Opakování

i) Některé žertovné příklady:
různé pohyby v tíhovém poli (znám zrychlení, chci určit pohyb),
pohyb po kružnici (rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený,…),
tečné a normálové zrychlení u šikmého vrhu
kmitání, …
šroubovice, simulace

polohový vektor

derivace!

okamžitá rychlost

derivace!

okamžité zrychlení

Umím-li derivovat, je tento směr postupu radostný!

(Neumím-li ale derivovat, je i tento směr postupu neradostný!)

okamžité zrychlení

+ poč. podmínky

okamžitá rychlost

Integrace!

polohový vektor

Integrace!

+ poč. podmínky

Umím-li derivovat, měl bych umět i integrovat, a pak je i tento směr postupu radostný!

(Neumím-li ale derivovat, asi neumím ani integrovat, pak je i tento směr postupu velmi neradostný!)

Pohyb v tíhovém poli

DÚ!

Šikmý vrh, dolet, max. výška, atd

Křivočarý pohyb

křivost křivky a tečna ke křivce

zrychlení

celkové

tečné

normálové

hlavní normála

binormála

Simulace šroubovice

Pohyb po kružnici lehce a radostně:

definice velikosti úhlové rychlosti (rychlost změny úhlu)

souvislost velikosti úhlové rychlosti s velikostí rychlosti

souvislost velikosti úhlové rychlosti s velikostí rychlosti

rychlost je vektor, polohový vektor je vektor:

?

úhlové veličiny jsou také veličiny vektorové?

konečná rotace o úhel kolem některé osy

není vektor!

nekonečná malá rotace o úhel kolem některé osy

je vektor!

?

Několik **konečných** rotací (např. o úhel 90 stupňů) kolem dvou různých os

obrázky

Výsledek: záleží na pořadí, v jakém provedeme jednotlivá otočení, tj. operace sčítání konečných rotací není komutativní, nejedná se tedy o vektory

Několik rotací o **nekonečně malý úhel** kolem dvou různých os:

Výsledek: nezáleží na pořadí, v jakém provedeme jednotlivá otočení, jedná se tedy o vektory

Pohyb po kružnici lehce a radostně:

úhlová poloha, změna úhlové polohy, průměrná úhlová rychlost, okamžitá úhlová rychlost, průměrné úhlové zrychlení, okamžité úhlové zrychlení.

