



SIGNÁLY A SOUSTAVY V MATEMATICKÉ BIOLOGII



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz

VII. SYSTÉMY



FORMY ABSTRAKTNÍHO POPISU SPOJITÝCH SYSTÉMŮ

VNĚJŠÍ (VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ) POPIS

FORMÁLNÍ (MATEMATICKÝ) POPIS SYSTÉMU

Matematické prostředky se různí podle:

- ✓ typu časové základny (spojité, diskrétní, nezávislé na časovém měřítku);
- ✓ charakteru proměnných (spojité, diskrétní, logické);
- ✓ determinovanosti proměnných a parametrů (deterministické, nedeterministické - pravděpodobnostní, fuzzy,...);
- ✓ vztahu k okolí (autonomní, neautonomní);
- ✓ proměnnosti parametrů (lineární, nelineární, časově proměnné);
- ✓ vztahu k minulosti (bez paměti, s pamětí);

TECHNICKÝ & BIOLOGICKÝ SYSTÉM

základními vlastnostmi biologických systémů jsou:

- ☑ **přirozenost** (zpravidla nejsou vytvořeny člověkem);
- ☑ **veliký rozměr** (velký počet stavových proměnných a ne vždy je přesně znám);
- ☑ **složitá hierarchická struktura**;
- ☑ **významná interakce** na všech úrovních jejich struktury (často časově proměnná);
- ☑ **velké rozdíly** mezi jednotlivými realizacemi (jedinci) – rozptyl uvnitř populace – **interindividuální variabilita**;
- ☑ **velké rozdíly** v chování jednotlivých realizací (jedinců) v čase – **intraindividuální variabilita**;

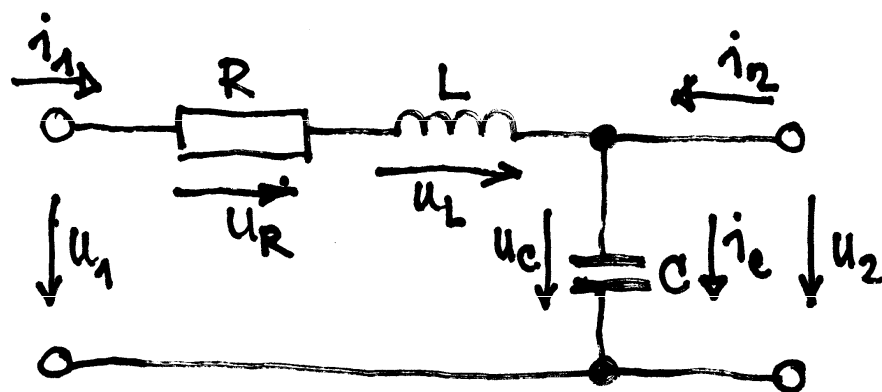
TECHNICKÝ & BIOLOGICKÝ SYSTÉM

základními vlastnostmi biologických systémů jsou i:

- ☑ nestacionarita a neergodicita nedeterministického chování;
- ☑ předpoklady o linearitě představují velice hrubou a omezenou aproximaci;
- ☑ významné omezení počtu experimentů opakovatelných za dostatečně srovnatelných podmínek;
- ☑ významné omezení experimentů z hlediska prevence škod;
- ☑ experimenty na jedincích různého typu (člověk x zvířata) mohou přinášet různé výsledky jak z hlediska kvality, tak kvantity

VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

předpokládejme konstantní parametry prvků R, L, C obvodu



$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C d\tau \quad \text{a} \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L d\tau$$

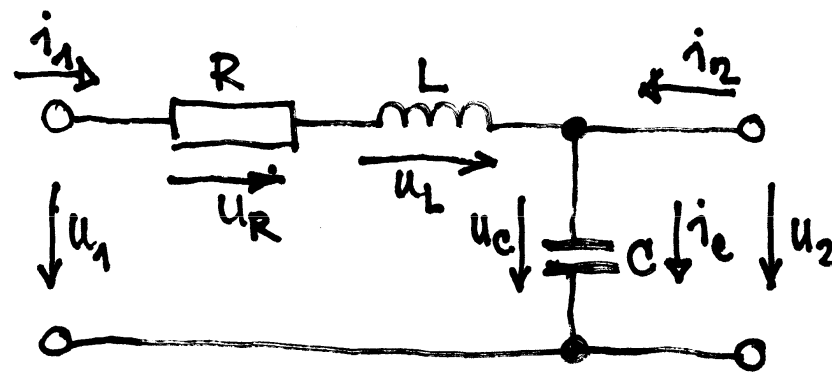
VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

$$i_1 = i_C = i_L = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad \text{a} \quad u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$\text{a tedy} \quad i_1' = \frac{1}{L} u_L$$

Pak lze psát

$$R \cdot i_1 + L \cdot i_1' + u_C = u_1$$



VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

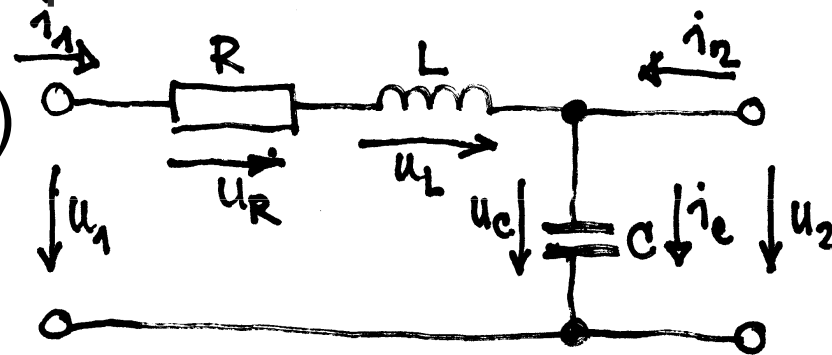
Po záměně pořadí členů na levé straně a po dosazení za proud i_1 a jeho derivaci ze vztahu mezi proudem a napětím na kapacitě je

$$LC.u_C''(t) + RC.u_C'(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

a protože napětí na kapacitě je současně i výstupním napětím, tj. $u_C(t) = u_2(t)$ lze psát matematický vztah mezi výstupním $u_2(t)$ a vstupním $u_1(t)$ napětím obvodu

$$LC.u_2''(t) + RC.u_2'(t) + u_2(t) = u_1(t)$$

Vztah mezi vstupem a výstupem
– jedna z forem vnějšího popisu



VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

obecně, spojitý systém n -tého řádu popisuje
diferenciální rovnice n -tého řádu

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y = a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_0 x ,$$

která je, za předpokladu že parametry $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ jsou konstantní, **lineární**;

prakticky nelze realizovat takové systémy, jejichž výstupní signál by byl přesně úměrný derivacím vstupního signálu, proto musí platit $m \leq n$;

LINEARITA

System je lineární, platí-li pro něj **princip superpozice**

Je-li $y=f(x)$ převodní funkce systému, pak pro lineární systém musí platit

$$1) f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2);$$

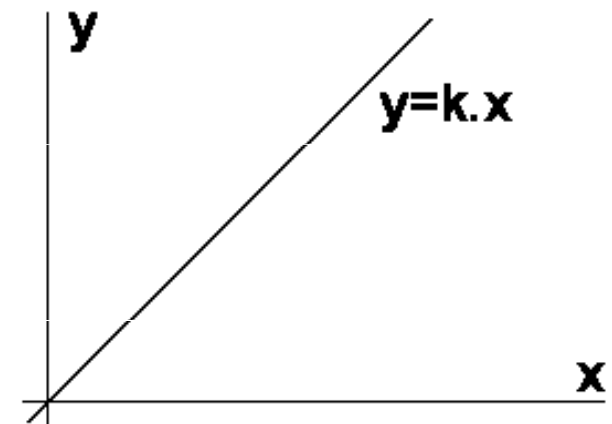
$$2) c.f(x) = f(c.x), c = \text{konst.}$$

