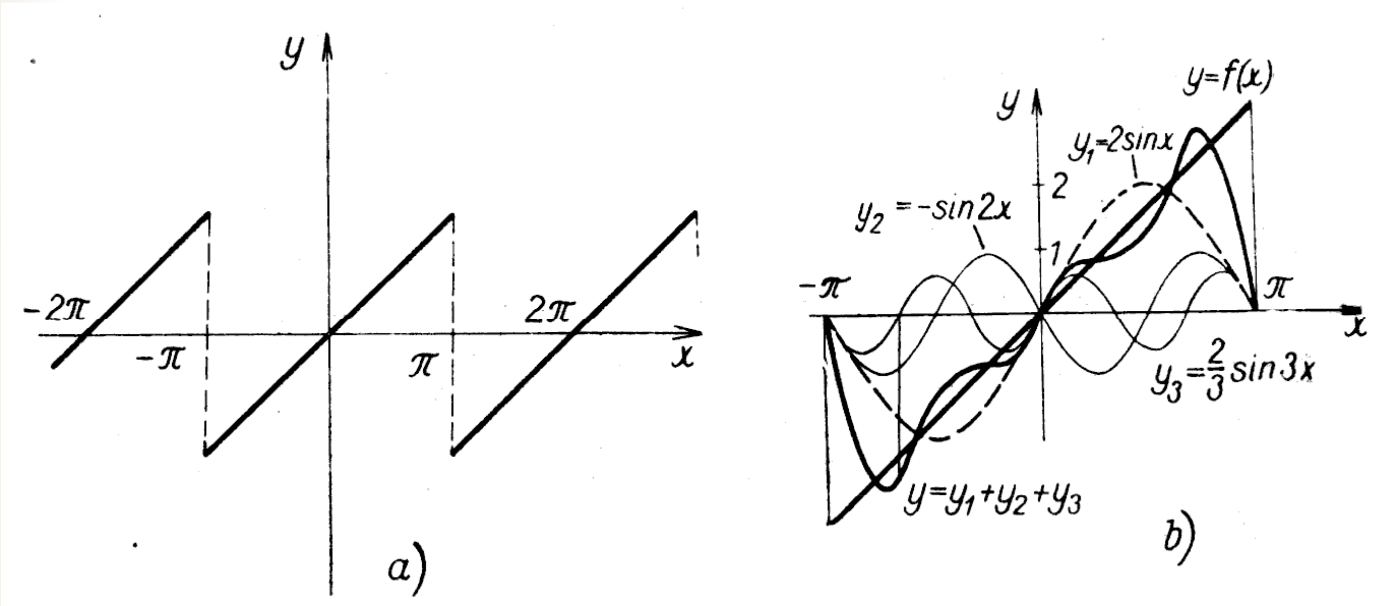
$$\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx \, dx = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}$$

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY FOURIEROVY ŘADY

Koeficient b_n je tedy $b_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}$

Výsledná Fourierova řada má tvar

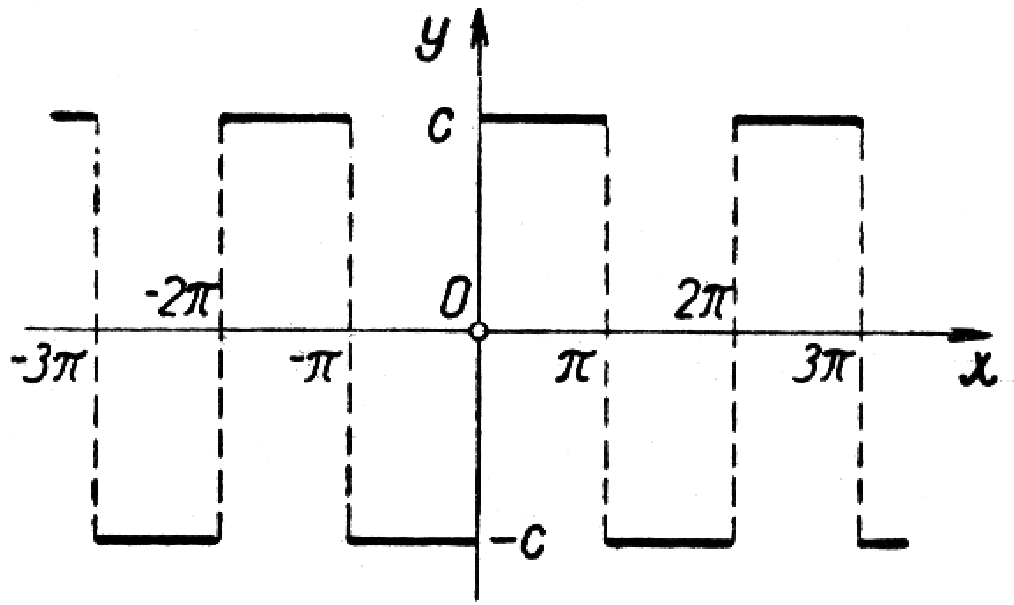
$$f(x) = x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots\right)$$



ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY
FOURIEROVY ŘADY

Příklad 2: Rozviňme ve Fourierovu řadu funkci

$$f(x)=\begin{cases}-c & \text{pro} \quad -\pi < x < 0\\ c & \text{pro} \quad 0 < x < \pi\end{cases}$$



ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY
FOURIEROVY ŘADY

- Funkce $f(x)$ je lichá, a proto $a_n = 0$. Koeficienty b_n spočítáme takto

$$b_n = -\frac{c}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin nx \, dx - \int_{0}^{\pi} \sin nx \, dx\right) = -\frac{2c}{n\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}$$

- Pro n sudé je $b_n = 0$, pro n liché je

$$b_n = \frac{4c}{n\pi}$$

- Výsledná Fourierova řada má tvar

$$f(x) = \frac{4c}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right)$$

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY FOURIEROVY ŘADY

- ☑ Zevšeobecnění pro funkce s periodou *T*.

Fourierova řada (příslušná k funkci *f*) má tvar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{2\pi}{T}t + b_n \sin n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\frac{2\pi}{T}t\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\frac{2\pi}{T}t\,dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

FOURIEROVA ŘADA V KOMPLEXNÍM TVARU

- ☑ každou periodickou funkci f(t+kT)=f(t), (která vyhovuje Dirichletovým podmínkám), můžeme rozložit ve Fourierovu řadu

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \qquad \Omega = 2\pi / T$$

kde c_n jsou komplexní Fourierovy koeficienty

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-jn\Omega t} dt$$

Ω – úhlový kmitočet základní harmonické složky (základní harmonická);

FOURIEROVA ŘADA V KOMPLEXNÍM TVARU

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-jn\Omega t}dt$$

pro n = 0 je

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).dt \quad ,$$

což je střední hodnota funkce f(t).

Pro reálné funkce f(t) je $c_{-n} = c^*_n$.

HARMONICKÁ FOURIEROVA ŘADA

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos(n\Omega t - \psi_n)\right)$$

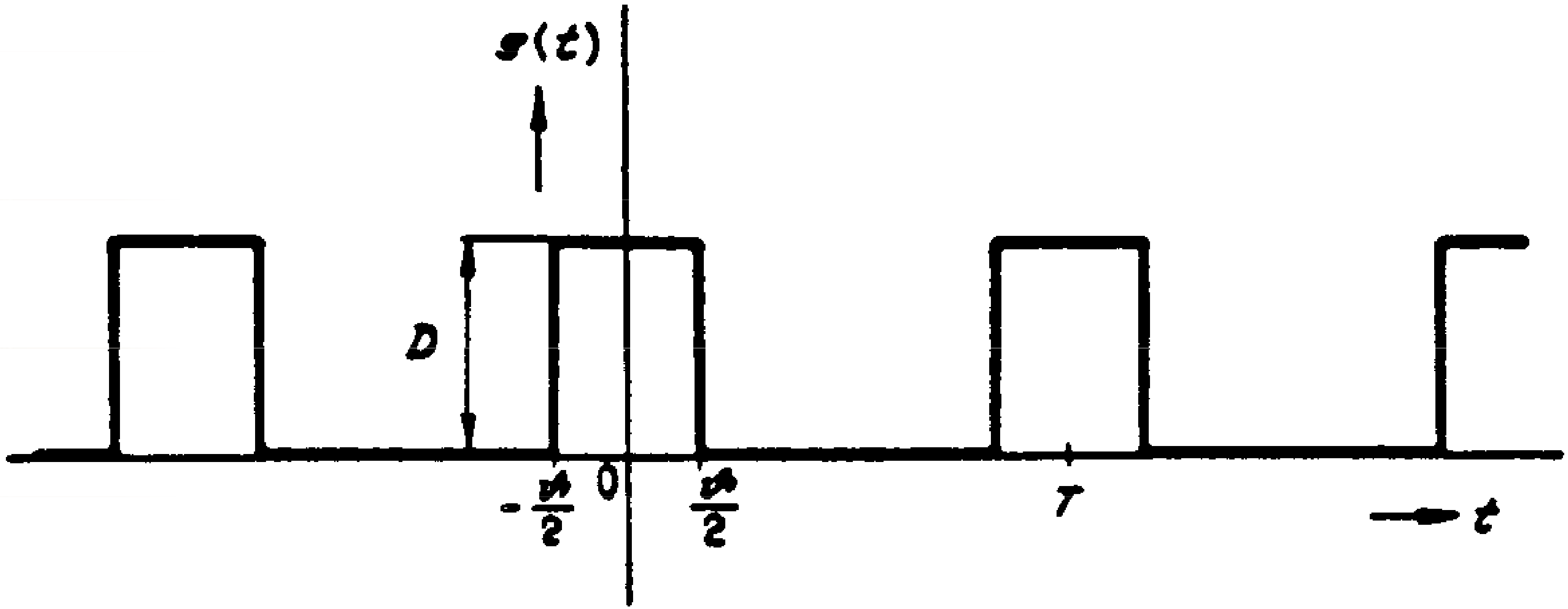
kde výraz

$$C_n \cos(n\Omega t - \psi_n)$$

nazýváme n-tou harmonickou složkou signálu s(t)

PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU



PŘÍKLADY
SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU

Pomocný výpočet:

$$I(n\omega) = \int_{-a}^{a} e^{\pm jn\omega t} dt$$

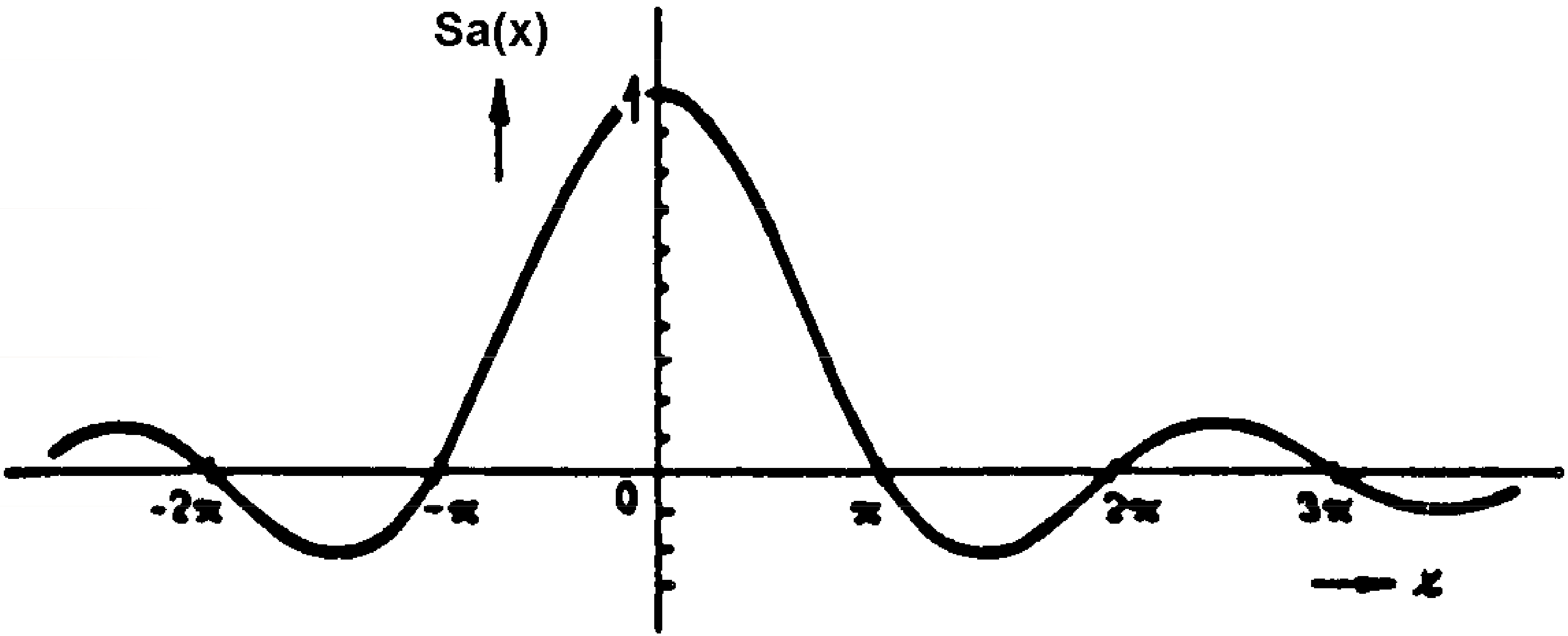
Pro n = 0 je $\qquad I(0) = 2a$

Pro n ≠ 0

$$I(n\omega) = \left[\frac{e^{\pm jn\omega t}}{\pm jn\omega}\right]_{-a}^{a} = \frac{e^{jn\omega a} - e^{-jn\omega a}}{jn\omega} = \frac{2}{n\omega}.\frac{e^{jn\omega a} - e^{-jn\omega a}}{2j} = 2a.\frac{\sin n\omega a}{n\omega.a}$$

PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU



PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU

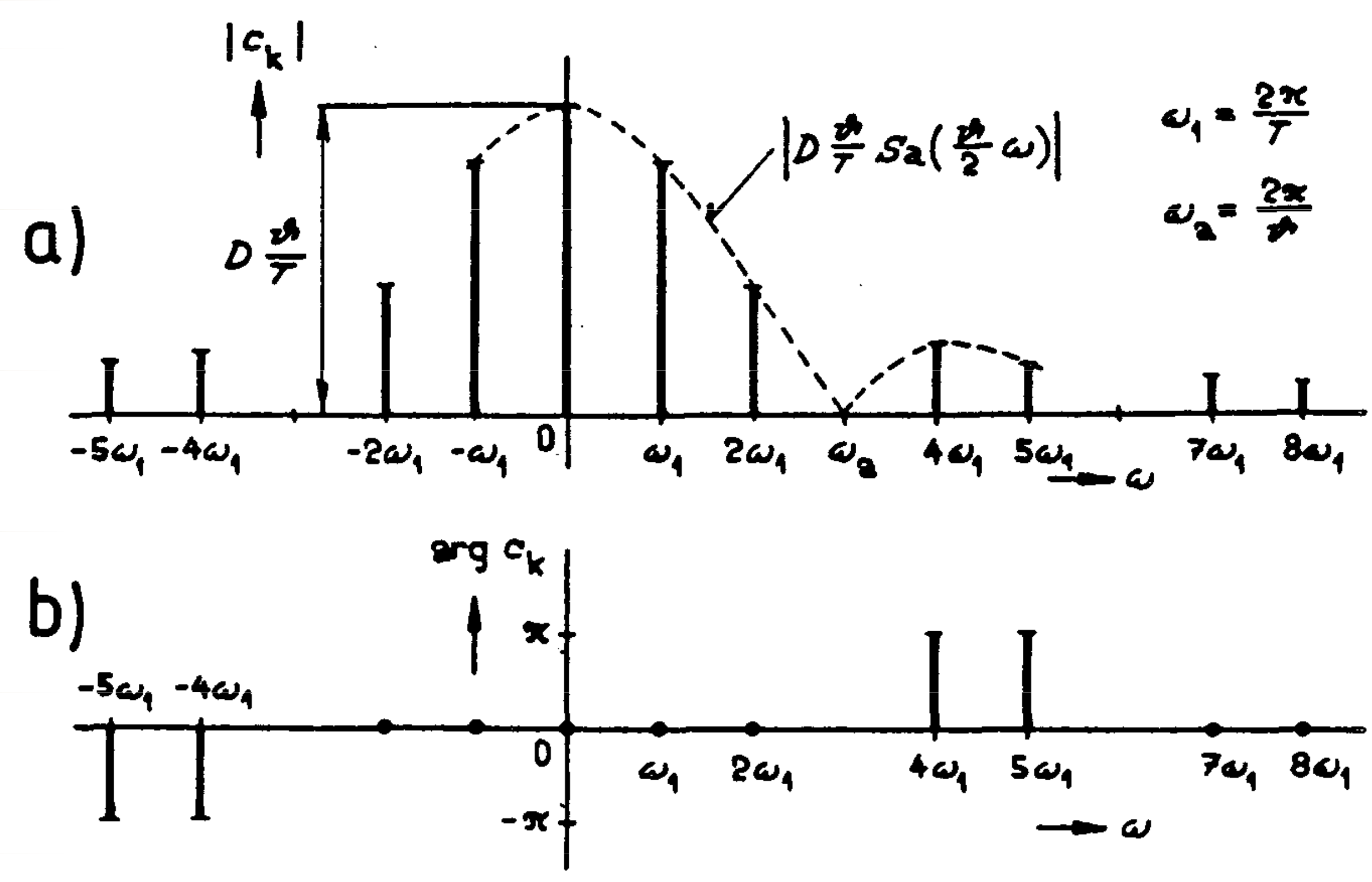
Šířka impulsů – ϑ, výška – D, perioda T

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t).e^{-jn\Omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} D.e^{-jn\Omega t}dt = \frac{D}{T}\int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} e^{-jn\Omega t}dt =$$

$$= \ldots = \frac{D}{T}.2.\frac{\vartheta}{2}.Sa\left(\frac{\vartheta}{2}n\Omega\right) = D.\frac{\vartheta}{T}.Sa\left(\frac{\vartheta}{2}n\Omega\right)$$

PŘÍKLADY

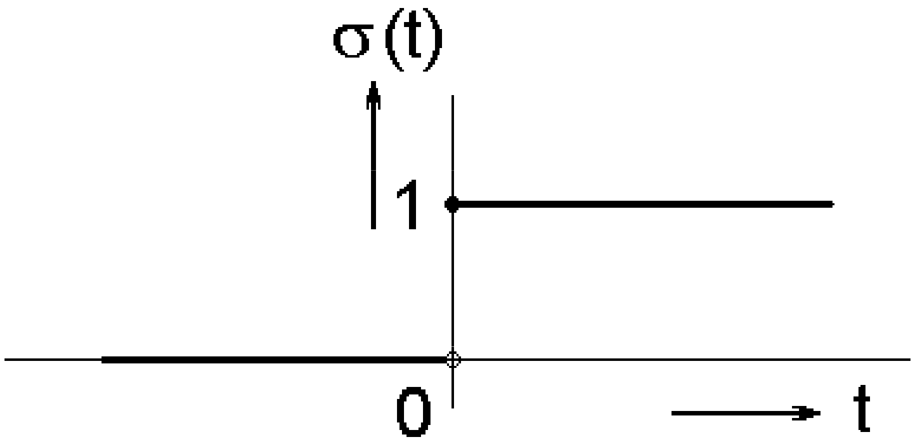
SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU



JEDNORÁZOVÉ SIGNÁLY

- jednotkový skok (Heavisidova funkce)

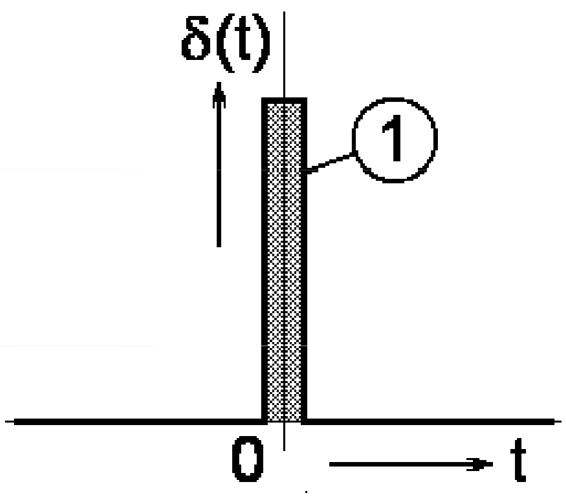
$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



JEDNORÁZOVÉ SIGNÁLY

- jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t) splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t).\delta(t-\tau)dt = s(\tau)$$

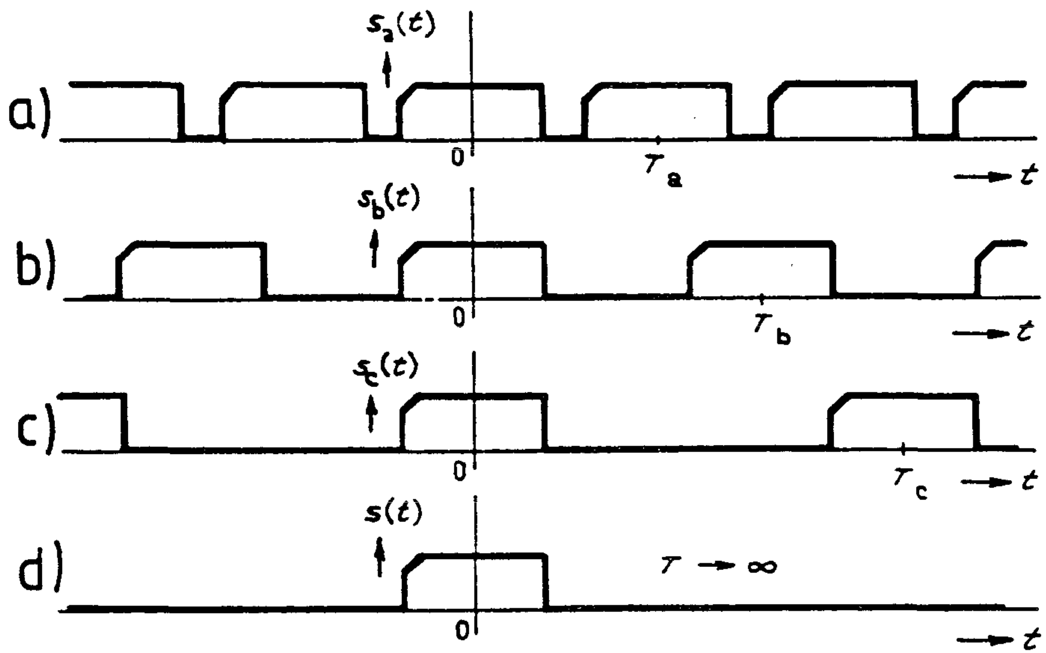


zjednodušeně:

jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

FOURIEROVA TRANSFORMACE

- ☑ zavádí spektrální popis jednorázových (aperiodických) signálů – můžeme jej získat z Fourierovy řady limitním prodloužením periody signálu T→∞



FOURIEROVA TRANSFORMACE

- kmitočet základní harmonické složky

$$\Omega = 2\pi/T$$

$$\text{když } T\to\infty, \text{ pak } \Omega\to d\omega\to 0$$

Graficky to představuje zhušťování spektrálních čar s prodlužující se periodou až v limitním případě je vzdálenost mezi spektrálními čarami nulová. Pro aperiodický signál budou spektrální čáry na sebe navazovat - $n\Omega\to\omega$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n . e^{jn\Omega t}$$

Suma ve výše uvedeném vztahu přechází v integrál s mezemi od - ∞ do ∞.

FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t).e^{-jn\Omega t}dt$$

pro T→∞ je T= 2π/dω, meze integrálu budou pro nekonečně trvající signál od - ∞ do ∞. Pro T →∞ budou rovněž amplitudy spojitého spektra jednorázového impulsu nekonečně malé. Dosaďme za C_n do vztahu na předchozím obrázku

FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t).e^{-j\omega t} dt \right) .e^{j\omega t}$$

Označme

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t).e^{-j\omega t} dt$$

Fourierova transformace

Funkci S(ω) nazveme spektrální funkcí signálu. Ta už nevyjadřuje skutečné zastoupení jednotlivých harmonických složek signálu, nýbrž jen jejich poměrné zastoupení.

