Nástraha druhá:
Vektory, průměty, složky, velikosti, ...
aneb Jak se vypořádat s řešením úloh?

Není žádným tajemstvím, že nezbytným krokem ke skutečnému pochopení a osvojení každé problematiky je řešení vhodně zvolených úloh. Překvapivou se ale může jevit skutečnost, že i ty *nejjednodušší* úlohy na aplikaci Newtonových zákonů v sobě skrývají jisté nástrahy, s nimiž se tradičně musejí vyrovnávat nejen studenti, ale i autoři učebnic. Jednou z nich je *vektorový charakter* Newtonových zákonů, který při řešení úloh klade nároky na důsledné rozlišování mezi vektory, jejich průměty, složkami a velikostmi.

Snad nejjednodušším myslitelným případem je ten, v němž vektory všech sil působících na dané těleso (v dalším je vždy budeme považovat za hmotný bod, aniž bychom to neustále znova zdůrazňovali) mají stejný směr, tj. liší se nanejvýš velikostí a orientací. Situaci přiblížíme na následující řešené úloze.

Úloha 1.:

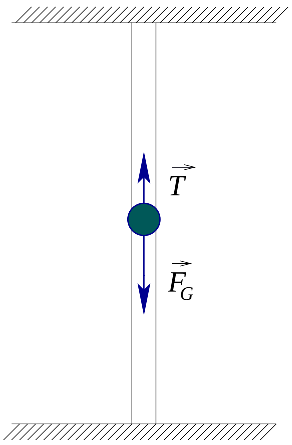
Požárník o hmotnosti 72 kg sjíždí dolů po svislé tyči se zrychlením o velikosti $3,0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Jaká je velikost

(a) svislé síly, jíž působí tyč na požárníka,

(b) svislé síly, jíž působí požárník na tyč?

(Převzato z [4.].)

Řešení:



Obrázek 1: Silový diagram pro požárníka

Zanedbáme-li odpor vzduchu, působí na požárníka pouze dva objekty: Země tíhovou silou[1] $\vec{F}_G$ a tyč silou $\vec{T}$ (viz Obrázek 1; myšlenka silového diagramu je převzata z [4.]). Druhý Newtonův zákon pro požárníka má tvar

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{T}\,,$$

zohledněním orientace působících sil a vektoru zrychlení pak

$$ma = F_G - T \quad \Longrightarrow \quad T = F_G - ma = m\,(g - a) = 504\,\mathrm{N}\,.$$

Tyč tedy působí na požárníka svislou silou o velikosti 504 N orientovanou vzhůru. Podle třetího Newtonova zákona působí požárník na tyč silou stejně velikou opačně orientovanou.

Kontrolní otázky:

1. Mohli bychom ze zadaných údajů určit velikost síly, jíž působí tyč na požárníka v případě, že odpor vzduchu nebude zanedbatelný? Vysvětlete.
2. Jaký charakter má síla, jíž působí tyč na požárníka? Kde je její působiště? Co by se stalo, kdyby požárník neměl při sjezdu rukavice? ◇

[1] Podrobnější diskuze k tíhové síle a k tíhovému poli Země viz ***Nástraha pátá***.

S předchozí jednoduchou úlohou si lze poradit, aniž bychom v průběhu řešení explicitně rozlišovali mezi silami (*vektory*) a jejich složkami (*skaláry*). Jinak tomu již bude v situacích, kdy vektory jednotlivých sil působících na těleso stejný směr nemají. Jak tedy takovou úlohou rychle, bezpečně a systematicky projít? Určitě nic nepokazíme, budeme-li se, alespoň pro začátek, držet následujícího "scénáře".