LINEARITA

A to je jen tehdy, je-li
 $y=k.x$, kde $k = \text{konst.}$

$$1) k.x_1 + k.x_2 = k.(x_1 + x_2)$$

$$2) c.k.x = k.c.x$$



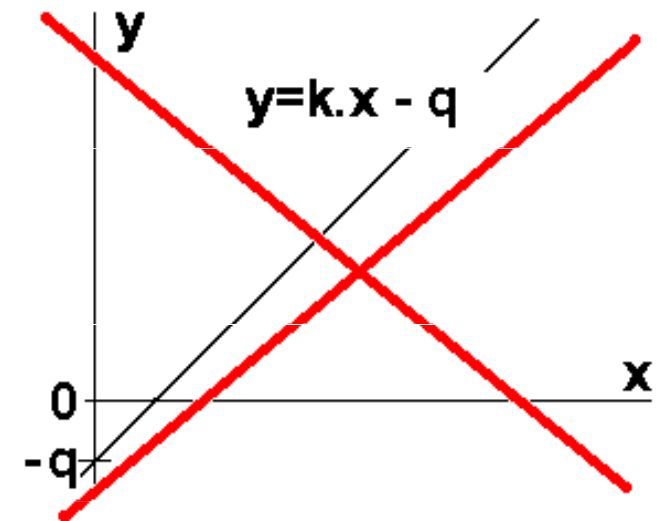
LINEARITA

A neplatí to ani, když

$y = k \cdot x - q$, kde $k, q = \text{konst.}$,
protože

$$1) (k \cdot x_1 - q) + (k \cdot x_2 - q) \neq k \cdot (x_1 + x_2) - q$$

$$2) c \cdot (k \cdot x - q) \neq (k \cdot c \cdot x - q)$$



LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

kde $p = \sigma + j\omega$.

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

kde $p = \sigma + j\omega$.

Pamatujeme si ještě definiční vztah
Fourierovy transformace?

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

kde $p = \sigma + j\omega$.

Pamatujeme si ještě definiční vztah
Fourierovy transformace?

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

VLASTNOSTI

- ✓ spousta úžasných vlastností ekvivalentních vlastnostem Fourierovy transformace, navíc i něco co se neuvěřitelně hodí pro řešení diferenciálních rovnic (převádí diferenciální rovnice na mocninné algebraické)
- ✓ Laplacův obraz derivace:

$$f'(t) \sim p \cdot F(p) - f(0)$$

$$f^{(n)}(t) \sim p^n \cdot F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

PŘENOSOVÁ FUNKCE

$$LC.u_2''(t) + RC.u_2'(t) + u_2(t) = u_1(t)$$

Vyjádřeme nyní tuto rovnici pomocí Laplacových obrazů obou veličin. Za předpokladu nulových počátečních podmínek pro Laplacův obraz n -té derivace funkce $y(t)$ platí

$$y^{(n)}(t) \approx p^n Y(p) + 0$$

Do dosazení dostáváme

$$LC.p^2 U_2(p) + RC.p U_2(p) + U_2(p) = U_1(p)$$

$$(LC.p^2 + RC.p + 1).U_2(p) = U_1(p)$$

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Pro poměr obrazů výstupní a vstupní veličiny můžeme psát

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LC \cdot p^2 + RC \cdot p + 1} = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}$$

Takto definovanou funkci za nulových počátečních podmínek (!!!!) nazýváme **obrazovou (operátorovou) přenosovou funkcí** daného systému.

PŘENOSOVÁ FUNKCE

pro obecnou diferenciální rovnici n-tého řádu

$$\begin{aligned} b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y &= \\ &= a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_0 x , \end{aligned}$$

má přenosová funkce lineárního systému za předpokladu nulových počátečních podmínek tvar

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} \cdot p^{m-1} + a_{m-2} \cdot p^{m-2} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + b_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0}$$

PŘENOSOVÁ FUNKCE

polynom ve jmenovateli přenosové funkce

$$b_n p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + b_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0$$

nazýváme **charakteristickým polynomem systému** a rovnicí

$$b_n p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + b_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$$

charakteristickou rovnicí systému

PŘENOSOVÁ FUNKCE

řešením charakteristické rovnice

$$b_n p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + b_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$$

resp.

$$p^n + b'_{n-1} \cdot p^{n-1} + b'_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + b'_1 p + b'_0 = 0$$

dostaneme n jejích kořenů $p_i, i=1, \dots, n$.

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Podobně můžeme určit i kořeny z_j , $j=1,\dots,m$ rovnice, která vznikne položením polynomu v čitateli přenosové funkce rovno nule, tj.

$$a_m p^m + a_{m-1} \cdot p^{m-1} + a_{m-2} \cdot p^{m-2} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

Kořeny p_i i z_j mohou být obecně reálné i komplexní; za předpokladu, že koeficienty b_i , resp. a_j jsou reálné, pak kořeny p_i i z_j , jsou-li komplexní, jsou komplexně sdružené.

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Pomocí hodnot kořenů z_j a p_i můžeme psát přenosovou funkci ve tvaru

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = c_m \cdot \frac{(p - z_1) \cdot (p - z_2) \cdot \dots \cdot (p - z_m)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n)}$$

- Kořeny z_j nazýváme **nulové body** přenosové funkce a
- kořeny p_i **póly** přenosové funkce $F(p)$

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- ✓ proměnná p má obecně komplexní charakter a tedy nabývá tvaru

$$p = \sigma + j\omega ,$$

kde σ je koeficient tlumení a $\omega = 2\pi f$ je kruhová frekvence

- ✓ předpokládejme, že koeficient tlumení

$$\sigma = 0,$$

pak po dosazení za p v operátorové přenosové funkci dostáváme

$$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = |F(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

což nazýváme **frekvenční přenosovou funkcí systému**

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ frekvenční charakteristika je grafické vyjádření frekvenční přenosové funkce systému (geometrické místo koncových bodů vektoru přenosu pro frekvence, prakticky pouze v intervalu $0 \leq \omega < \infty$)

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ frekvenční charakteristiky vyjadřujeme zpravidla dvěma způsoby:
 - frekvenční charakteristika v komplexní rovině
- $$F(j\omega) = \text{Re} [F(j\omega)] + j \cdot \text{Im} [F(j\omega)]$$
- modulová (amplitudová) a fázová frekvenční charakteristika

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

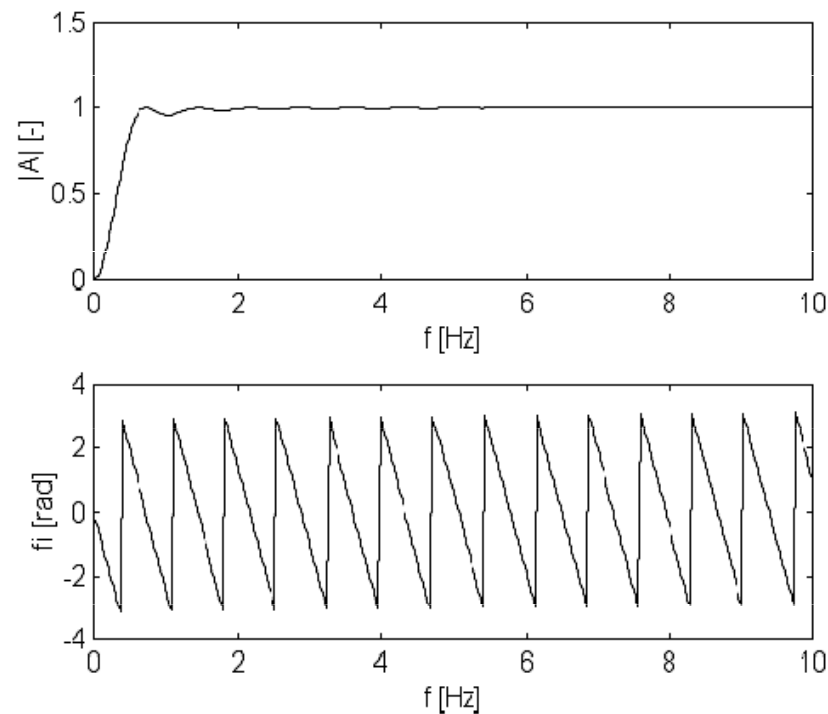
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA V KOMPLEXNÍ ROVINĚ

