SIGNÁLY A SOUSTAVY V MATEMATICKÉ BIOLOGII

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

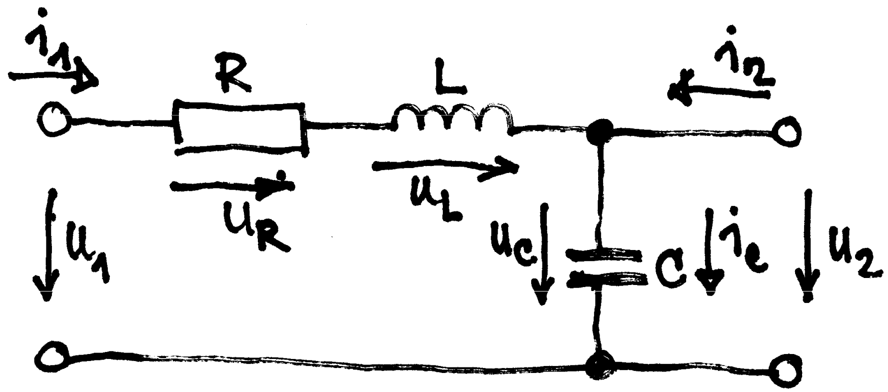
VIII.
SPOJITÉ SYSTÉMY

FORMY ABSTRAKTNÍHO POPISU SPOJITÝCH SYSTÉMŮ

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

předpokládejme konstantní parametry prvků R, L, C obvodu



$$u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C \, d\tau \quad \text{a} \quad i_1 = i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L \, d\tau$$

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C d\tau \quad \text{a} \quad i_1 = i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L d\tau$$

$$u'_2 = \frac{1}{C} i_1$$

$$u'_2 = 0.u_2 + \frac{1}{C} i_1 + 0.u_1$$

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

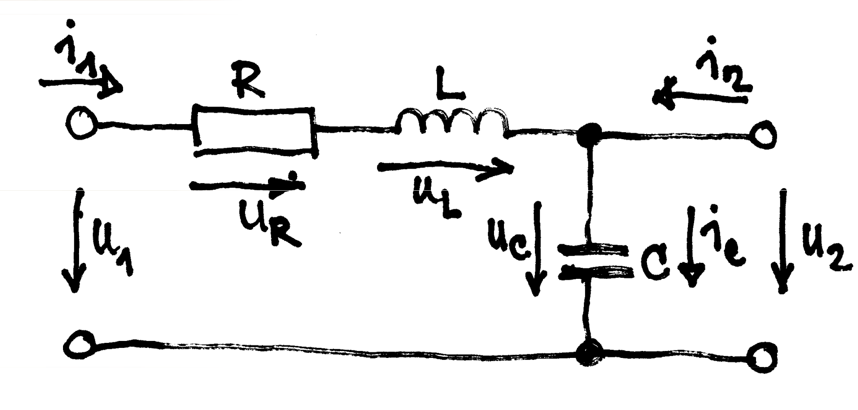
$$R.i_1 + L.i'_1 + u_2 = u_1$$

$$i'_1 = -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L}u_1$$

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C \, d\tau \quad \text{a} \quad i_1 = i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L \, d\tau$$

u_2 a i_1 jsou **stavové veličiny**; z jejich hodnot, resp. jejich derivací a parametrů systému jsme schopni spočítat hodnoty všech dalších veličin popisujících chování daného systému



$$u_R = R.i_1; \quad u_L = L.i'_1; \quad u_C = u_2$$

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u'_2 = 0.u_2 + \frac{1}{C} i_1 + 0.u_1 \qquad i'_1 = -\frac{1}{L} u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L} u_1$$

$$\begin{bmatrix} u'_2 \\ i'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_2 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} . [u_1]$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A}.\mathbf{s} + \mathbf{B}.\mathbf{x}$$

rovnice dynamiky

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u_2 = u_2 = u_2 + 0.i_1 + 0.u_1$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_2 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{s} + \mathbf{D}.\mathbf{x}$$

výstupní rovnice

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

A - matice vnitřních vazeb systému (též systémová matice nebo matice zpětných vazeb);
rozměr: n x n

B - matice vazeb systému na vstup (též vstupní matice); rozměr: m x n

C - matice vazeb výstupu na stav (výstupní matice); rozměr: n x r (r je počet výstupů)