vztah mezi rychlostí, úhlovou rychlostí a polohovým vektorem

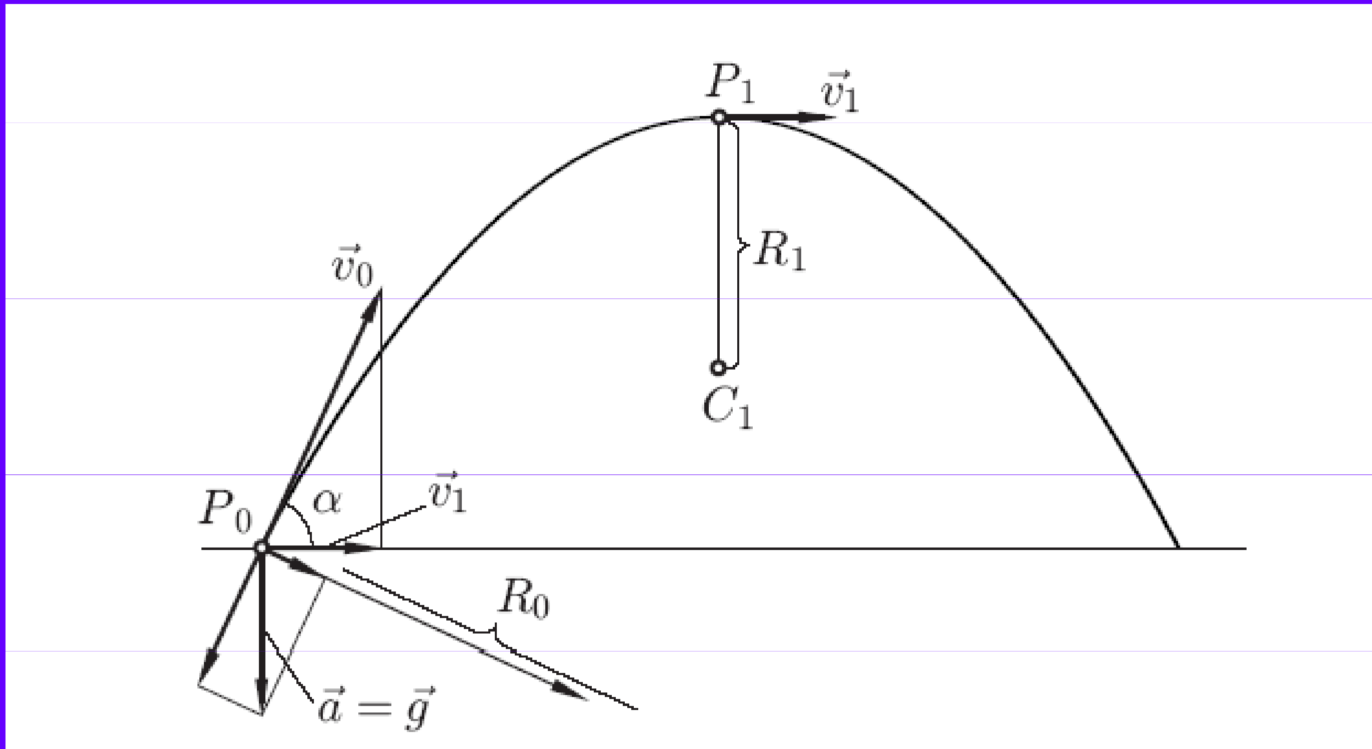
zrychlení při pohybu po kružnici, tečné a dostředivé

Simulace pohybu po kružnici

Křivost trajektorie (na příkladu šikmého vrhu)

Křivost trajektorie (na příkladu šikmého vrhu)

Malé těleso (hmotný bod) má v bodě P_0 na povrchu Země rychlost $\vec{v}_0$ o velikosti $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$, která svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 60°$. Odpor vzduchu je zanedbatelný



Určete:

1. Zrychlení hmotného bodu v bodě P_0;
2. Zakreslete tečné a normálové zrychlení v bodě P_0;
3. Zakreslete poloměr křivosti R_0 trajektorie (paraboly) v bodě P_0;
4. Zakreslete poloměr křivosti R_1 trajektorie v jejím nejvyšším bodě.

Křivost trajektorie (na příkladu šikmého vrhu)

1. $\vec{a} =?$, $\vec{a} = \vec{g}$, $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$,

2. $\vec{a}_\mathrm{t} =?$ směr viz obr. 2.14; velikost $a_\mathrm{t} = g \sin\alpha = \ldots = 8{,}67\,\mathrm{m/s}^2$; $\vec{a}_\mathrm{n} =?$ směr viz obr. velikost $a_\mathrm{n} = g\cos\alpha = \ldots = 5\,\mathrm{m/s}^2$;

3. $R_0 =?$ $a_\mathrm{n} = \frac{v_0^2}{R_0} \rightarrow R_0 = \frac{v_0^2}{a_\mathrm{n}} = \ldots = 180\,\mathrm{m}$;

4. $R_1 =?$ $a_\mathrm{n} = \frac{v_1^2}{R_1}$, kde $a_\mathrm{n} = g$. Během pohybu je vodorovná složka zrychlení $\vec{a} = \vec{g}$ rovna nule, platí tedy $\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0$. Je tedy $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} =$ konst., tj. vodorovná složka rychlosti je stálá. Tedy $v_1 = v_0 \cos\alpha = \ldots = 15\,\mathrm{m/s}$. Odtud $R_1 = v_1^2/g \ldots = 22{,}5\,\mathrm{m}$.