v tomto případě kreslíme frekvenční charakteristiku nejčastěji v komplexní rovině s osami, na které vynášíme reálnou a imaginární složku přenosu; frekvenční vlastnosti systému vyjadřuje křivka v komplexní rovině, jejímž parametrem je kruhová frekvence ω

| přenos | $F(j\omega)$ |
|---------------------|--|
| $\frac{1}{T_p + 1}$ | <p>A Nyquist plot in the complex plane with a horizontal real axis (Re) and a vertical imaginary axis (Im). The curve starts at 1 on the real axis at $\omega=0$, goes down and left to 0 on the real axis at $\omega \rightarrow \infty$. A dashed vertical line is drawn at $Re = 0.5$. A point on the curve is labeled ω. The value $-0.5j$ is marked on the negative imaginary axis.</p> |
| $\frac{1}{p}$ | <p>A Nyquist plot in the complex plane with a horizontal real axis (Re) and a vertical imaginary axis (Im). The curve is a vertical line on the negative imaginary axis starting from the origin and extending downwards. The label $\omega \rightarrow \infty$ is placed near the origin.</p> |
| $\frac{p}{T_p + 1}$ | <p>A Nyquist plot in the complex plane with a horizontal real axis (Re) and a vertical imaginary axis (Im). The curve starts at 0 on the real axis at $\omega=0$, goes up and right to $1/T$ on the real axis at $\omega \rightarrow \infty$. A dashed vertical line is drawn at $Re = 0.5/T$. A point on the curve is labeled ω.</p> |

MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- ✓ vlastnosti systému určují dvě funkce – závislost modulu přenosu na frekvenci a závislost fáze na frekvenci;



MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- ✓ v některých případech se využívá pro znázornění těchto charakteristik logaritmické měřítko – amplitudu pak vyjadřujeme v decibelech

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log |F(j\omega)|$$

Tento způsob popisu je výhodný v případech, kdy je přenosová funkce systému určena součinem dílčích přenosových funkcí

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) \cdot \dots \cdot F_k(j\omega);$$

pak platí

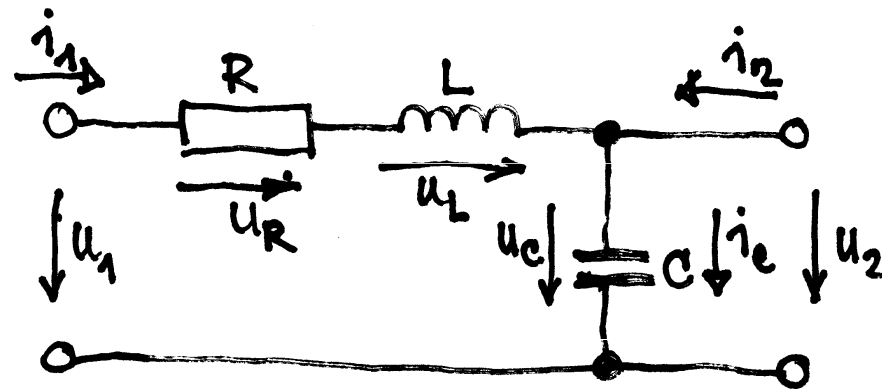
$$|F(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} = |F_1(j\omega)| \cdot |F_2(j\omega)| \dots |F_k(j\omega)| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k)}$$

MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

| preenos | $F(j\omega)$ | $F_{dB} = 20 \log F(j\omega) $; $\varphi(\omega)$ |
|--------------------|--------------|---|
| $\frac{1}{Tp + 1}$ | | |
| $\frac{1}{p}$ | | |
| $\frac{p}{Tp + 1}$ | | |

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

nyní předpokládejme, že kapacita C závisí na napětí na kondenzátoru



$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

$$u_C = \frac{1}{C(u_C)} \int_{-\infty}^t i_C d\tau \quad \text{a} \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L d\tau$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \frac{di_1}{dt} \quad \text{a tedy} \quad i'_1 = \frac{1}{L} u_L$$

a tedy i

$$R \cdot i_1 + L \cdot i'_1 + u_C = u_1$$

Pak se poněkud komplikuje určení $i_1 = i_C$ ze vztahu

$$u_C = \frac{1}{C(u_C)} \int_{-\infty}^t i_C d\tau$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

Platí, že

$$\int_{-\infty}^t i_C d\tau = C(u_C) \cdot u_C$$

Potom pro i_C platí

$$i_C = [C(u_C) \cdot u_C]' = C'(u_C) \cdot u'_C \cdot u_C + C(u_C) \cdot u'_C$$

Pro jednoduchost, necht' je $C(u_2) = k \cdot u_2$ a tedy $C'(u_2) = k$;
pak

$$i_1 = i_C = k \cdot u'_C \cdot u_C + k \cdot u_C \cdot u'_C = 2k \cdot u_C \cdot u'_C$$

$$i'_1 = i'_C = [2k \cdot u_C \cdot u'_C]' = 2k \cdot (u'_C \cdot u'_C + u_C \cdot u''_C) = 2k \cdot (u'_C)^2 + 2k \cdot u_C \cdot u''_C$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

A po dosazení dostáváme

$$2k.R.u_C.u'_C + 2k.L.(u'_C)^2 + 2k.L.u_C.u''_C + u_C = u_1$$

Protože $C(u_C) = k.u_C$, můžeme psát

$$2R.C(u_C).u'_C + 2L.C'(u_C).u'_C.u'_C + 2L.C(u_C).u''_C + u_C = u_1$$

$$2L.C(u_C).u''_C + (2R.C(u_C) + 2L.C'(u_C).u'_C).u'_C + u_C = u_1$$

A tedy obecně

$$\begin{aligned} b_n(\bullet).y^{(n)} + b_{n-1}(\bullet).y^{(n-1)} + \dots + b_0(\bullet).y &= \\ &= a_m(\bullet).x^{(m)} + a_{m-1}(\bullet).x^{(m-1)} + \dots + a_0(\bullet).x \end{aligned}$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$b_n(\bullet).y^{(n)} + b_{n-1}(\bullet).y^{(n-1)} + \dots + b_0(\bullet).y = \\ = a_m(\bullet).x^{(m)} + a_{m-1}(\bullet).x^{(m-1)} + \dots + a_0(\bullet).x$$

(•) znamená závislost na určité (dané, zvolené) proměnné popisující chování systému – její průběh, ale obecně závisí na vstupním signálu



- (1) Vlastnosti nelineárního systému nezávisí jen na systému samém, nýbrž i na jeho vstupu (buzení)
- (2) Laplacovu transformaci součinu funkce a derivace proměnné lze počítat (zda-li) jen pro konkrétní případ a tedy nelze obecně stanovit tvar operátorové přenosové funkce nelineárního systému