



SIGNÁLY A SOUSTAVY V MATEMATICKÉ BIOLOGII



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz

V. DISKRÉTNÍ SIGNÁL FREKVENČNÍ OBLAST

ROZKLAD DISKRÉTNÍHO PERIODICKÉHO SIGNÁLU

☑ spojitý signál – opakování

Fourierova řada (v komplexním tvaru)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \quad \Omega = 2\pi / T$$

kde c_n jsou komplexní **Fourierovy koeficienty**

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

Ω – úhlový kmitočet základní harmonické složky (**základní harmonická**);

FOURIEROVA ŘADA PRO DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- ☑ nechť $x(kT)$ je periodický signál s periodou NT ; pak $x(kT)$ lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady

$$x(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \exp\left(\frac{j2\pi nk}{N}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) \cdot \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

FOURIEROVA ŘADA

DŮKAZ

- ☑ změňme index sumace ve vztahu pro výpočet koeficientu c_n

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT) \cdot \exp(-2j\pi mn / N)$$

$$\begin{aligned} x(kT) &= \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \exp(2j\pi nk / N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(mT) \cdot \exp(-2j\pi mn / N) \right) \cdot \exp(2j\pi nk / N) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k - m) / N], \end{aligned}$$

FOURIEROVA ŘADA

DŮKAZ

potom

$$\text{pro } k = m \text{ je } \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k - m)/N] = N$$

$$\text{pro } k \neq m \text{ je } \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k - m)/N] = \frac{1 - \exp[2j\pi N(k - m)/N]}{1 - \exp[2j\pi(k - m)/N]} = 0$$

$$\begin{aligned} x(kT) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k - m)/N] = \\ &= \frac{1}{N} x(kT) \cdot N = x(kT) \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD

$x(kT) = A \cdot \cos(2\pi k/N)$ je periodická funkce s periodou N

$$A \cdot \cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2} \cdot \left[\exp \frac{2j\pi k}{N} + \exp \left(-\frac{2j\pi k}{N} \right) \right]$$

Nyní, protože

$$\exp \frac{2j\pi k(N-1)}{N} = \exp \frac{2j\pi kN}{N} \cdot \exp \left(-\frac{2j\pi k}{N} \right) = \exp \left(-\frac{2j\pi k}{N} \right);$$