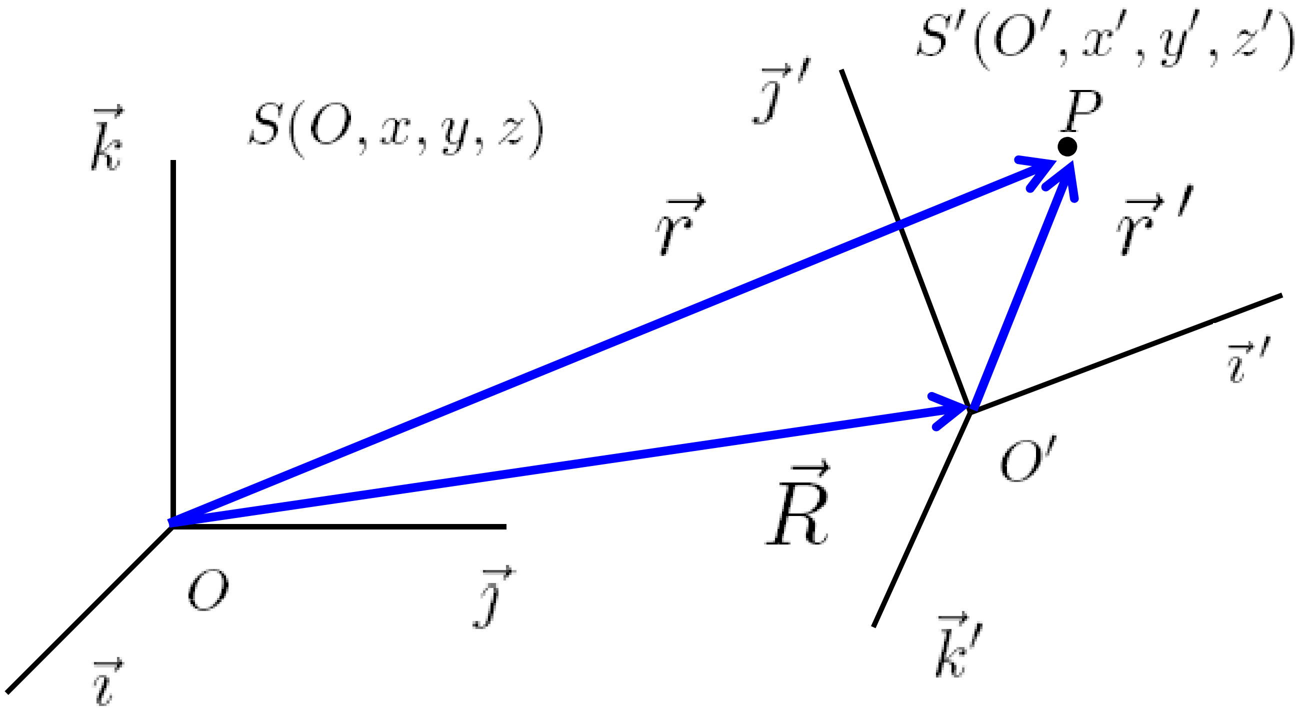
Pohyb po šroubovici, DÚ

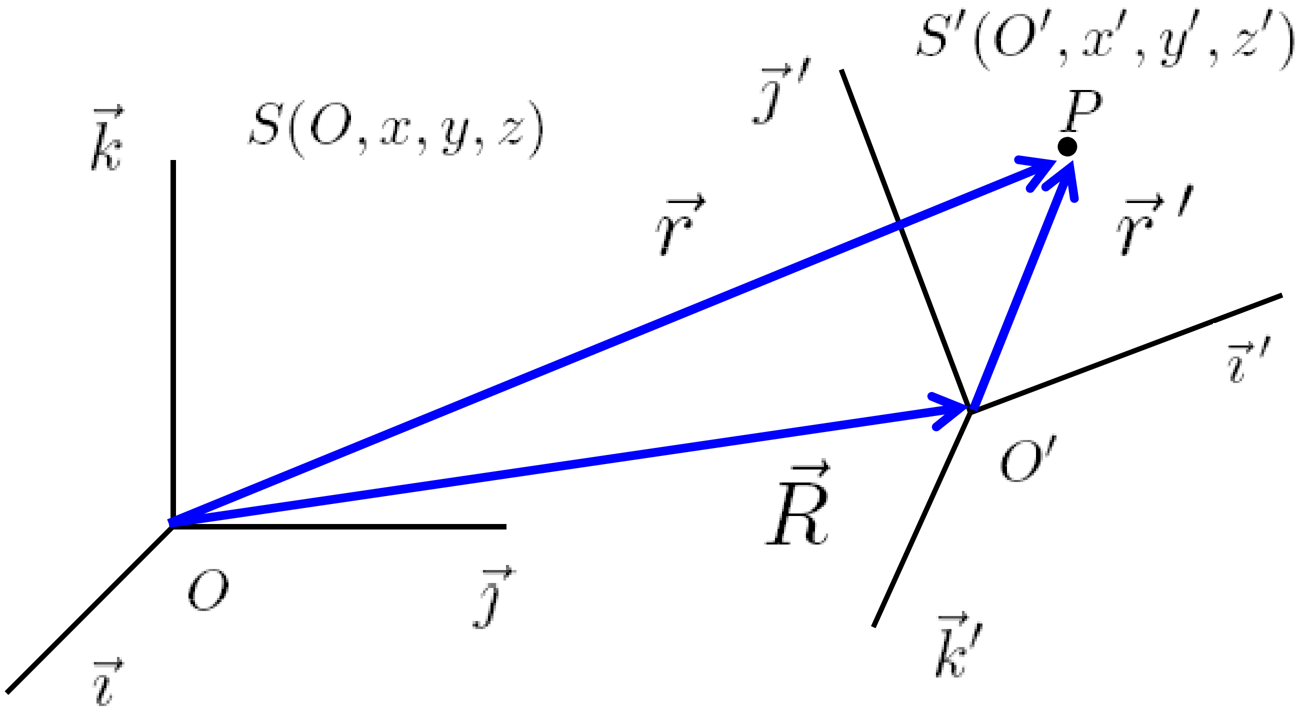
Popis pohybu v různých vztažných soustavách

soustava fixní (fix) $S(O, x, y, z)_{\text{fix}}$

soustava pohybující se (vůči fixní), označme ji jako (rot) soustava fixní (fix) $S(O, x, y, z)_{\text{fix}}$

soustava pohybující se (vůči fixní), označme ji jako (rot)





$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

Otázka:

je změna polohy bodu v soustavě fixní (fix)

$$(\mathrm{d}\vec{r}\,')_{\mathrm{fix}}$$

rovna

změně polohy v soustavě pohybující se (tj. v rot)?

? $(\mathrm{d}\vec{r}\,')_{\mathrm{rot}}$?

Bod P se vůči pohybující se soustavě (rot) nepohybuje

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}}$$

Najděme $(\mathrm{d}\vec{r}\,')$ v soustavě (fix), tj. $(\mathrm{d}\vec{r}\,')_{\mathrm{fix}}$