Fourierova transformace převádí signál (funkci) s(t) z časové domény na funkci S(ω) v kmitočtové oblasti.

FOURIEROVA TRANSFORMACE

Pro časovou funkci můžeme psát vztah

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega).e^{j\omega t}.d\omega$$

zpětná Fourierova transformace

FOURIEROVA TRANSFORMACE
VLASTNOSTI

Princip superpozice

$$s_1(t) + s_2(t) \sim S_1(\omega) + S_2(\omega)$$

$$a.s(t) \sim a.S(\omega)$$

Změna znaménka

$$s(-t) \sim S^*(\omega)$$

Změna měřítka

$$s(t/a) \sim a.S(a\omega), \text{ kde } a > 0$$

FOURIEROVA TRANSFORMACE
VLASTNOSTI

Translace funkce

$$s(t-\tau) \sim S(\omega).e^{-j\omega\tau}$$

Transpozice spektra

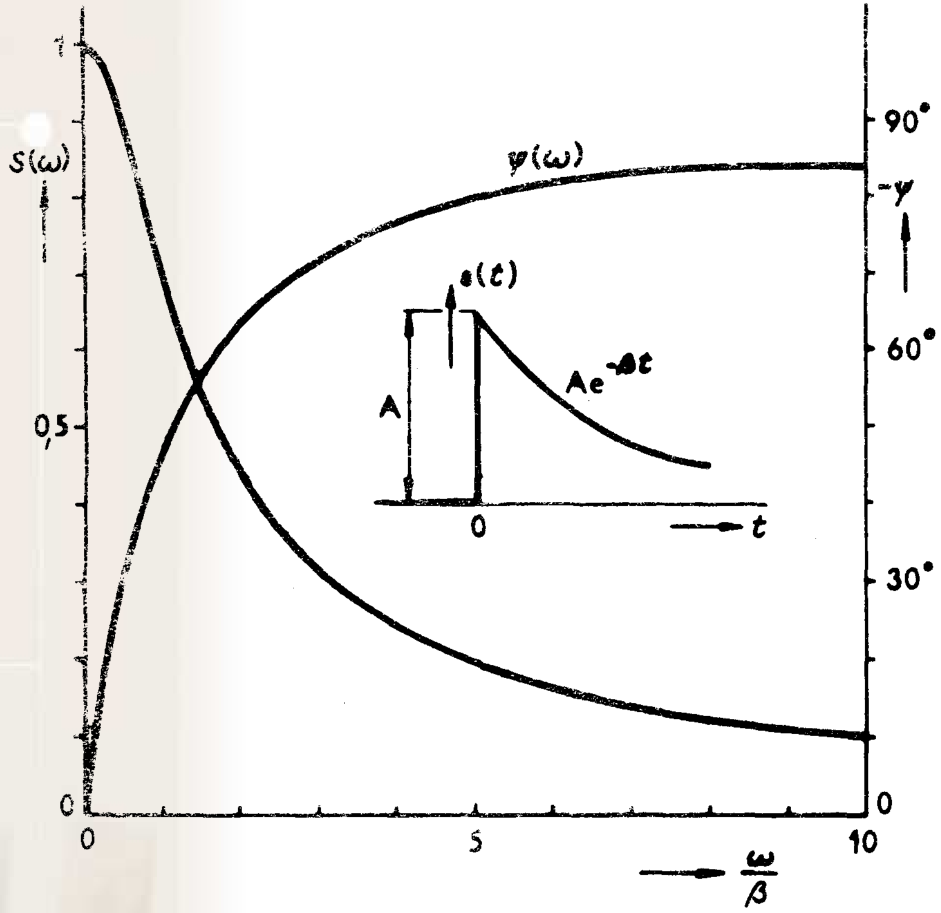
$$S(\omega-\Omega) \sim s(t).e^{-j\Omega t}$$

Konvoluce funkcí

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{t} s_1(x).s_2(t-x).dx \approx S_1(\omega).S_2(\omega)$$

PŘÍKLADY

SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO IMPULSU



$$s(t) = A.e^{-\beta t} \quad \text{pro } t \geq 0$$

$$s(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0$$

$$S(\omega) = \int_0^\infty A.e^{-\beta t}.e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \frac{A}{\beta + j\omega}$$