Postup při řešení úloh na aplikaci Newtonových zákonů:

1. Volba vztažné soustavy, v níž budeme úlohu řešit (např. *inerciální vztažná* soustava spojená se Zemí (tzv. laboratorní vztažná soustava), *neinerciální vztažná soustava* spojená s rozjíždějícím se výtahem, ...).
2. Výčet *všech* sil včetně uvedení objektů, které na dané těleso těmito silami působí, a nákres situace.
3. Formulace druhého Newtonova zákona pro dané těleso ve vektorovém tvaru.
4. Volba vhodné soustavy souřadnic a v ní zápis složek
   (a) vektorů jednotlivých sil, které na těleso působí,
   (b) vektoru zrychlení tělesa (tzv. *vazební podmínka* omezující pohyb tělesa, např. na vodorovnou nebo nakloněnou podložku; srv. též s ***Nástrahou třetí***).
5. Zápis druhého Newtonova zákona pro těleso (viz bod **3.**) ve složkách.
6. Formulace *silových zákonů* (viz ***Hlavní text***) pro ty z působících sil, u nichž existuje.
7. Řešení soustavy rovnic pro hledané neznámé (např. složky nebo velikosti sil, velikost zrychlení tělesa).
8. Interpretace a diskuze výsledků.

Než přistoupíme k ukázce aplikace tohoto "scénáře" na konkrétní úlohu, uveďme nejdůležitější fakta, jimiž bylo jeho zformulování motivováno. Především jde o skutečnost, že studenti, kteří se s problematikou teprve seznamují, by měli být vedeni k systematickému, dobře sledovatelnému a kontrolovatelnému přístupu k řešení úloh. Vhodně zvoleným a logicky navazujícím pořadím jednotlivých kroků řešení úlohy lze také omezit počet nejrůznějších omylů, nepřesností či nedůsledností, podporovaných již tradičně ne příliš zdařilým učebnicovým zpracováním ([18.]). Důraz zde proto klademe na

- schopnost rozlišovat mezi řešením téže úlohy z pohledu pozorovatele v inerciální vztažné soustavě a z pohledu pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě (viz bod **1.** a bod **2.**), která se opírá o důkladné pochopení rozdílu mezi *reálnými* a *fiktivními* (*setrvačnými*) silami (srv. též s ***Nástrahou pátou***),
- výčet a nákres *všech* působících sil (viz bod **2.**): rozhodně tedy ne *jen některých* — v dané chvíli více či méně "rozhodujících" — sil, jak jsme zvyklí vídat na stránkách učebnic,
- rozlišování mezi (viz bod **4.**)
  - silami (*vektory*), průměty sil (*vektory*), složkami sil (*skaláry*, zde libovolná (tedy i záporná!) reálná čísla opatřená jednotkou) na straně jedné a velikostmi sil, velikostmi průmětů sil a velikostmi složek sil (*skaláry*, zde *pouze nezáporná*(!) reálná čísla opatřená jednotkou) na straně druhé;

    (dodejme, že učebnicový zvyk kreslit do téhož obrázku graficky stejným stylem síly i jejich význačné průměty (např. průmět tíhové síly do směru nakloněné roviny a do směru kolmého) vede například k tomu, že čtenář se nemusí ubránit dojmu, že "průmět síly je jednou z působících sil", nebo podobně, že "na sedačku řetízkového kolotoče působí tíhová síla Země, tahová síla řetězů a dostředivá síla" (srv. též s ***Nástrahou pátou***)),

  - jednotlivými působícími silami a jejich *výslednicí*,
  - silami, jejichž velikost a směr určuje *silový zákon* (viz bod **6.**) (např. tíhová síla, dynamická třecí síla) a silami, jejichž velikost určujeme z Newtonových zákonů doplněných o *vazební podmínky* (viz bod **4.**) (např. tlaková síla vodorovné nebo nakloněné podložky, statická třecí síla; srv. též s ***Úlohou 2.*** a s ***Nástrahou třetí***),

- interpretaci výsledků (viz bod **8.**), tj. například uvedení velikosti, směru a orientace hledané síly nebo zrychlení, a diskuzi výsledků, například uvedení podmínek, za nichž je pohyb tělesa zrychlený či zpomalený, za nichž má úloha smysl, atd.