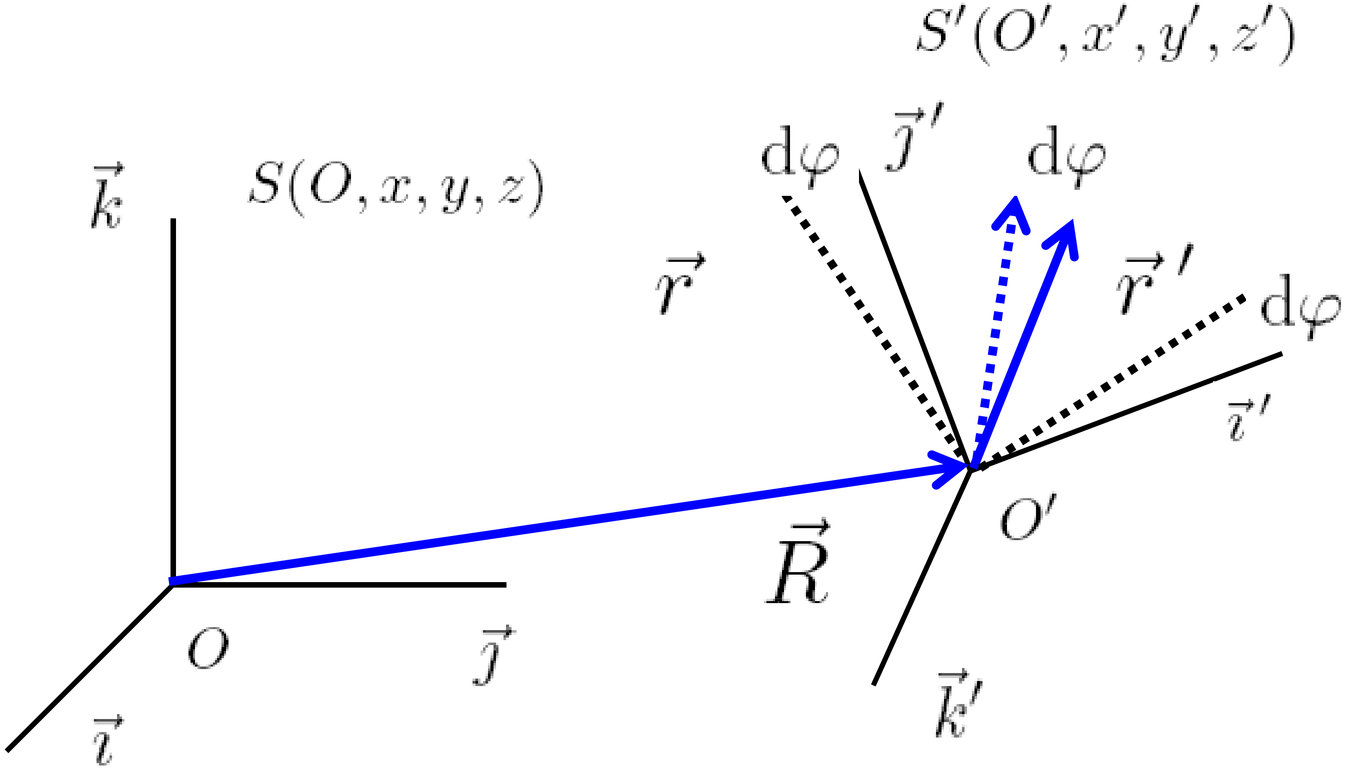
malá jednoduchá otázka: Čemu se rovná $(\mathrm{d}\vec{r}\,')_{\mathrm{rot}}$??

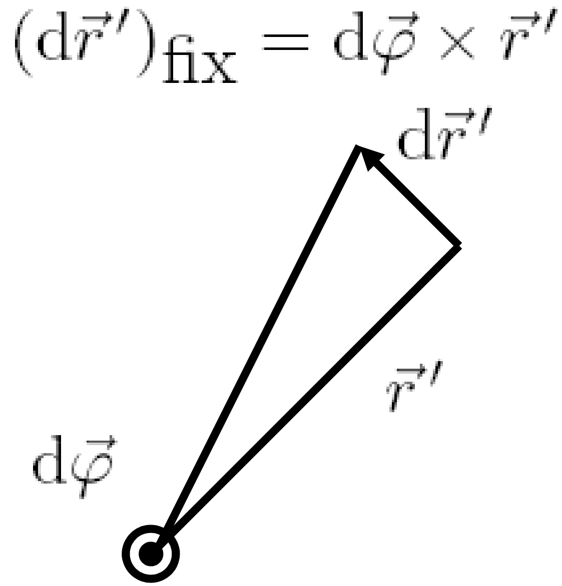
správná odpověď zní: nule

Odvození vztahu (následuje)