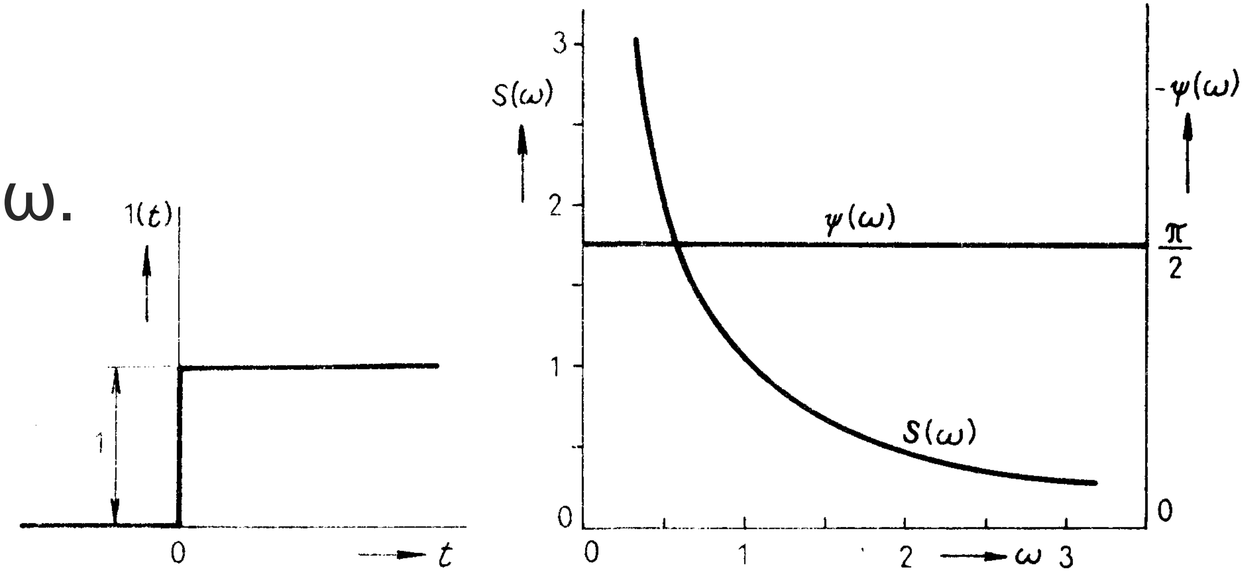
PŘÍKLADY
SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO IMPULSU

Jednotkový skok σ(t) nevyhovuje podmínce absolutní integrovatelnosti, nemá Fourierův integrál.

Pomůžeme si pomocí funkce $A.e^{-\beta t}$.

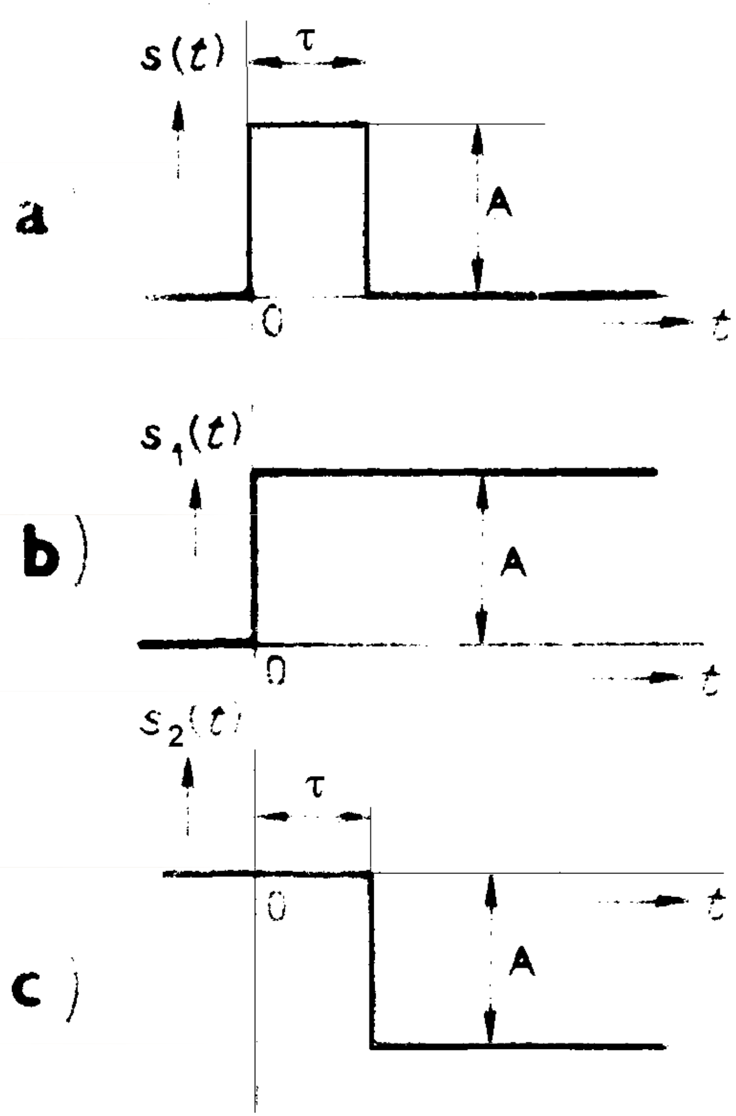
Pro A=1 a β=0 je tato funkce ekvivalentní jednotkovému skoku.