D - matice přímých vazeb výstupů na vstupy; rozměr: m x n (z hlediska zkoumání vlastností lineárních dynamických systémů nejsou tyto vazby podstatné a často je tato matice nulová)

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

nyní opět předpokládejme, že kapacita C závisí na napětí na kondenzátoru; pak

$$u_2.C(u_2) = u_C.C(u_C) = \int_{-\infty}^{t} i_C d\tau = \int_{-\infty}^{t} i_1 d\tau$$

$$u'_2.C(u_2) + u_2.C'(u_2).u'_2 = i_1$$

$$u'_2 = \frac{1}{C(u_2) + u_2.C'(u_2)}.i_1 = \frac{1}{\Gamma(u_2)}.i_1$$

$$i'_1 = -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L}u_1$$

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$u'_2 = \frac{1}{\Gamma(u_2)}.i_1 \qquad i'_1 = -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L}u_1$$

$$\begin{bmatrix} u'_2 \\ i'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\Gamma(u_2) \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_2 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} . [u_1]$$

IX.
Z TRANSFORMACE
SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

Z TRANSFORMACE

definice DTFT - opakování

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT).\exp(-jk\omega T),$$

X(ω) je obecně komplexní funkce proměnné ω - kmitočtu

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT).\exp(j\omega T)^{-k},$$

je-li z=exp(jωT), dostaneme

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT).z^{-k},$$

oboustranná Z-transformace

Z TRANSFORMACE

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT).z^{-k},$$ jednostranná Z-transformace

Z-transformace jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT))=1$$

Z-transformace posunutého jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT\text{-}nT))=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta(kT-nT).z^{-n}=\Delta(0T).z^{-n}=z^{-n}=\frac{1}{z^{n}}$$

Z TRANSFORMACE

Z-transformace jednotkového skoku

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \ldots$$

vynásobíme-li obě strany (z-1) dostaneme

$$(z-1).U(z) = (z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\ldots) - (1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\ldots) = z$$

$$U(z) = z/(z-1) = 1/(1-z^{-1})$$

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

Linearita

$$a.x(k) + b.y(k) \sim a.X(z) + b.Y(z)$$

Posun vpravo x(k).u(k)

$$x(k-n).u(k-n) \sim z^{-n}X(z)$$

Posun vpravo x(k)

$$x(k-1) \sim z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$x(k-2) \sim z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}.x(-1)$$

$$\vdots$$

$$x(k-n) \sim z^{-n}X(z) + x(-n) + z^{-1}.x(-n+1) + \ldots + z^{-n+1}.x(-1)$$

Je-li $x(m) = 0$ pro $m = -1, -2, \ldots., -n$, je

$$x(k-n) \sim z^{-n}X(z),$$

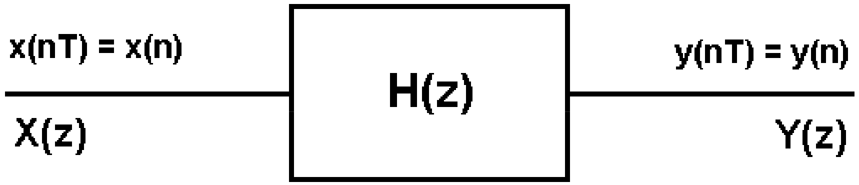
což je totéž jako pro $x(k-n).u(k-n)$.

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

Konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i).y(n-i) \approx X(z).Y(z)$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
PŘENOSOVÁ FUNKCE



$$y(nT) = h(nT)*x(nT)$$

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

H(z) = Y(z)/X(z), kde H(z) je racionální lomená funkce proměnné z^{-1} (**obrazová přenosová funkce**)

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
NULOVÉ BODY A PÓLY

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \qquad n \leq m$$

$$H(z) = A.\frac{z^{m-n} \prod_{i=1}^{n} (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^{m} (z - z_{pi})}$$

A – zesílení; z_{ni} … nulové body; z_{pi} … póly

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
DIFERENČNÍ ROVNICE

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_n z^{-m} + b_{n-1} z^{-m+1} + b_{n-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$(b_n z^{-n} + b_{n-1} z^{-n+1} + b_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + b_0).Y(z) = (a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0).X(z)$$

$$b_m Y(z).z^{-m} + b_{m-1} Y(z).z^{-m+1} + b_{m-2} Y(z).z^{-m+2} + \ldots + b_0.Y(z) =$$
$$= a_n X(z).z^{-n} + a_{n-1} X(z).z^{-n+1} + a_{n-2} X(z).z^{-n+2} + \ldots + a_0.X(z)$$