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

Otočí-li se soustava (rot) vůči soustavě (fix) kolem okamžité osy otáčení (např. kolem osy $\vec{k}\,'$) o úhel $\mathrm{d}\varphi$, tj. $\mathrm{d}\varphi\,\vec{k}\,'$, změní se poloha bodu P ve fixní soustavě o $(\mathrm{d}\vec{r}\,')_{\text{fix}} = \mathrm{d}\vec{\varphi} \times \vec{r}\,'$





pro nekonečně malou časovou změnu pak platí:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}\right) \times \vec{r}\,' = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

Bod P se vůči pohybující se soustavě (rot) nepohybuje

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}\right) \times \vec{r}\,' = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

Bod P se vůči pohybující se soustavě (rot) pohybuje

? $$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$?

Odvození přímou derivací:

Pro libovolný vektor musí platit

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{Q}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{Q}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}$$

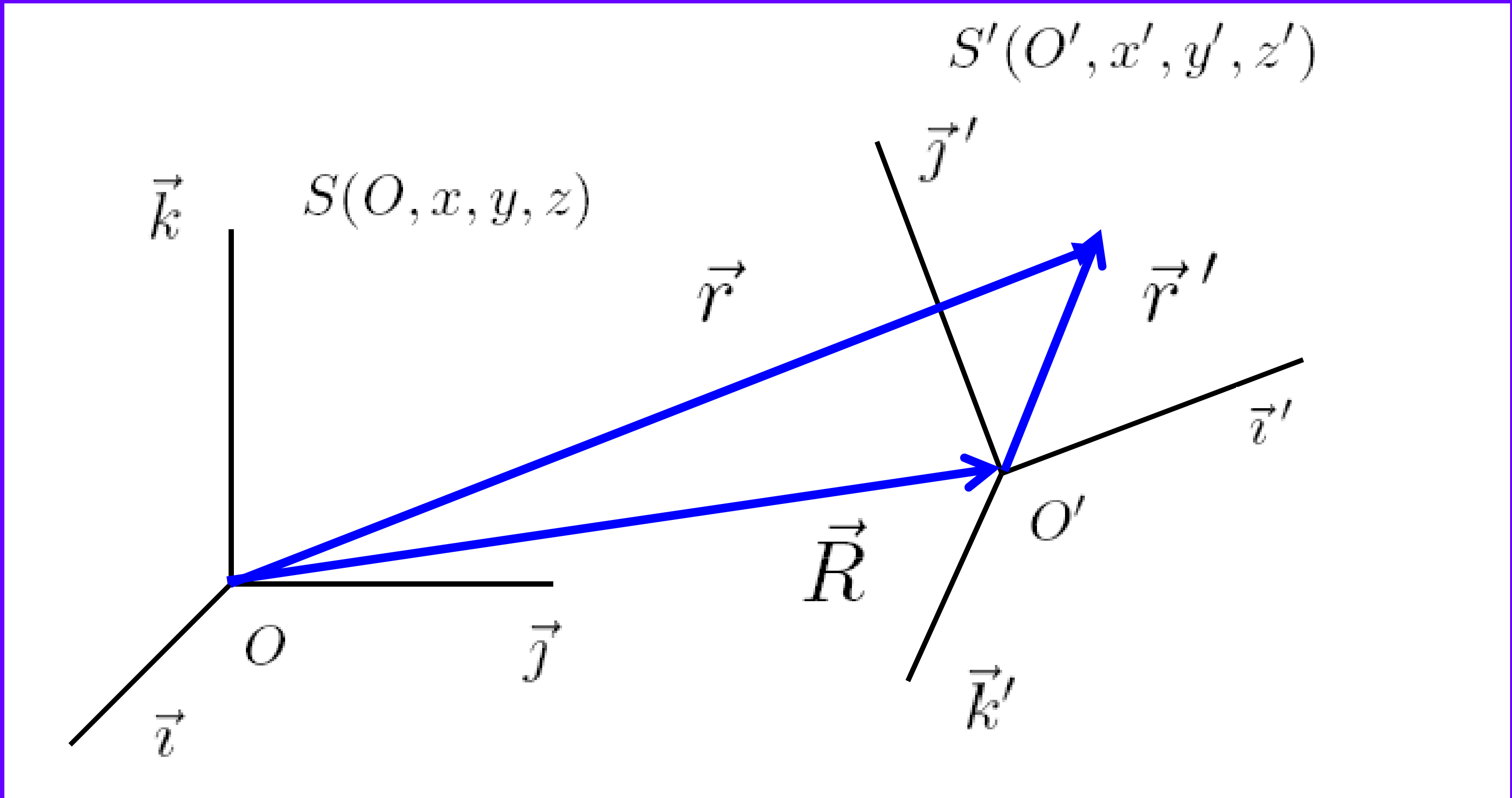
Je-li $\vec{Q} = \vec{\omega}$ pak

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} + \vec{0} \equiv \dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$$

Tedy úhlové zrychlení je popsáno stejným vektorem jak v soustavě (fix), tak v soustavě (rot).

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{Q}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{Q}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}$$

Rovnici lze úspěšně použít k odvození rychlosti bodu *P* vyjádřenou v soustavě fix:



$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

$$\vec{v}_{\mathrm{fix}} \equiv \dot{\vec{r}}_{\mathrm{fix}} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}}$$

$$\vec{V} \equiv \dot{\vec{R}}_{\mathrm{fix}} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{fix}}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{rot}} \equiv \dot{\vec{r}}\,'_{\mathrm{rot}} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}}$$

Můžeme psát:

$$\vec{v}_{\mathrm{fix}} = \vec{V} + \vec{v}_{\mathrm{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

$\vec{v}_{\mathrm{fix}}$ je rychlost bodu P vzhledem k fixní soustavě

$\vec{V}$ je rychlost počátku rotující soustavy O' vzhledem k fixní soustavě