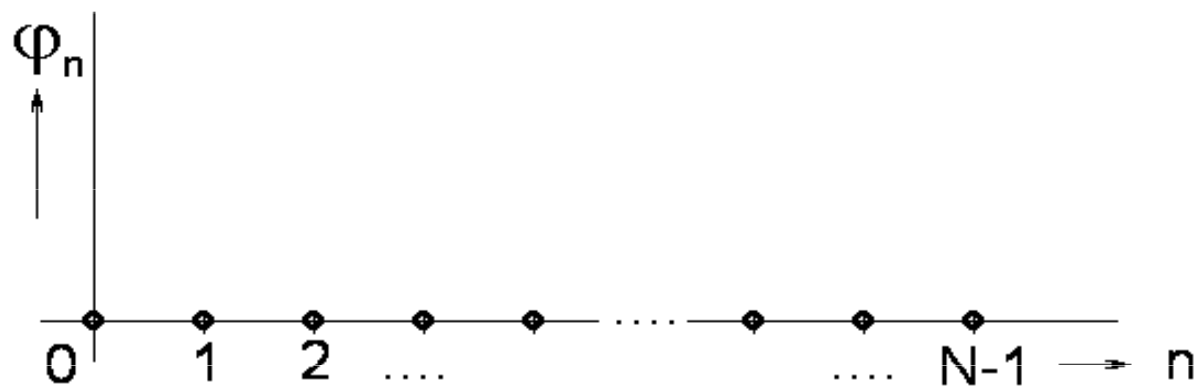
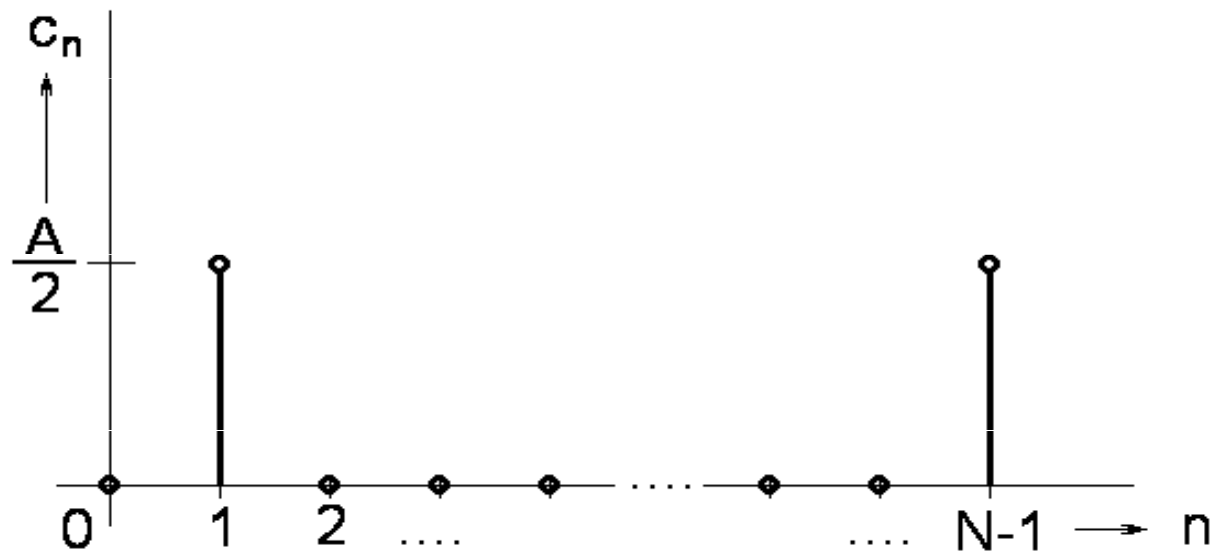
proto

$$A \cdot \cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2} \cdot \left[\exp \frac{2j\pi k}{N} + \exp \left(\frac{2j\pi(N-1)k}{N} \right) \right]$$

$$a_1 = \frac{A}{2}, \quad a_{N-1} = \frac{A}{2}, \quad a_n = 0 \text{ pro všechna jiná } n$$

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD



FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- ✓ necht' $x(kT)$ je časově omezený signál s diskretním časem s $x(kT)=0$ pro všechna celá $k > N_1$ a $k < -N_1$, kde N_1 je celočíselná konstanta.
- ✓ dále, necht' pro kladné sudé celé číslo $N > 2N_1$ označíme $\tilde{x}_N(kT)$ periodický signál s periodou NT , který je $x(kT)$ pro $k = -N/2, -(N/2)+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, (N/2)-1$.
- ✓ z definice $\tilde{x}_N(kT)$ máme
$$x(kT) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}_N(kT)$$

FOURIEROVA ŘADA PŘÍKLAD

- ☑ protože $\tilde{x}_N(kT)$ je periodická funkce s periodou NT , má Fourierovu řadu

$$\tilde{x}_N(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \exp \frac{2j\pi nk}{N}$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} \tilde{x}_N(kT) \cdot \exp \left(-\frac{2j\pi kn}{N} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD

- ☑ Z definice $\tilde{x}_N(kT)$ vyplývá, že lze poslední uvedenou rovnici přepsat do tvaru

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \exp\left(-\frac{2j\pi knT}{NT}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

a potom

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \exp(-jk\omega T), \quad \omega = 2\pi n / NT$$

kde ω je pro $N \rightarrow \infty$ spojitá (nediskrétní) veličina.

DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE - DFT

- ☑ aby bylo možné počítat s frekvenčním spektrem na počítači, je třeba spektrální funkci diskretizovat;
- ☑ předpokládejme, že diskrétní signál $x(nT)=0$ pro $n < 0$ a $n \geq N-1$, pak DFT je definována vztahem

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{-jk\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{NT} nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{-j2\pi kn / N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn / N}$$

ZPĚTNÁ DISKRÉTNÍ FT – DFT⁻¹

$$x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{jnTk\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{j2\pi kn / N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi kn / N}$$

INVERZIBILITA DFT

$$\mathcal{DFT}^{-1}\{\mathcal{DFT}(x)\} = x$$

$$x(mT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{jmTk\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{-jk\Omega nT} \right) \cdot e^{jmTk\Omega} =$$

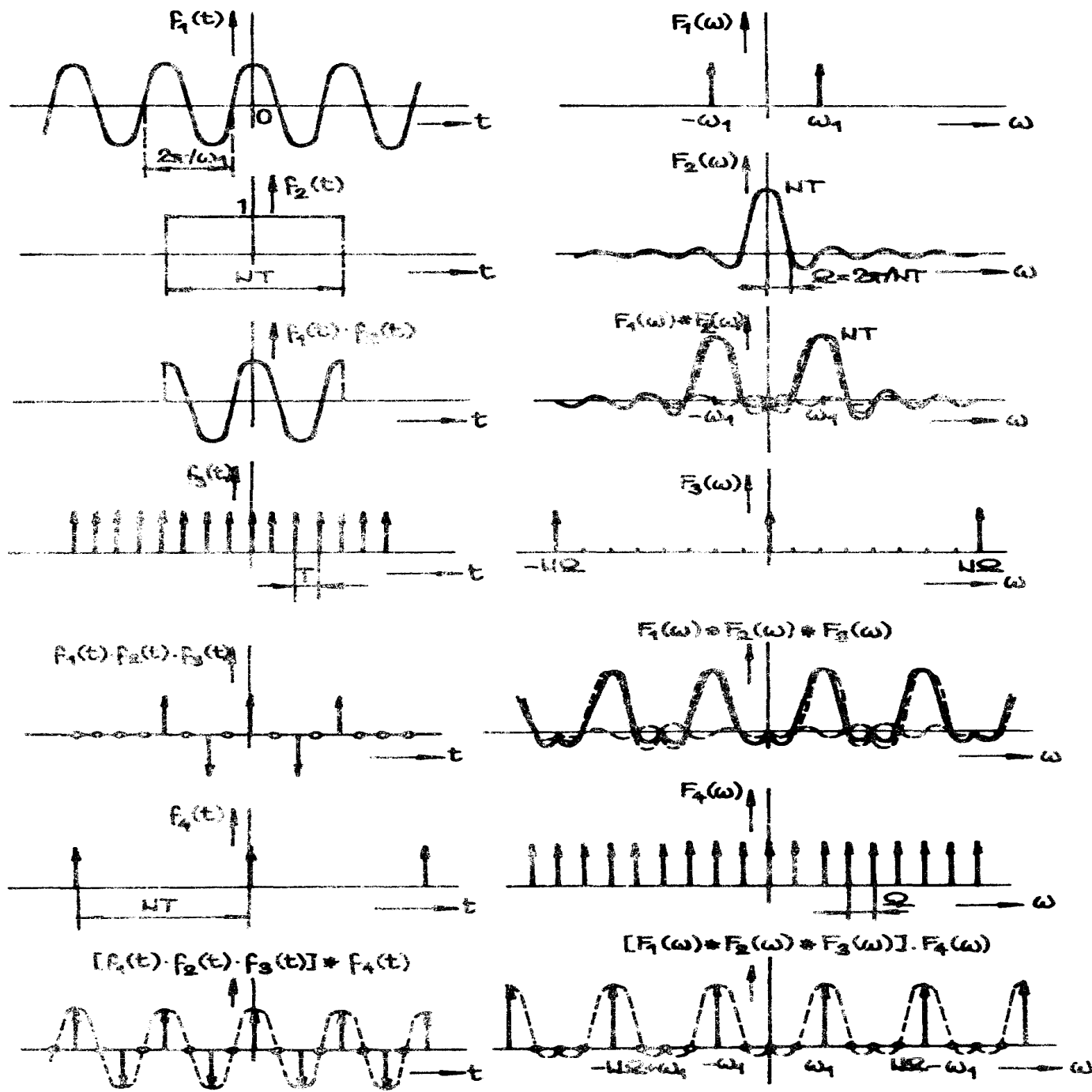
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T} = \left| \begin{array}{l} \text{pro } m = n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T} = N \\ \text{pro } m \neq n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1 - e^{j(m-n)N\Omega T}}{1 - e^{j(m-n)\Omega T}} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{N} x(mT) \cdot N = x(mT) \quad \Omega = 2\pi / NT$$

DFT

$$\Omega_1 = 2\Omega$$

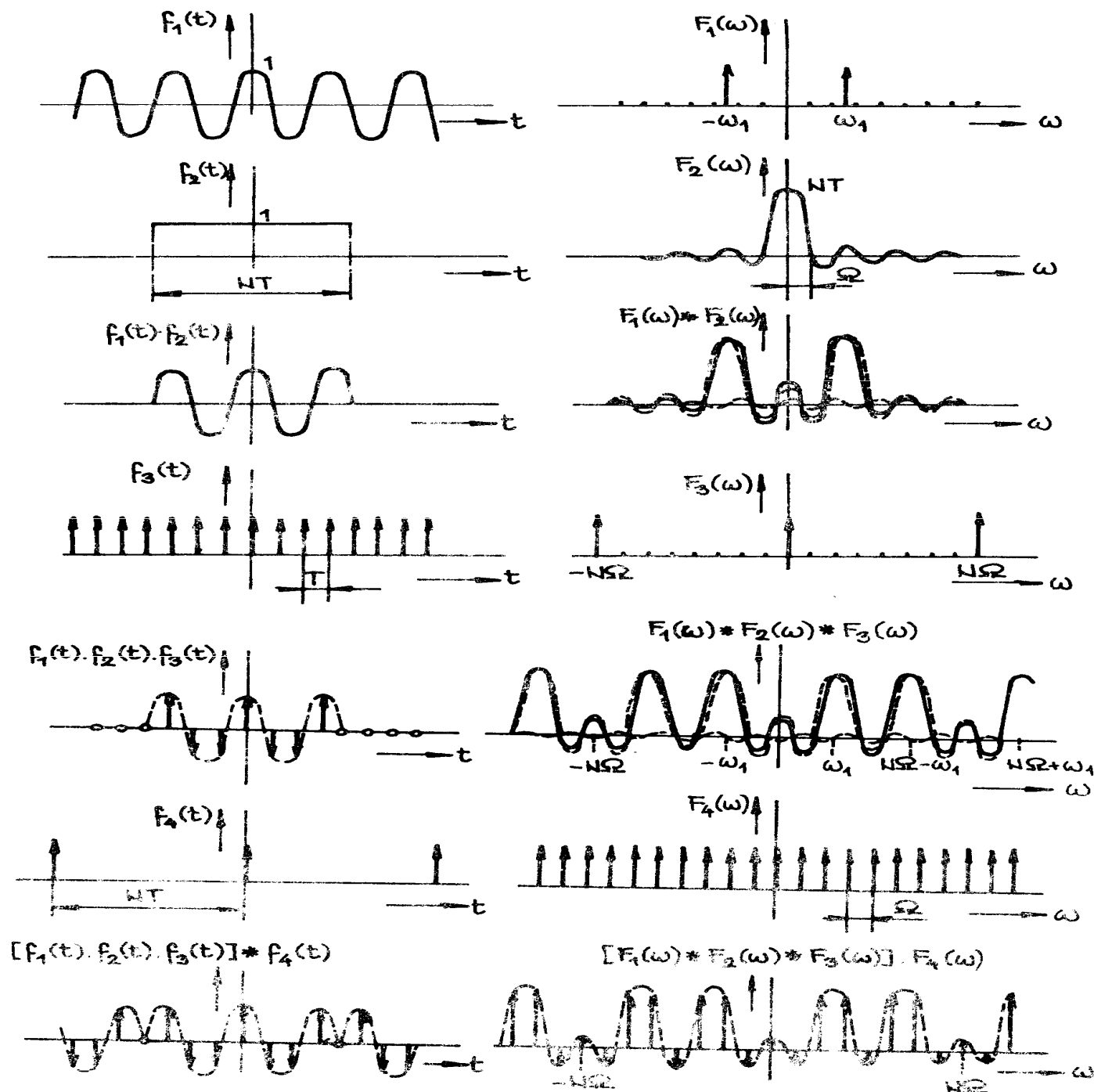
$$= 4\pi/NT$$



DFT

$$\Omega_1 = 2,5\Omega$$

$$= 5\pi/NT$$

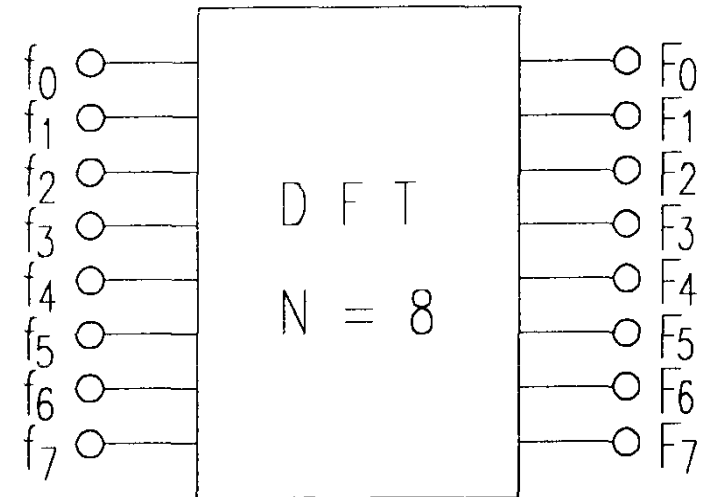


RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{-jk\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot (\cos(k\Omega nT) - j \sin(k\Omega nT))$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot (\cos(2\pi kn/N) - j \sin(2\pi kn/N))$$

- ✓ hodnoty funkcí cos a sin se používají z tabulek pro čtvrtinu periody;
- ✓ zrychlení výpočetního algoritmu se dosáhne využitím dříve vypočítaných mezivýsledků, resp. vynecháním zbytečných výpočtů – např. násobení nulou;



RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

FFT – (Cooley, Tukey – 1965, ale před nimi již i mnozí další od 1903)

- rozklad v časové oblasti;
- rozklad ve frekvenční oblasti

jednotka pracnosti P – jedno komplexní násobení a sečítání

pracnost výpočtu jednoho vzorku spektra – $N \cdot P$

pracnost celé transformace – $N \cdot N \cdot P = N^2 \cdot P$

FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

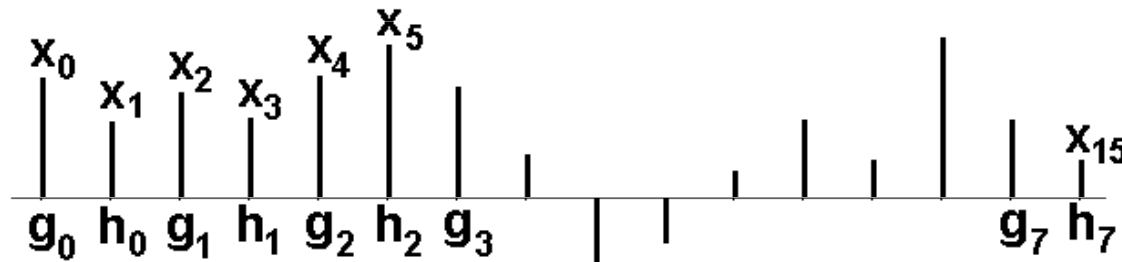
- ✓ vstupní posloupnost o sudém počtu vzorku rozdělíme na dvě dílčí posloupnosti

$\{g_i\} = \{x_{2i}\}$ - sudé prvky původní posloupnosti,

$\{h_i\} = \{x_{2i+1}\}$ - liché prvky původní posloupnosti,

$$i=0,1,\dots, N/2-1$$

předpokládáme, že každá z posloupností (původní i obě dílčí), mají svou DFT



FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$G(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i \cdot e^{-\frac{j4\pi ik}{N}}$$

$$H(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i \cdot e^{-\frac{j4\pi ik}{N}}$$

$$k \in \langle 0, N/2 - 1 \rangle$$

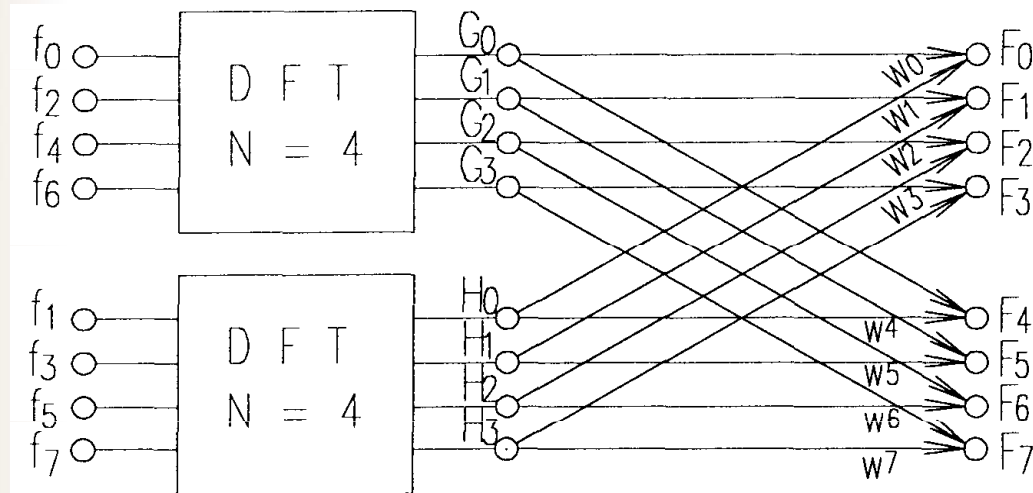
FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N}} = x_0 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}0k} + x_1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}1k} + x_2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} + \dots + x_{N-1} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} =$$

$$= \begin{vmatrix} g_0 = x_0 & g_1 = x_2 & g_2 = x_4 & g_7 = x_{14} \\ h_0 = x_1 & h_1 = x_3 & h_2 = x_5 & \dots & h_7 = x_{15} \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi(2i+1)k}{N}} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} \cdot e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \right) = G(k') + e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \cdot H(k') \quad k' = k \bmod(N/2)$$



$$W^m = e^{-j\frac{2\pi}{N}m}$$

FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k) = G(k') + e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \cdot H(k') \quad k' = k \bmod (N/2)$$

- ✓ výsledná pracnost bude součtem pracností výpočtu spekter obou posloupností

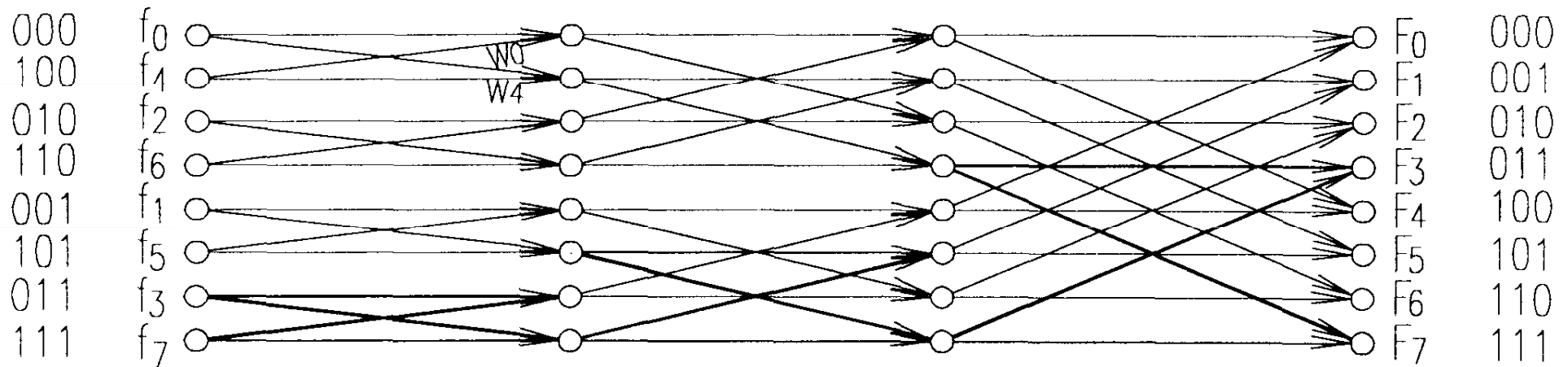
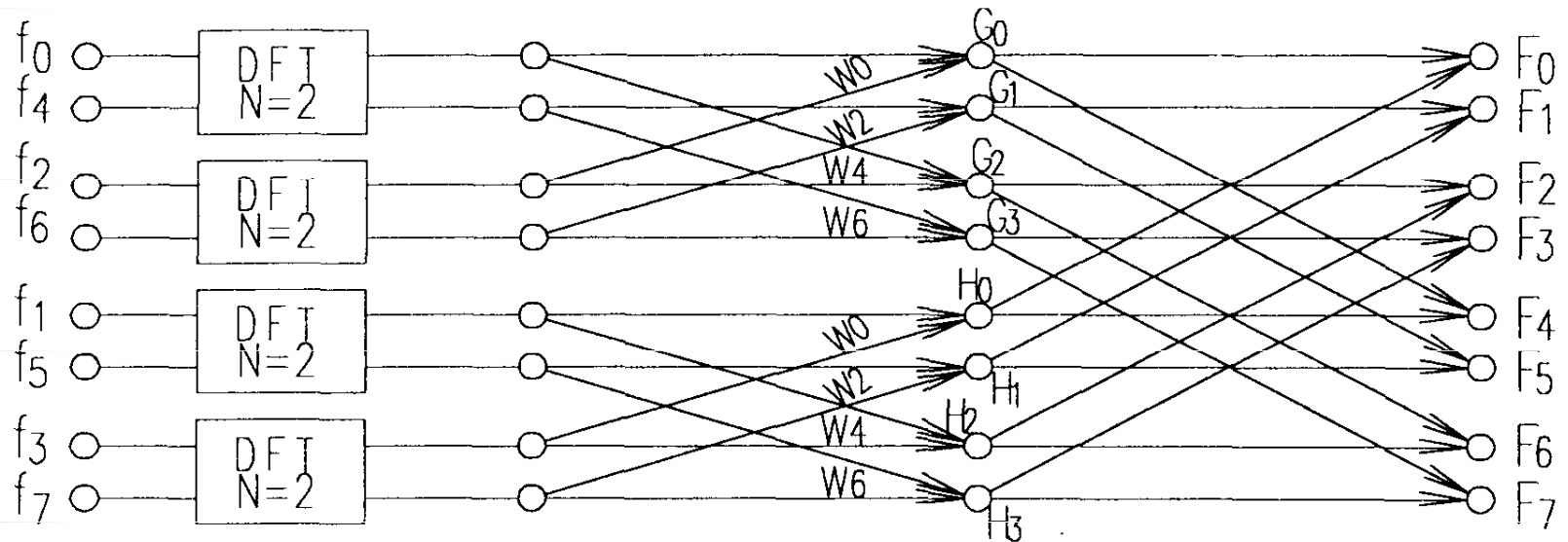
$$2 \cdot (N/2)^2 \cdot P + N \cdot P$$

tzn. uspořeni pracnosti téměř na polovinu;

- ✓ je-li $N/2$ opět sudé, může se v dělení pokračovat – celkově je výhodné, je-li $N = 2^m$

FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI



FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- ☑ každý uzel v grafu představuje jedno komplexní násobení a součet
- ☑ N uzlů ve vrstvě; celkem m vrstev $m = \log_2 N$
- ☑ celková pracnost:

$$P.N.m = P.N.\log_2 N$$

to představuje při $N=8$ úsporu 60%, při $N=1024$ již téměř 99% a při $N=131072=2^{17}$ dokonce 99,99%

FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- ☑ výstup je uspořádan přírozeně; vstup je v bitově inverzním pořadí;
- ☑ opakující se struktury „motýlků“ obsahujících 4 uzly a 4 hrany