!!! za předpokladu nulových počátečních podmínek !!!

$$b_m y(iT - mT) + b_{m-1} y(iT - mT + T) + b_{m-2} y(iT - mT + 2T) + \ldots + b_0 y(iT) =$$
$$= a_n x(iT - nT) + a_{n-1} x(iT - nT + T) + a_{n-2} x(iT - nT + 2T) + \ldots + a_0 x(iT)$$

$$y(iT) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b_0}.x(iT - kT) - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{b_0}.y(iT - kT)$$

diferenční rovnice

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
FREKVENČNÍ PŘENOSOVÁ FUNKCE

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \qquad n \leq m$$

$$H(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_m}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \ldots + b_m}$$

$$z = \exp(j\omega T)$$

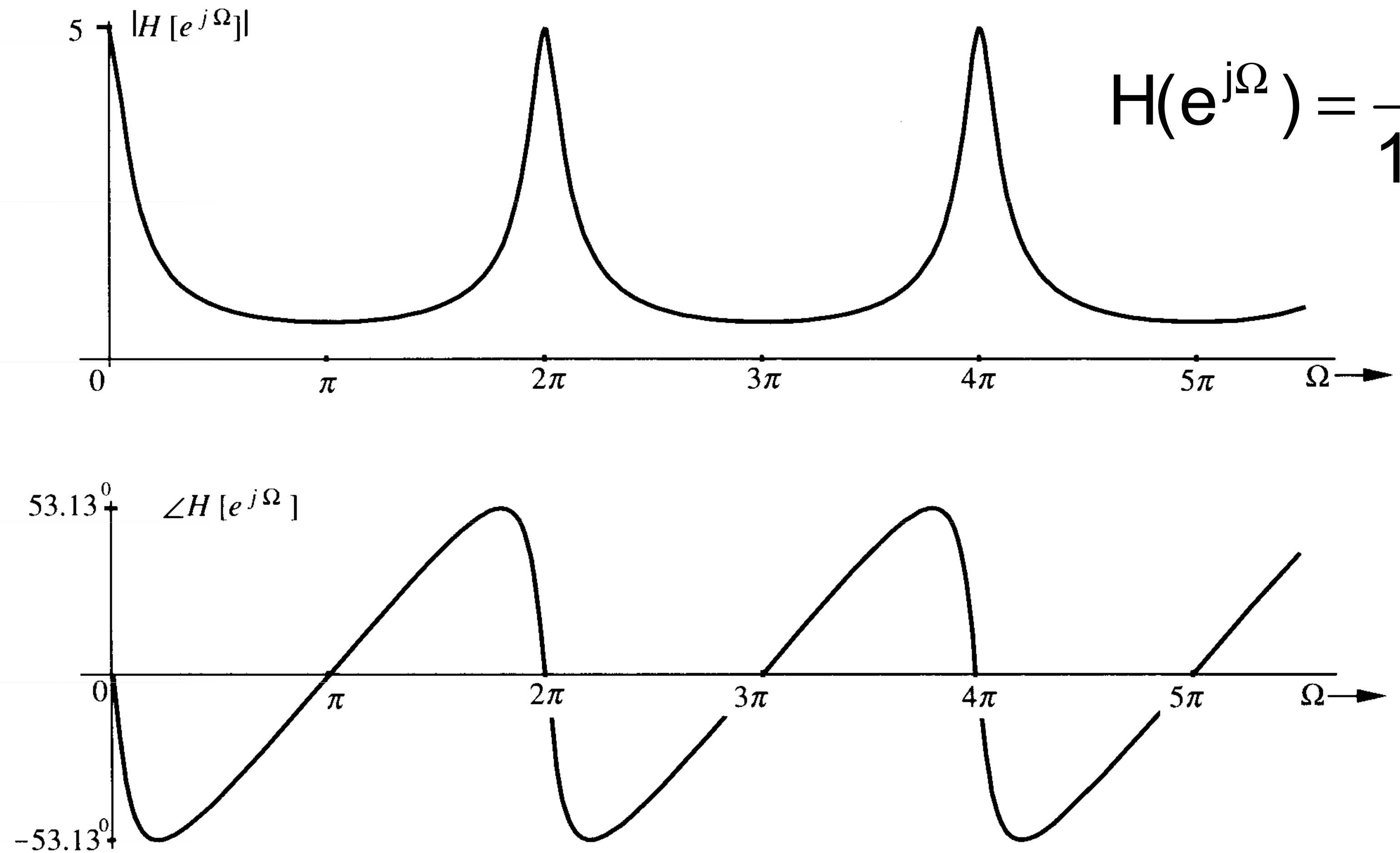
$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega m T} + a_1 e^{j\omega(m-1)T} + a_2 e^{j\omega(m-2)T} + \ldots + a_m e^{j\omega 0 T}}{b_0 e^{j\omega m T} + b_1 e^{j\omega(m-1)T} + b_2 e^{j\omega(m-2)T} + \ldots + b_m e^{j\omega 0 T}}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega mT} + a_1 e^{j\omega(m-1)T} + a_2 e^{j\omega(m-2)T} + \ldots + a_m e^{j\omega 0T}}{b_0 e^{j\omega mT} + b_1 e^{j\omega(m-1)T} + b_2 e^{j\omega(m-2)T} + \ldots + b_m e^{j\omega 0T}}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)|.e^{j\varphi}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY



$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-0{,}8.e^{-j\Omega}}$$

X.
VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

(DOKONČENÍ)

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

- ☑ diferenciální (diferenční) rovnice;
- ☑ operátorová přenosová funkce (Laplacova transformace, z transformace);
- ☑ rozložení nul a pólů;
- ☑ frekvenční přenosová funkce;
- ☑ frekvenční charakteristiky – amplitudová, fázová;

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

- ☑ diferenciální (diferenční) rovnice;
- ☑ operátorová přenosová funkce (Laplacova transformace, z transformace);
- ☑ rozložení nul a pólů;
- ☑ frekvenční přenosová funkce;
- ☑ frekvenční charakteristiky – amplitudová, fázová;
- ☑ impulsní charakteristika;
- ☑ přechodová charakteristika;

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

operátorová přenosová funkce

$H(p) = Y(p)/X(p)$ $\qquad$ $H(z) = Y(z)/X(z)$

$Y(p) = H(p).X(p)$ $\qquad$ $Y(z) = H(z).X(z)$

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau).s_2(t-\tau).d\tau \approx S_1(p).S_2(p)$$

konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i).y(n-i) \approx X(z).Y(z)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z).1$$

$$y(kT) = h(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z).1$$

$$y(kT) = h(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

Z-transformace jednotkového impulsu

$$\mathcal{Z}(\Delta(kT))=1$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$y(kT) = h(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z).\mathcal{Z}(\Delta(kT)))$$

odezva na jednotkový impuls -

- impulsová charakteristika

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p).\mathcal{L}(\delta(t)))$$

$$Y(p) = H(p) = \mathcal{L}(h(t) * \mathcal{L}^{-1}(1))$$

- ☑ impulsní charakteristika a přenosová funkce tvoří transformační pár Laplacovy (Z) transformace.
- ☑ impulsní charakteristika a frekvenční přenos tvoří transformační pár Fourierovy (DFT) transformace.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li přiveden na vstup signálu přiveden Diracův impulz, má systém reagovat na dvě nekonečně velké změny úrovně signálu v nekonečně krátkém intervalu.
- ☑ čím užší signál, tím širší spektrum – jednotkový impulz má nekonečně široké konstantní spektrum, takže přivedeme-li na vstup systému Diracův impulz, je situace ekvivalentní současnému přivedení úplné směsi harmonických signálů o frekvencích od 0 do ∞ Hz.
- ☑ takový signál není reálný systém schopen přenést bez deformace.
- ☑ impulsové charakteristice lze tedy rozumět jako systémem zdeformovaný Diracův impulz. Podle vlastností deformovaného výstupního signálu můžeme usuzovat na vlastnosti systému.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$ ($h(kT) = 0$ pro $k > k_0$) hovoříme o systému s konečnou impulsní charakteristikou (KIO – FIR);
- ☑ není-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$ ($h(kT) = 0$ pro $k > k_0$) hovoříme o systému s nekonečnou impulsní charakteristikou (NIO – IIR);