$\vec{v}_{\mathrm{rot}}$ je rychlost bodu P vzhledem k rotujícím osám

$\vec{\omega}$ je úhlová rychlost rotující soustavy (vzhledem k fixní soustavě)

$\vec{\omega} \times \vec{r}\,'$ je rychlost způsobená rotací pohybující se soustavy

Jaké bude zrychlení v pohybující se soustavě?

$$\vec{v}_{\text{fix}} = \vec{V} + \vec{v}_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\text{fix}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{fix}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\text{rot}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{fix}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{fix}}$$

$$\ddot{\vec{R}}_{\text{fix}} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{fix}}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\text{rot}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{fix}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\text{rot}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}}$$

$$\vec{\omega} \times \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{fix}} = \vec{\omega} \times \left[\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right]$$

$$\left(\frac{d\vec{v}_{\text{fix}}}{dt}\right)_{\text{fix}} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{fix}} + \left(\frac{d\vec{v}_{\text{rot}}}{dt}\right)_{\text{fix}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{\text{fix}}$$

$$\ddot{\vec{R}}_{\text{fix}} \equiv \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{fix}}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}_{\text{rot}}}{dt}\right)_{\text{fix}} = \left(\frac{d\vec{v}_{\text{rot}}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}}$$

$$\vec{a}_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}}$$

$$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,'$$

$$\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right)_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right) = \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{a}_{\text{fix}} = \;?$$

$$\vec{a}_{\text{fix}} = \ddot{\vec{R}}_{\text{fix}} + \vec{a}_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{a}_{\text{fix}} = \ddot{\vec{R}}_{\text{fix}} + \vec{a}_{\text{rot}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right)$$

$$\vec{a}_{\text{rot}} = \vec{a}_{\text{fix}} - \ddot{\vec{R}}_{\text{fix}} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rot}}$$