Nyní již přejděme k aplikaci formulovaného "scénáře" na řešení jednoduché, i když ne zcela triviální úlohy (různé varianty jejího zadání se objevují také v [4.]).

Úloha 2.:

Dítě táhne po vodorovné podložce sáňky o hmotnosti m stálou silou $\vec{F}$, která svírá s rovinou podložky úhel α. Koeficient dynamického tření mezi sáňkami a podložkou je f, odpor vzduchu zanedbáváme.

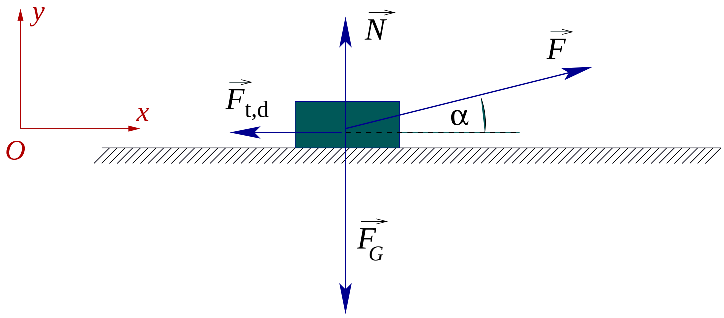
(a) S jakým zrychlením se pohybují sáňky?

(b) Jakou silou působí podložka na sáňky?

(c) Určete výslednou sílu, která na sáňky působí.

Řešení:

(a) Úlohu budeme řešit v inerciální vztažné soustavě spojené se Zemí. Na sáňky působí tři objekty: dítě silou $\vec{F}$, Země tíhovou silou $\vec{F}_G$ a konečně podložka tlakovou silou $\vec{N}$ a dynamickou třecí silou $\vec{F}_{\mathrm{t,d}}$ (viz Obrázek 2).



Obrázek 2: Silový diagram pro sáňky

Druhý Newtonův zákon pro sáňky má tedy tvar

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{\mathrm{t,d}} \,.$$

S ohledem na směry jednotlivých vektorů vystupujících ve druhém Newtonově zákoně je nejvýhodnější zvolit kartézskou soustavu souřadnic $\langle O; x, y\rangle$ tak, že osa x je vodorovná, orientovaná souhlasně s vektorem zrychlení sáněk, a osa y je svislá (viz Obrázek 2). Jednotlivé vektory sil mají v této soustavě souřadnic složky

$$\vec{F} = (F\cos\alpha, F\sin\alpha)\ , \qquad \vec{F}_G = (0, -F_G)\ , \qquad \vec{N} = (0, N)\ , \qquad \vec{F}_{\mathrm{t,d}} = (-F_{\mathrm{t,d}}, 0)\ ,$$

vektor zrychlení má s uvážením vazební podmínky (sáňky se pohybují pouze ve vodorovném směru) složky

$$\vec{a} = (a, 0)\ .$$

Kontrolní otázky:

1. Jak by vypadal složkový zápis jednotlivých vektorů, kdybychom zavedli *trojrozměrnou* kartézskou soustavu souřadnic $\langle O; x, y, z\rangle$ s osami x a y zvolenými výše uvedeným způsobem?
2. Jak by se změnil složkový zápis jednotlivých vektorů, kdyby byla soustava souřadnic oproti soustavě souřadnic $\langle O; x, y, z\rangle$ zavedené v bodě 1. otočena o úhel φ? (Uvědomte si, že otázka je položena velmi obecně, a proto je nutné zvažovat různé možnosti otočení soustavy souřadnic[2].)
3. Kde mají působiště jednotlivé síly působící na sáňky? Dopustili jsme se chyby, když jsme je v Obrázku 2 zakreslili do téhož bodu? Vysvětlete.

Druhý Newtonův zákon rozepsaný do složek

$$\begin{aligned} x: &\qquad ma = F\cos\alpha - F_{\mathrm{t,d}}\,,\\ y: &\qquad 0 = F\sin\alpha - F_G + N \end{aligned}$$

doplníme silovým zákonem pro velikost tíhové síly $F_G = mg$ a silovým zákonem pro velikost dynamické třecí síly $F_{\mathrm{t,d}} = fN$. Získáme tak soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x: &\qquad ma = F\cos\alpha - fN\,,\\ y: &\qquad 0 = F\sin\alpha - mg + N \end{aligned}$$

pro dvě neznámé N a a (velikost tlakové síly podložky a velikost zrychlení sáněk). Z druhé rovnice vychází

$$N = mg - F\sin\alpha\,,$$

po dosazení do první rovnice pak

$$a = \frac{F\cos\alpha - f\,(mg - F\sin\alpha)}{m}\,.$$

Pro úplnost zdůrazněme, že pro velikost N tlakové síly podložky *neexistuje silový zákon*. Výsledek, ke kterému jsme zde dospěli, je důsledkem platnosti druhého Newtonova zákona a *vazební podmínky* omezující pohyb sáněk na vodorovnou rovinu.

(b) Síla $\vec{F}_{\mathrm{p}}$, jíž působí podložka na sáňky, je určena vektorovým součtem tlakové síly podložky a dynamické třecí síly, tj.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathrm{p}} &= \vec{N} + \vec{F}_{\mathrm{t,d}} = (-F_{\mathrm{t,d}}, N) = (-fN, N) = (-f\,(mg - F\sin\alpha)\,, mg - F\sin\alpha)\ ,\\ F_{\mathrm{p}} &= (mg - F\sin\alpha)\sqrt{1+f^2}\,. \end{aligned}$$

(c) Konečně, výsledná síla $\vec{F}_{\mathrm{v}}$ působící na sáňky je dána vektorovým součtem *všech* působících sil, tj.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\mathrm{v}} &= \vec{F} + \vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_{\mathrm{t,d}} = m\vec{a} = (ma, 0) = (F\cos\alpha - f\,(mg - F\sin\alpha), 0)\ ,\\ F_{\mathrm{v}} &= F\cos\alpha - f\,(mg - F\sin\alpha)\,. \end{aligned}$$

[2] K zadání jakékoli úlohy je vždy dobré přistupovat kriticky: zde je například obecnost otázky záměrná a implicitně vybízí k samostatnému detailnímu rozboru všech možností, jindy je ve hře hledání kompromisu mezi (jasnou) stručností a (košatou) přesnou formulací, také ale může jít o povrchnost či pochybení zadavatele.

Diskuze výsledků:
Ze vztahu pro velikost tlakové síly podložky je zřejmé, že zadání úlohy dává smysl pouze pro hodnoty veličin m, F a α splňující podmínku

$$N = mg - F\sin\alpha \geq 0\,.$$

Ze vztahu pro velikost zrychlení pak plyne další podmínka kladená na tyto veličiny

$$a = \frac{F\cos\alpha - f\,(mg - F\sin\alpha)}{m} \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad F\cos\alpha - f\,(mg - F\sin\alpha) \geq 0\,. \qquad \diamondsuit$$

Otázky, cvičení a náměty k přemýšlení:

1. Je pro dítě z ***Úlohy 2.*** snazší sáňky táhnout, nebo tlačit? (Předpokládejte, že vektor jeho síly svírá s vodorovnou podložkou v obou případech tentýž úhel α.) Odpověď založenou na bezprostřední praktické zkušenosti prověřte výpočtem práce, kterou dítě v obou případech na stejné dráze vykoná.

2. Řešte ***Úlohu 2.*** pro případ, kdy dítě táhne sáňky do kopce s úhlem sklonu β.

3. Vyjmenujte a zakreslete všechny síly, které působí na dítě z ***Úlohy 2.*** Jaká je výslednice těchto sil? (Srv. též s ***Nástrahou třetí.***)

4. Vyjmenujte a zakreslete všechny síly, které působí

(a) na člověka sedícího na gymnastickém míči,
(b) na člověka pohodlně usazeného v křesle,
(c) na člověka relaxujícího v napuštěné vaně.

Jaká je v jednotlivých případech výslednice jednotlivých sil? (Srv. též s ***Nástrahou třetí.***)

5. Na vlákně, které může být namáháno nejvýše silou o velikosti F, je ve svislém směru zvedáno těleso o hmotnosti m. S jakým zrychlením se těleso může pohybovat?

6. Ve dvojrozměrné přetahované se tři děti, Aleš, Božena a Cyril, přetahují o pneumatiku. Pneumatika je v klidu, přestože na ni v jedné rovině působí tři síly. Aleš táhne silou $\vec{F}_{\mathrm{A}}$ o velikosti 220 N a Cyril silou $\vec{F}_{\mathrm{C}}$ o velikosti 170 N. Jakou silou $\vec{F}_{\mathrm{B}}$ působí na pneumatiku Božena, jestliže vektory $\vec{F}_{\mathrm{A}}$ a $\vec{F}_{\mathrm{B}}$ svírají úhel 137°? (Převzato z [4.].)

Vyzkoušejte, jaký vliv má různá volba soustavy souřadnic na eleganci řešení úlohy (viz bod **4.** a **7.**). Závisí na této volbě výsledek? Pokud ano, jak? (Vysvětlete.) Jaká volba soustavy souřadnic je s ohledem na jednoduchost početního postupu nejvýhodnější?

7. Vysvětlete rozdíl mezi vektorem, jeho průměty do zvolených souřadnicových os, jeho složkami ve zvolené soustavě souřadnic, velikostí vektoru, velikostmi jeho průmětů a velikostmi jeho složek. Které z těchto údajů se změní, zvolíme-li soustavu souřadnic jinak? Závisí uvedené údaje na umístění počátku soustavy souřadnic? Zdůvodněte.

8. Rozhodněte, které z následujících zápisů

(A) jsou zcela jistě nesprávné,
(B) by za jistých (jakých?) okolností mohly být správné.

Odpovědi podrobně zdůvodněte.

(a) $\vec{a} = 1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\,,$

(b) $F = 10\,,$

(c) $\vec{F} = \left(\vec{F}\cos\alpha, \vec{F}\sin\alpha\right)\,,$

(d) $a = 3\,,$

(e) $\vec{F}_G + \vec{F} = m\vec{a}\,,$

(f) $\vec{F}_G = mg\,,$

(g) $\vec{F}_G + \vec{F} = 0\,,$

(h) $F = -10\,\mathrm{N}\,,$

(i) $\vec{F}_G - \vec{F} = m\vec{a}\,,$

(j) $\vec{F} = (0, F)\,.$

****

Příbuzné texty:

- ▷ ***Hlavní text***
- ▷ ***Nástraha první:***
  Není pohyb jako pohyb aneb Kinematika jako zahřívací předkolo
- ▷ ***Nástraha třetí:***
  Rozumíme silám tření? aneb K čemu slouží vazební podmínky?
- ▷ ***Nástraha čtvrtá:***
  Dynamika křivočarého pohybu aneb Jak se vyhnout tradičním omylům?
- ▷ ***Nástraha pátá:***
  Výtahy, vlaky, kolotoče, ... aneb Co náš čeká v neinerciálních soustavách?
- ▷ ***Nástraha šestá:***
  Když se sejde více částic aneb Mechanika tuhého tělesa
- ▷ ***Nástraha sedmá:***
  Zákony zachování aneb "Není nutné vědět o všem..."
- ▷ ***Nástraha osmá:***
  Vody stojaté i tekoucí aneb Mechanika kapalin
- ▷ ***Nástraha devátá:***
  Když Newtonovy zákony nestačí aneb Termodynamika a statistická fyzika v kostce
- ▷ ***Nástraha desátá — bonusová:***
  Příliš těžké ??? aneb Několik úloh "s hvězdičkou"