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

přechodová charakteristika =

= odezva systému na jednotkový skok

$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1/p$

$$Y(p) = G(p) = H(p).\mathcal{L}(\delta(t)) = H(p).1/p$$

$\mathcal{Z}(u(kT)) = 1/1\text{-}z^{-1} = z/(z-1)$

$$Y(z) = G(z) = H(z).z/(z-1)$$

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

- ☑ vstup – primární příčinou dynamiky systému;
- ☑ paměť – sekundární příčina dynamiky systému;

$$\Downarrow$$

dva základní typy experimentování se systémy

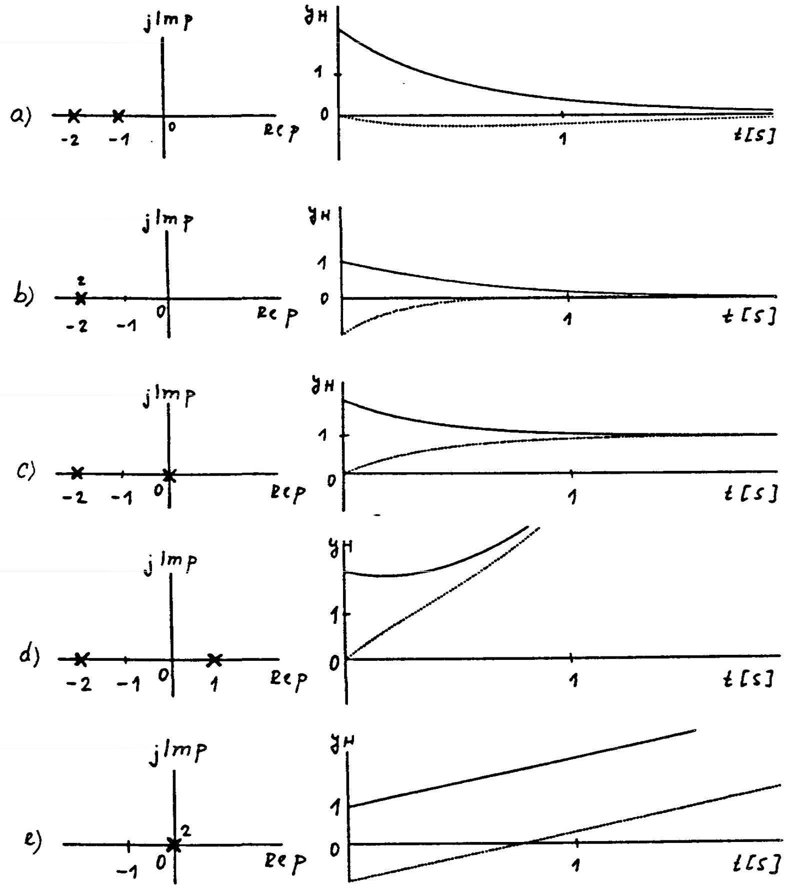
- ☑ zkoumání vlivu počátečního stavu;
- ☑ zkoumání vlivu vstupního signálu

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH
ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

- ☑ v čase t_0 se systém nachází vlivem své předcházející činnosti ve stavu $x(t_0)$ – fyzikální (chemické, biologické,…) počáteční podmínky;
- ☑ bez přivedeného vstupu analyzujeme chování systému – přirozená odezva systému (odezva na počáteční stav)

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU



Přirozená odezva systému 2. řádu pro různá rozložení reálných pólů a různé integrační konstanty C_1 a C_2. Plná čára: $C_1 = C_2 = 1$. Tečkovaná čára: $C_1 = -1$, $C_2 = 1$.