Platí tedy, že S(ω)=1/jω.



a) b)

PŘÍKLADY
SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO IMPULSU



$$s(t) = A.\sigma(t) - A.\ \sigma(t\text{-}\tau)$$

$$S(\omega) = A.\left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega}.e^{-j\omega\tau}\right) =$$

$$= A.\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega}.e^{-j\omega\tau/2} =$$

$$= \frac{2A}{\omega}.\sin\frac{\omega\tau}{2}.e^{-j\omega\tau/2} =$$

$$= A.\tau.\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}.e^{-j\omega\tau/2}$$

PŘÍKLADY
SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO IMPULSU

$$|S(\omega)| = A.\tau.\left|Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$$

Průchody nulou pro

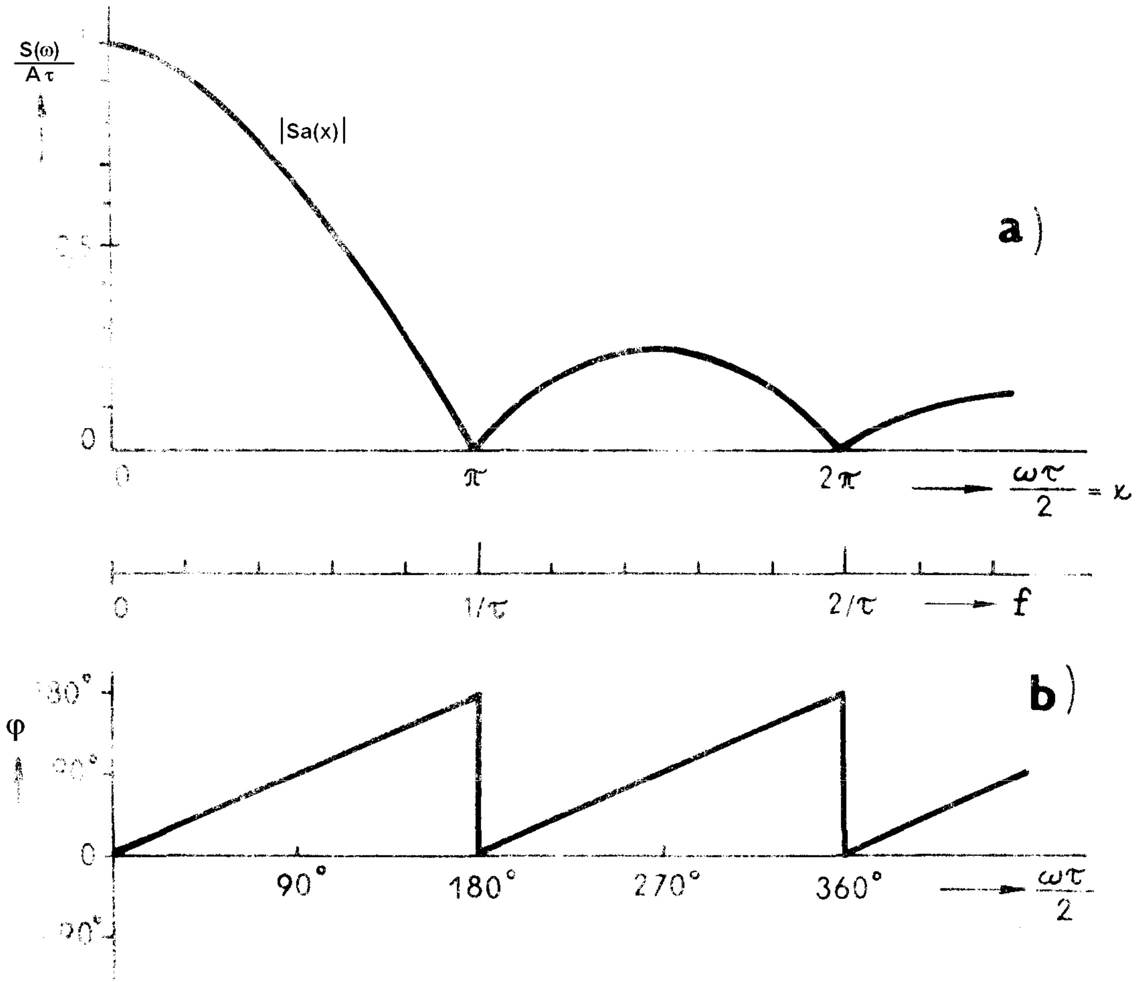
$\omega\tau/2 = k\pi$, $k=1,2,\ldots,$

resp.

$2\pi f\tau/2 = k\pi$

a tedy

$f = k/\tau$



! SHRNUTÍ !

! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- ☑ **spojitý periodický signál** má diskrétní frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu řadu;
- ☑ **spojitý jednorázový signál** má spojité frekvenční spektrum– pro rozklad jsme použili Fourierovu transformaci.

! A VĚDĚT PROČ !