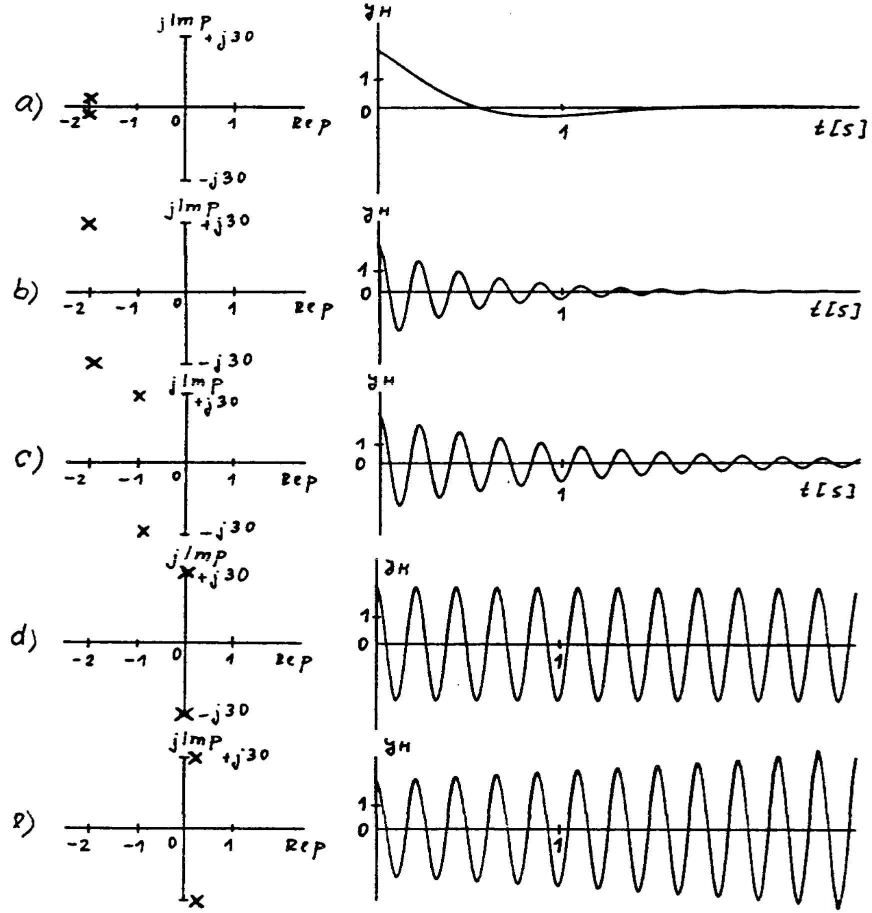
a) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

c) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2$

d) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\quad y_H(t) = C_1 + C_2 t$



Přirozená odezva systému 2. řádu pro různá rozložení komplexních pólů a integrační konstanty $C_1 = C_2 = 1$.

a) $\lambda_1 = -2 + j3, \lambda_2 = -2 - j3$ $\quad y_H(t) = 2e^{-2t}\cos(3t)$

b) $\lambda_1 = -2 + j30, \lambda_2 = -2 - j30$ $\quad y_H(t) = 2e^{-2t}\cos(30t)$

c) $\lambda_1 = -1 + j30, \lambda_2 = -1 - j30$ $\quad y_H(t) = 2e^{-t}\cos(30t)$

d) $\lambda_1 = j30, \lambda_2 = -j30$ $\quad y_H(t) = 2\cos(30t)$

e) $\lambda_1 = 0.2 + j30, \lambda_2 = 0,2 - j30$ $\quad y_H(t) = 2e^{0.2t}\cos(30t)$

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH
ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

Přirozená odezva –

- ☑ časem zaniká – asymptoticky stabilní systém vzhledem k počátečním podmínkám;
- ☑ ustálí se v konečných mezích (periodicky osciluje nebo je konstantní) – stabilní systém nebo systém na mezi stability vzhledem k počátečním podmínkám;
- ☑ neohraničeně roste – nestabilní systém vzhledem k počátečním podmínkám

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH
ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

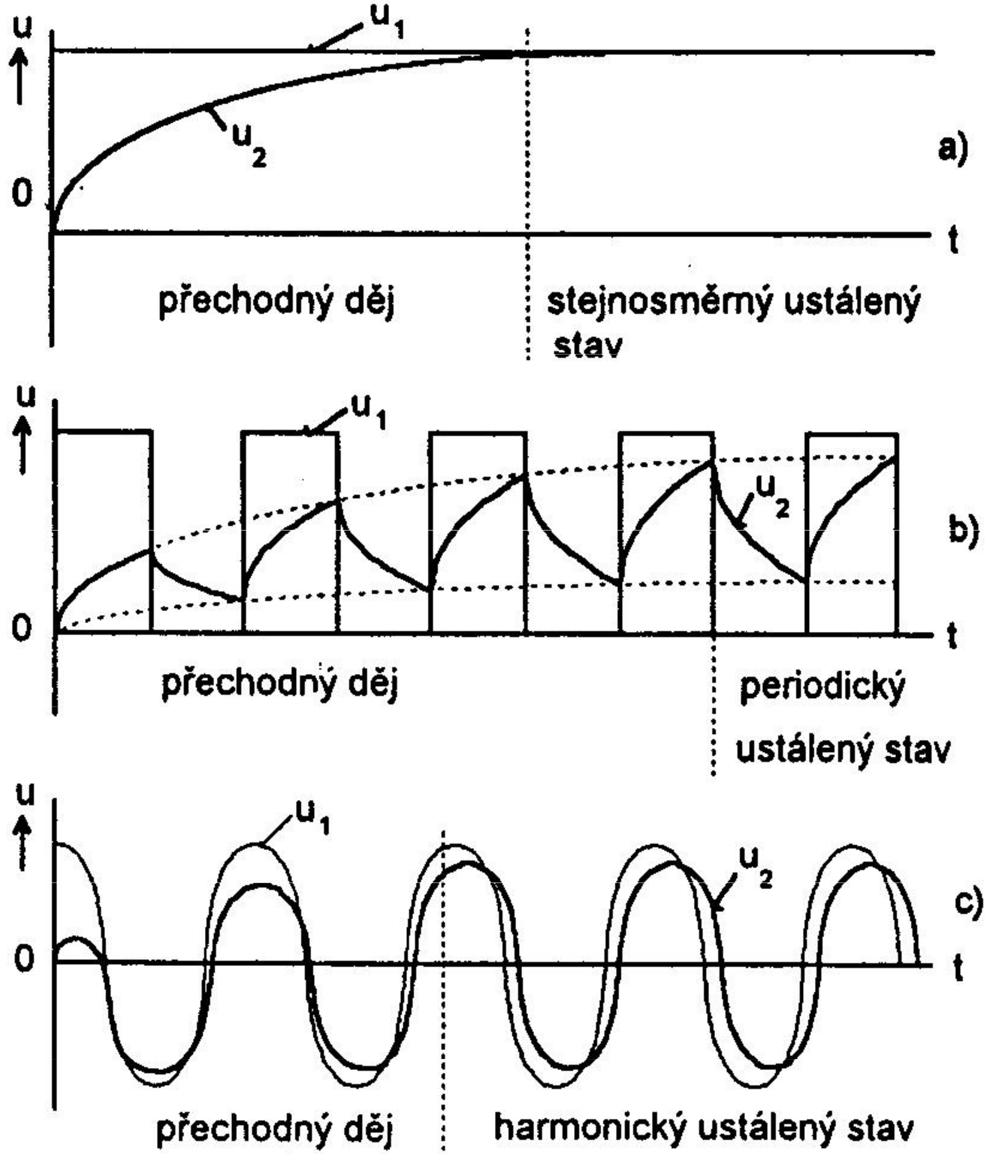
lze zjišťovat:

- ☑ dynamické vlastnosti (tvar přechodu do nového stavu - rychlost přechodu, monotónnost či kmitání, frekvence kmitání, apod.);
- ☑ linearitu (sledováním podobnosti odezev při různých počátečních stavech);
- ☑ stabilitu (sledováním konvergence);

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH
ZKOUMÁNÍ VLIVU VSTUPNÍHO SIGNÁLU

- systém se musí nacházet v nulovém počátečním stavu;
- odpověď systému při nulovém počátečním stavu – vnucená (vynucená) odezva;
- můžeme sledovat chování systému buzeného signály očekávaného průběhu – impulsová odezva, přechodová odezva, frekvenční charakteristika

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH
ZKOUMÁNÍ VLIVU VSTUPNÍHO SIGNÁLU



ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

- ☑ přechodný děj - popis chování systému z počátečního do koncového stavu
- ☑ ustálený stav - stav kdy zaniká pohyb systému (stejnosměrný ustálený stav) – není to v jediném okamžiku, ale v časovém intervalu
- ☑ rovnovážný stav - stabilní, nestabilní

celková odezva = přirozená odezva + vnucená odezva

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH