Poznámky k Elektrodynamice kontinua

PřF MU v Brně, listopad 2008

Michal Lenc

1 Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí 2

1.1 Mikroskopické Maxwellovy rovnice 2

1.2 Makroskopické Maxwellovy rovnice 3

1.3 Maxwellovy rovnice pro prostředí s triviálními materiálovými vztahy 3

1.4 Energie a hybnost elektromagnetického pole 4

1.5 Prostředí s dispersí 5

2 Index lomu 7

3 Elektromagnetické pole v dispersním prostředí 8

3.1 Maxwellovy rovnice 8

3.2 Kramersovy - Kronigovy relace 10

4 Chování vlny na rovinném rozhraní 11

4.1 Fázová a grupová rychlost 11

4.2 Sommerfeldovo – Brilluinovo řešení 12

5 Matematické základy 14

5.1 Analytické funkce 14

5.2 Hlavní hodnota integrálu 16

1 Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí

1.1 Mikroskopické Maxwellovy rovnice

Náboje a proudy rozdělíme na vázané na prostředí a vnější, mikroskopické Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí tedy budou

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{e} = \frac{\rho + \rho_{ext}}{\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{e} = -\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \quad , \\ &\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{h} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \rho\,\vec{v} + \vec{j}_{ext} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{h} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Středováním dostaneme

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\langle\rho\rangle + \rho_{ext}}{\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ &\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \langle\rho\,\vec{v}\rangle + \vec{j}_{ext} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde jsme označili

$$\langle\,\vec{e}\,\rangle = \vec{E} \quad , \quad \langle\vec{h}\rangle = \vec{B} \quad . \tag{1.3}$$

Celkový náboj vázaný na prostředí, které je plně uzavřeno uvnitř oblasti V je roven nule

$$\int_V \langle\rho\rangle\, d\,V = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\rho\rangle = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \quad , \tag{1.4}$$

přičemž $\vec{P}=0$ vně materiálu. Potom je totiž

$$\int_V \langle\rho\rangle\, d\,V = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\, d\,V = \int_S \vec{P}\cdot\vec{n}\, d\,S = 0 \quad . \tag{1.5}$$

Uvažujme dipólový moment

$$\int_V \vec{r}\,\langle\rho\rangle\, d\,V = -\int_V \vec{r}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\right) d\,V = -\int_S \vec{r}\left(\vec{n}\cdot\vec{P}\right) d\,S + \int_V \left(\vec{P}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}\, d\,V = \int_V \vec{P}\, d\,V \quad . \tag{1.6}$$

Proveďme nyní řez materiálem plně uvnitř nějaké plochy S. Celkový proud touto plochou vázaný na prostředí je dán celkovou hodnotou časové změny průmětu vektoru polarizace

$$\int_S \langle\rho\,\vec{v}\rangle\cdot\vec{n}\, d\,S = \int_S \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\cdot\vec{n}\, d\,S \quad \Rightarrow \quad \langle\rho\,\vec{v}\rangle = \vec{\nabla}\times\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} \quad , \tag{1.7}$$

přičemž $\vec{M}=0$ vně materiálu. Potom je totiž

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)\cdot\vec{n}\, d\,S\, d\,t \approx \int_\ell \vec{M}\cdot d\,\vec{\ell} + \lim_{T\to\infty}\int_S \frac{\vec{P}(T)-\vec{P}(0)}{T}\cdot\vec{n}\, d\,S = 0 \quad . \tag{1.8}$$

Uvažujme magnetický moment

$$\frac{1}{2}\int_V \vec{r}\times\langle\rho\,\vec{v}\rangle\,dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{r}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{M}\right)dV = \frac{1}{2}\int_S \vec{r}\times\left(\vec{n}\times\vec{M}\right)dS - \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{M}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{r}\,dV = \int_V \vec{M}\,dV \quad . \tag{1.9}$$

Definice vektorů polarizace $\vec{P}$ a magnetizace $\vec{M}$ pomocí momentů je důležitá pro jednoznačnost, jinak by vyhovovaly také $\vec{P}+\vec{\nabla}\times\vec{f}$ a $\vec{M}+\vec{\nabla}\,f$.

Povšimněme si, že spojení rovnic (1.4) a (1.7) dává

$$\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\langle\rho\,\vec{v}\rangle = 0 \quad . \tag{1.10}$$

1.2 Makroskopické Maxwellovy rovnice

Zavedeme vektory indukce elektrického pole a intenzity magnetického pole jako

$$\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P} \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B} - \vec{M}\right) \tag{1.11}$$

a dostáváme ze (1.2), (1.4) a (1.7) makroskopické Maxwellovy rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \rho \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} &= \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Rovnice (1.12) jsou konsistentní s rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \quad . \tag{1.13}$$

1.3 Maxwellovy rovnice pro prostředí s triviálními materiálovými vztahy

V homogenním isotropním lineárním prostředí bez disperse máme jednoduché materiálové vztahy

$$\vec{D} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\vec{E} \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_r\,\mu_0}\vec{B} \quad . \tag{1.14}$$

Zavedeme-li pro popis elektromagnetického pole vektorový a skalární potenciál

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\,\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad , \tag{1.15}$$

máme po dosazení do Maxwellových rovnic

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0} \quad ,$$

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon_r\,\mu_r\,\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_r\,\mu_r\,\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_r\,\mu_0\,\vec{j} \quad . \tag{1.16}$$

S využitím kalibrační transformace

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \quad , \quad \phi \to \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.17}$$

můžeme mít

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_r\,\mu_r\,\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{1.18}$$

a dostáváme tak pro potenciály nehomogenní vlnovou rovnici

$$\Delta\phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0} \quad ,$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_r\,\mu_0\,\vec{j} \quad . \tag{1.19}$$

Označili jsme rychlost světla ve vakuu c a index lomu n

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} \quad , \quad n^2 = \varepsilon_r\,\mu_r \quad . \tag{1.20}$$

1.4 Energie a hybnost elektromagnetického pole

Mějme testovací částici s energií ε a impulsem $\vec{p}$. Při přechodu ke spojitému rozložení náboje a proudu je

$$\Delta\varepsilon = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \frac{1}{\rho}\vec{F}\cdot\vec{j}\,\Delta t \quad , \quad \vec{F} = \rho\,\vec{E}\,\Delta V + \vec{j}\times\vec{B}\,\Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta V}\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \vec{j}\cdot\vec{E} \quad . \tag{1.21}$$

S využitím vztahu

$$\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) - \vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}\times\vec{E}\right) \tag{1.22}$$

odvodíme z Maxwellových rovnic výraz

$$\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\vec{j}\cdot\vec{E} - \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) \quad . \tag{1.23}$$

Na pravé straně vystupuje vykonaná práce a tok, výraz na levé straně můžeme tedy interpretovat jako časovou změnu hustoty energie. Po zavedení veličin hustoty energie W a Poyntingova vektoru $\vec{S}$

$$W = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) \quad , \quad \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \tag{1.24}$$

můžeme (1.23) psát jako

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V W\, dV + \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\, dV + \int_\Sigma \vec{S}\cdot\vec{n}\, d\Sigma = 0 \quad . \tag{1.25}$$

Obdobnou úvahu můžeme provést pro hybnost. Při přechodu ke spojitému rozložení náboje je

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t \quad , \quad \vec{F} = \rho\,\vec{E}\,\Delta V + \vec{j}\times\vec{B}\,\Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta V}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \rho\,\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} \quad . \tag{1.26}$$

Z Maxwellových rovnic odvodíme výraz

$$\vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B} = \vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\mathrm{D}\right) - \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) + \vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \vec{D}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) - \vec{j}\times\vec{B} - \rho\,\vec{E} \quad . \tag{1.27}$$

Poslední dva členy na pravé straně popisují Lorentzovu sílu, můžeme tedy výraz na levé straně interpretovat jako časovou změnu hustoty hybnosti

$$\vec{G} = \vec{D}\times\vec{B} = \varepsilon_r\,\mu_r\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\vec{E}\times\vec{H} = \frac{n^2}{c^2}\vec{S} \quad . \tag{1.28}$$

Po úpravě, kdy předpokládáme, že permitivita ani permeabilita nezávisí na prostorových souřadnicích můžeme psát

$$\begin{aligned}\left[\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) - \vec{D}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right]_i &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_i\,D_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\,\vec{E}\cdot\vec{D}\right) \quad , \\ \left[\vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\right]_i &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(H_i\,B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\,\vec{H}\cdot\vec{B}\right) \quad .\end{aligned} \tag{1.29}$$

a zákon zachování má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V G_i\, dV + \int_V \left[\rho\,E_i + \left(\vec{j}\times\vec{B}\right)_i\right] dV + \int_\Sigma \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\,n_j\, d\Sigma = 0 \quad . \tag{1.30}$$

Definovali jsme Maxwellův tensor napětí T_{ij} jako

$$T_{ij} = -\left(E_i\,D_j + H_i\,B_j\right) + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right) \quad . \tag{1.31}$$

Takto definovaný Maxwellův tensor určuje tok hybnosti z uvažovaného objemu. Jeho stopa je rovna hustotě energie

$$W - \sum_{i=}^{3} T_{ii} = 0 \quad . \tag{1.32}$$

1.5 Prostředí s dispersí

V prostředí s dispersí musíme psát

$$\vec{E}(t)=\frac{1}{2}\left[\vec{e}(t)+\vec{e}^{*}(t)\right] \quad , \quad \vec{D}(t)=\frac{1}{2}\left[\vec{d}(t)+\vec{d}^{*}(t)\right] \quad ,$$
$$\vec{B}(t)=\frac{1}{2}\left[\vec{b}(t)+\vec{b}^{*}(t)\right] \quad , \quad \vec{H}(t)=\frac{1}{2}\left[\vec{h}(t)+\vec{h}^{*}(t)\right] \quad , \tag{1.33}$$

kde

$$\vec{e}(t)=\vec{e}_0(t)\exp\{-i\,\omega t\}=\int \vec{e}_0(\alpha)\exp\{-i(\alpha+\omega)t\}\frac{d\alpha}{2\pi} \quad ,$$
$$\vec{d}(t)=\vec{d}_0(t)\exp\{-i\,\omega t\}=\varepsilon_0\int \varepsilon(\alpha+\omega)\vec{e}_0(\alpha)\exp\{-i(\alpha+\omega)t\}\frac{d\alpha}{2\pi} \quad ,$$
$$\vec{h}(t)=\vec{h}_0(t)\exp\{-i\,\omega t\}=\int \vec{h}_0(\alpha)\exp\{-i(\alpha+\omega)t\}\frac{d\alpha}{2\pi} \quad , \tag{1.34}$$
$$\vec{b}(t)=\vec{b}_0(t)\exp\{-i\,\omega t\}=\mu_0\int \mu(\alpha+\omega)\vec{h}_0(\alpha)\exp\{-i(\alpha+\omega)t\}\frac{d\alpha}{2\pi} \quad .$$

Předpokládáme, že $\vec{e}_0(t)$ a $\vec{h}_0(t)$ jsou pomalu se měnící funkce a že pro hodnoty integrálů jsou tedy podstatné pouze příspěvky z okolí $\alpha=0$. Pro výpočet zobecněného vztahu (1.23) nebo (1.27) potřebujeme znát přibližné vyjádření pro $\partial\vec{d}/\partial t$ a $\partial\vec{b}/\partial t$. Rozvoj příslušných integrandů kolem $\alpha=0$ napíšeme jako

$$(\alpha+\omega)\varepsilon(\alpha+\omega)=\omega\varepsilon(\omega)+\frac{d\,\omega\varepsilon(\omega)}{d\,\omega}\alpha+\frac{1}{2!}\frac{d^2\,\omega\varepsilon(\omega)}{d\,\omega^2}\alpha^2+\ldots\approx$$
$$-\omega^2\frac{d\,\varepsilon(\omega)}{d\,\omega}+\frac{d\,\omega\varepsilon(\omega)}{d\,\omega}(\omega+\alpha) \tag{1.35}$$

nebo

$$(\alpha+\omega)\mu(\alpha+\omega)=\omega\mu(\omega)+\frac{d\,\omega\mu(\omega)}{d\,\omega}\alpha+\frac{1}{2!}\frac{d^2\,\omega\mu(\omega)}{d\,\omega^2}\alpha^2+\ldots\approx$$
$$-\omega^2\frac{d\,\mu(\omega)}{d\,\omega}+\frac{d\,\omega\mu(\omega)}{d\,\omega}(\omega+\alpha) \quad . \tag{1.36}$$

To nám umožní získat hledané vyjádření

$$\frac{\partial\vec{d}(t)}{\partial t}\approx i\,\varepsilon_0\,\omega^2\frac{d\,\varepsilon(\omega)}{d\,\omega}\vec{e}(t)+\varepsilon_0\frac{d\,\omega\varepsilon(\omega)}{d\,\omega}\frac{\partial\vec{e}(t)}{\partial t} \quad ,$$
$$\frac{\partial\vec{b}(t)}{\partial t}\approx i\,\mu_0\,\omega^2\frac{d\,\mu(\omega)}{d\,\omega}\vec{h}(t)+\mu_0\frac{d\,\omega\mu(\omega)}{d\,\omega}\frac{\partial\vec{h}(t)}{\partial t} \quad . \tag{1.37}$$

Pro hustotu energie pak máme konečný výraz

$$W=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\frac{d\,\omega\varepsilon(\omega)}{d\,\omega}E^2+\frac{1}{\mu_0\,\mu^2(\omega)}\frac{d\,\omega\mu(\omega)}{d\,\omega}B^2\right) \quad . \tag{1.38}$$

Řešení vlnové rovnice pro vektorový potenciál ve tvaru rovinné vlny dává

$$\phi = 0 \quad , \quad \vec{A} = 2\,N\,\vec{a}\cos\left(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}\right) \quad ,$$
$$\vec{E} = 2\,N\,\omega\vec{a}\sin\left(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}\right) \quad , \quad \vec{B} = 2\,N\left(\vec{k}\times\vec{a}\right)\sin\left(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}\right) \quad , \tag{1.39}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{k} = 0 \quad , \quad \left|\vec{k}\right| = \frac{n\,\omega}{c} \quad .$$

Normovací podmínku pro vektorový potenciál odpovídající jednomu fotonu napíšeme jako

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_V W\,d\,V\,d\,t = \hbar\,\omega \quad . \tag{1.40}$$

Po dosazení dostaneme pro normovací konstantu N

$$N = \left[\frac{\hbar}{2\,\varepsilon_0\,\omega V\left(\varepsilon(\omega)/n(\omega)\right)\left(\partial\left(\omega\,n(\omega)\right)/\partial\,\omega\right)}\right]^{1/2} \quad . \tag{1.41}$$

S uvedenou hodnotou normovací konstanty N je hybnost fotonu střední hodnotou veličiny úměrné Poyntingovu vektoru

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_V \frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(\omega\,n(\omega)\right)}{\partial\,\omega}\vec{E}\times\vec{H}\,d\,V\,d\,t = \frac{\hbar\,\omega}{c}\frac{\vec{k}}{k} \quad . \tag{1.42}$$

2 Index lomu

Definujeme polarizovatelnost $\alpha(\omega)$ jako konstantu úměrnosti ve vztahu mezi (lokálním) elektrickým polem $\vec{E}_{loc}$ a dipólovým momentem $\vec{p}$. Vyjdeme z komplexního zápisu intenzity

$$\frac{d^2\,\vec{r}}{d\,t^2} + \gamma\frac{d\,\vec{r}}{d\,t} + \omega_0^2\,\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_{loc}\exp\left(-i\,\omega t\right) \quad . \tag{2.1}$$

Potom

$$\vec{p} = \varepsilon_0\,\alpha(\omega)\,\vec{E}_{loc} \quad , \quad \alpha(\omega) = \frac{e^2}{\varepsilon_0\,m}\frac{1}{\omega_0^2 - i\,\gamma\,\omega - \omega^2} \quad . \tag{2.2}$$

Polarizace je pak $\vec{P} = N\,\vec{p}$. Musíme ovšem uvážit, jaké pole působí na náboj. Připomeňme z elektrostatiky, že je-li v dielektriku s homogenním polem dutina, je lokální pole rovno

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} \quad , \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{P} \quad , \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{1}{3\,\varepsilon_0}\vec{P} \quad , \tag{2.3}$$

podle toho, jde-li o štěrbinu podél nebo napříč pole nebo o kulovou dutinu. Pro úplnost poznamenejme, že pro magnetické pole máme v podobné situaci

$$\vec{B}_{loc} = \vec{B} - \vec{M} \quad , \quad \vec{B}_{loc} = \vec{B} \quad , \quad \vec{B}_{loc} = \vec{B} - \frac{2}{3}\vec{M} \quad . \tag{2.4}$$

Pro dielektrika uvažujeme o vázaných nábojích uvnitř kulové dutiny, můžeme tedy psát

$$\vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha}\varepsilon_0 \vec{E} \tag{2.5}$$

a pro index lomu (za velmi častého předpokladu $\mu(\omega) = \mu_0$)

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha} \quad . \tag{2.6}$$

Obvyklá forma tohoto vztahu je (Clausius - Mossotti)

$$3\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha \quad . \tag{2.7}$$

Ve vodiči uvažujeme o téměř volných elektronech (nevázaných k atomu, tedy $\omega_0 = 0$) a dále máme pro konstantu γ (ze dvou různých vyjádření proudu a zápisu změny impulsu za dobu mezi srážkami)

$$j = \sigma E \quad , \quad j = N e v_d \quad , \quad m v_d \gamma = eE \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{N e^2}{m\sigma} \quad . \tag{2.8}$$

Také lokální pole je rovno vnějšímu, opět díky neustálému pohybu téměř volných elektronů. Odtud máme pro index lomu

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\,\omega\,\omega_p^2 \frac{\varepsilon_0}{\sigma}} \quad , \quad \omega_p^2 = \frac{N e^2}{m\,\varepsilon_0} \quad . \tag{2.9}$$

3 Elektromagnetické pole v dispersním prostředí

3.1 Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice pro Fourierovy složky (píšeme obecně bez vyznačení prostorové proměnné)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\exp(-i\,\omega t)\,d\,\omega \tag{3.1}$$

jsou

$$\begin{gathered} \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\omega) = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H}(\omega) = -i\,\omega\vec{D}(\omega) \quad , \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\omega) = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\omega) = i\,\omega\vec{B}(\omega) \quad . \end{gathered} \tag{3.2}$$

Předpoklad lineárního a příčinného vztahu mezi intenzitou a indukcí

$$\vec{D}(t)=\varepsilon_0\left(\vec{E}(t)+\int_0^\infty \chi_e(\tau)\vec{E}(t-\tau)\,d\tau\right) \quad , \quad \vec{B}(t)=\mu_0\left(\vec{H}(t)+\int_0^\infty \chi_m(\tau)\vec{H}(t-\tau)\,d\tau\right) \tag{3.3}$$

vede k vyjádření

$$\vec{D}(\omega)=\varepsilon_0\,\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega) \quad , \quad \vec{B}(\omega)=\mu_0\,\mu(\omega)\vec{H}(\omega) \quad , \tag{3.4}$$

kde

$$\varepsilon(\omega)=1+\int_0^\infty \chi_e(\tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau \quad , \quad \mu(\omega)=1+\int_0^\infty \chi_m(\tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau \quad . \tag{3.5}$$

Z tohoto vyjádření máme hned

$$\varepsilon(-\omega)=\varepsilon^*(\omega) \quad , \quad \mu(-\omega)=\mu^*(\omega) \tag{3.6}$$

a

$$\lim_{\omega\to\infty}\varepsilon(\omega)=1 \quad , \quad \lim_{\omega\to\infty}\mu(\omega)=1 \quad . \tag{3.7}$$

Pro dielektrika nabývá $\varepsilon(\omega)$ při $\omega\to 0$ konečnou hodnotu statické relativní permitivity. Pro kovy je chování zajímavější. Z porovnání dvou tvarů $\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)(\omega\to 0)$ dostáváme

$$-i\omega\varepsilon(\omega\to 0)\vec{E}(\omega\to 0)\to\sigma\vec{E}(\omega\to 0) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(\omega\to 0)\to\frac{i\sigma}{\omega} \quad . \tag{3.8}$$

S využitím vztahů (3.4) můžeme Maxwellovy rovnice (3.2) přepsat na

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\omega)=0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}(\omega)=-i\omega\frac{n^2(\omega)}{c^2}\vec{E}(\omega) \quad , \\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\omega)=0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\omega)=i\omega\vec{B}(\omega) \quad , \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde

$$\varepsilon_0\,\mu_0=\frac{1}{c^2} \quad , \quad \varepsilon(\omega)\mu(\omega)=n^2(\omega) \quad . \tag{3.10}$$

Vhodnou volbou kalibrace potenciálů je $\phi(\omega)=0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\omega)=0$, takže

$$\vec{E}(\omega)=i\omega\vec{A}(\omega) \quad , \quad \vec{B}(\omega)=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\omega) \tag{3.11}$$

a pro vektorový potenciál máme Helmholtzovu rovnici

$$\Delta\vec{A}(\omega)+\frac{\omega^2\,n^2(\omega)}{c^2}\vec{A}(\omega)=0 \quad . \tag{3.12}$$

Vezměme nyní výraz (1.23)

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad . \tag{3.13}$$

Uvažujme monochromatickou elektromagnetickou vlnu. Poněvadž pravá strana (3.13) obsahuje kvadratické výrazy, musíme brát reálné hodnoty pole, tj. dosazovat

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2}\left[\vec{E}(\omega)\exp(-i\,\omega t) + \vec{E}^*(\omega)\exp(i\,\omega t)\right] \quad , \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{i\,\omega\varepsilon_0}{2}\left[-\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)\exp(-i\,\omega t) + \varepsilon^*(\omega)\vec{E}^*(\omega)\exp(i\,\omega t)\right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

a

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2}\left[\vec{H}(\omega)\exp(-i\,\omega t) + \vec{H}^*(\omega)\exp(i\,\omega t)\right] \quad , \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{i\,\omega\mu_0}{2}\left[-\mu(\omega)\vec{H}(\omega)\exp(-i\,\omega t) + \mu^*(\omega)\vec{H}^*(\omega)\exp(i\,\omega t)\right] \quad . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pro časovou střední hodnotu Poyntingova vektoru

$$\overline{\vec{S}(\omega)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(\omega,t)\,d\,t \tag{3.16}$$

dostáváme ze vztahu (3.13) dosazením z (3.14) a (3.15)

$$-\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{S}(\omega)} = \frac{\omega}{2}\left[\varepsilon_0\,\varepsilon''(\omega)\left|\vec{E}(\omega)\right|^2 + \mu_0\,\mu''(\omega)\left|\vec{H}(\omega)\right|^2\right] \quad . \tag{3.17}$$

Energie přidávaná do jednotky objemu je proměňována na teplo. Podle druhé věty termodynamické musí být toto teplo při disipaci energie vytvářeno, musí tedy být

$$\omega\varepsilon''(\omega) > 0 \quad , \quad \omega\mu''(\omega) > 0 \quad . \tag{3.18}$$

3.2 Kramersovy - Kronigovy relace

Studium vlastností permitivity a permeability jako komplexních funkcí komplexní proměnné vede k tomu, že můžeme tvrdit, že jsou to funkce analytické v horní polorovině, na reálné ose má funkce $\varepsilon(\omega)$ nejvýše jeden pól v bodě $\omega = 0$. Zobecnění na komplexní rovinu má často bezprostřední interpretaci. Tak vztah

$$\varepsilon\left(-\omega^*\right) = \varepsilon^*(\omega) \quad , \quad \mu\left(-\omega^*\right) = \mu^*(\omega) \tag{3.19}$$

plyne z požadavku, aby reálné veličině

$$\vec{E} = \vec{E}_0\exp(-i\,\omega t) + \vec{E}_0^*\exp\left(i\,\omega^*\,t\right) \tag{3.20}$$

odpovídala reálná veličina

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E}_0\exp(-i\,\omega t) + \varepsilon\left(-\omega^*\right)\vec{E}_0^*\exp\left(i\,\omega^*\,t\right) \quad . \tag{3.21}$$

Užitím Cauchyho věty pro vhodnou oblast dostáváme Kramersovy - Kronigovy vztahy pro reálnou a imaginární část funkcí $\varepsilon(\omega)$ a $\mu(\omega)$, píšeme dále jen pro permitivitu (proměnnou na reálné ose značíme x)

$$\varepsilon'(\omega)-\varepsilon'(0)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega}dx \quad , \quad \varepsilon''(\omega)-\frac{\sigma}{\omega}=-P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon'(x)}{x-\omega}dx \quad . \tag{3.22}$$

Vzhledem k antisymetrii $\varepsilon''(-\omega')=-\varepsilon''(\omega')$ můžeme první vztah přepsat na

$$\varepsilon'(\omega)-1=\frac{2}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\varepsilon''(x)}{x^2-\omega^2}dx \tag{3.23}$$

a máme přitom na paměti, že

$$x\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon''(x)\geq 0 \quad , \quad x\leq 0 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon''(x)\leq 0 \quad . \tag{3.24}$$

Z těchto relací odvodíme výrazy

$$\frac{d\varepsilon'(\omega')}{d\omega'}=\frac{4\omega'}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\varepsilon''(x)}{\left(x^2-\omega'^2\right)^2}dx \quad , \quad \frac{d\left[\omega'^2\left(\varepsilon'(\omega')-1\right)\right]}{d\omega'}=\frac{4\omega'}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\varepsilon''(x)}{\left(x^2-\omega'^2\right)^2}dx \quad . \tag{3.25}$$

Z výrazů (3.25) dostáváme nerovnosti

$$\frac{d\varepsilon'(\omega')}{d\omega'}\geq 0 \quad , \quad \frac{d\varepsilon'(\omega')}{\mathrm{d}\omega'}\geq\frac{2\left(1-\varepsilon'(\omega')\right)}{\omega'} \quad . \tag{3.26}$$

Zcela obdobně bychom získali pro permeabilitu nerovnosti

$$\frac{d\mu'(\omega')}{d\omega'}\geq 0 \quad , \quad \frac{d\mu'(\omega')}{d\omega'}\geq\frac{2\left(1-\mu'(\omega')\right)}{\omega'} \quad . \tag{3.27}$$

4 Chování vlny na rovinném rozhraní

4.1 Fázová a grupová rychlost

Uvažujme šíření vlny ve směru osy z. Prostředí má velmi slabou dispersi, tedy kvadrát indexu lomu bude součinem reálných částí permitivity a permeability (čárky vynecháváme) a vlnu napíšeme jako

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}a(\omega)\exp\left[i\left(\frac{\omega n(\omega)}{c}z-\omega t\right)\right]d\omega \quad . \tag{4.1}$$

Je zřejmé, že fázová rychlost je

$$v_f=\frac{c}{n(\omega)} \tag{4.2}$$

a může nabývat i nadsvětelných rychlostí. Nikoliv tak grupová rychlost

$$v_g = \frac{c}{\dfrac{d\left[\omega n(\omega)\right]}{d\omega}} \quad , \tag{4.3}$$

pokud jsou ovšem splněny podmínky (3.26) a (3.27).

4.2 Sommerfeldovo – Brilluinovo řešení

Na rovinné rozhraní dopadá v čase $t=0$ kolmo elektromagnetická vlna. Poloprostor $x>0$ vyplňuje opticky průzračné prostředí, charakterizované indexem lomu $n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ (předpokládáme $\mu(\omega)=1$). Máme tedy na rozhraní

$$\begin{aligned} E(x=0,t) &= 0 & t<0 \\ E(x=0,t) &= E_0 \exp\{-i\omega_0 t\} & t>0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

neboli ve Fourierových složkách

$$E(x=0,\omega) = E_0 \int_0^\infty d\tau \exp\{i(\omega-\omega_0)\tau\} \quad . \tag{4.5}$$

Vlna šířící se v poloprostoru $x>0$ má obecně tvar

$$f(\omega)\exp\{i(k(\omega)x-\omega t)\} \quad , \quad k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) \tag{4.6}$$

a v našem případě tedy

$$E(x,t) = \frac{E_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega t(\omega) \exp\{i(k(\omega)x-\omega t)\} \int_0^\infty d\tau \exp\{i(\omega-\omega_0)\tau\} \quad , \tag{4.7}$$

kde $t(\omega)$ je pomalu se měnící amplituda propustnosti při dopadu na rozhraní. Nejprve ukážeme výpočet podle Landaua. Hlavní příspěvek k integrálu bude pocházet od frekvencí $\omega \approx \omega_0$. Rozvojem funkcí a ponecháním nejnižších členů Taylorova rozvoje dostaneme

$$E(x,t) = \frac{E_0 t(\omega_0)}{2\pi} \exp\{i(k(\omega_0)x-\omega_0 t)\} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left\{i\left[\frac{\xi}{u}(x-ut+u\tau) - \frac{xu'}{2}\frac{\xi^2}{u^2}\right]\right\} \quad , \tag{4.8}$$

kde jsme zavedli grupovou rychlost u a její derivaci u' vztahy

$$\frac{1}{u} = \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} \quad , \quad u' = \left.\frac{du}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} \quad . \tag{4.9}$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme z (4.9)

$$E(x,t)=E_0\,t(\omega_0)\exp\{i(k(\omega_0)x-\omega_0 t)\}\frac{\exp\left\{\mp i\frac{\pi}{4}\right\}}{\sqrt{\pi}}\int_w^\infty d\xi\exp\{\pm i\xi^2\} \quad , \tag{4.10}$$

kde znaménko je signaturou u' a proměnná w je dána vztahem

$$w=\frac{x-u\,t}{\sqrt{2x|u'|}} \quad . \tag{4.11}$$

Pro $u\,t-x\to\infty$ přejde (4.10) na stacionární tvar

$$E(x,t)=E_0\,t(\omega_0)\exp\{i(k(\omega_0)x-\omega_0 t)\} \quad . \tag{4.12}$$

Pro $c\,t-x\to 0^+$ hrají hlavní roli velké frekvence, kdy můžeme psát

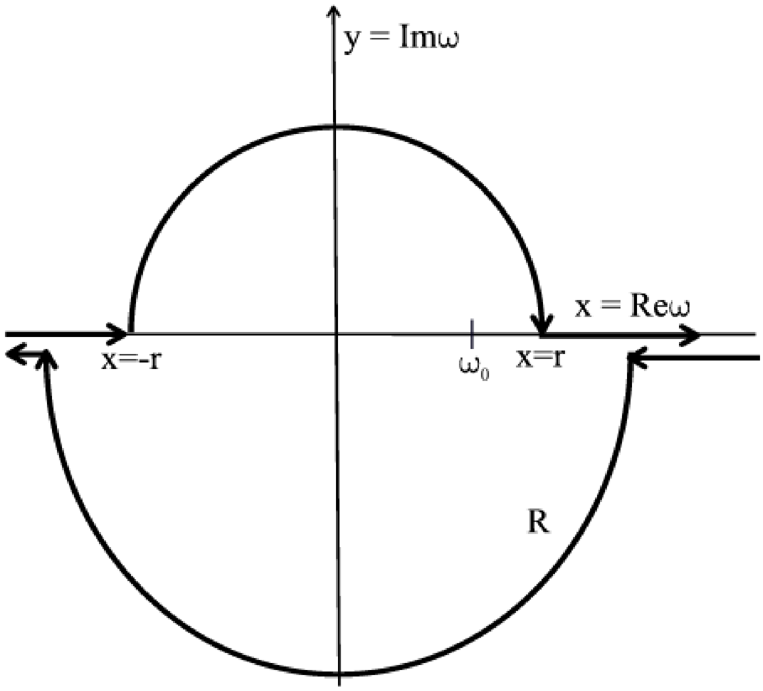
$$k(\omega)-\frac{\omega}{c}\approx-\frac{\omega_p^2}{2\omega} \tag{4.13}$$

a tedy místo (4.7)

$$E(x,t)\approx\frac{i\,E_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}\exp\left\{-i\left[\frac{\omega_p^2\,x}{2c\,\omega}+\left(t-\frac{x}{c}\right)\omega\right]\right\}-E_0\exp\left\{-i\left(t-\frac{x}{c}\right)\omega_0\right\} \quad , \tag{4.14}$$

kde integrační cesta (na obrázku) je zvolena podle Sommerfelda tak, aby obsahovala pouze velké absolutní hodnoty (komplexní) integrační proměnné. Druhý člen na pravé straně (4.14) je příspěvek residua v $\omega=\omega_0$, předpokládáme dále $t(\omega_0)\approx 1$. S označením $\xi=(\omega_p^2\,x)/(2c)$ a $\tau=t-x/c$ přepíšeme (4.14) na

$$E(x,t)\approx\frac{i\,E_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}\exp\left\{-i\left[\frac{\xi}{\omega}+\tau\,\omega\right]\right\}-E_0\exp\left\{-i\left(t-\frac{x}{c}\right)\omega_0\right\} \quad . \tag{4.15}$$



Zvolíme-li $r=\sqrt{\xi/\tau}$, můžeme pomocí různých integrálních representací Besselovy funkce zapsat (4.15) jako

$$E(x,t)=E_0\,J_0\left(2\sqrt{\xi\,\tau}\right)=E_0\left[J_0\left(\frac{\omega_p}{c}\sqrt{2x(ct-x)}\right)-\exp\left\{-i\left(t-\frac{x}{c}\right)\omega_0\right\}\right] \quad . \tag{4.16}$$

Čelo vlny se tedy šíří rychlostí rovnou rychlosti světla ve vakuu, amplituda narůstá z nulové hodnoty. Pro $x-ct>0$ dostáváme přirozeně z (4.7) vztah $E(x,t)=0$.

5 Matematické základy

5.1 Analytické funkce

Komplexní funkci $f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ můžeme pro $z=x+i\,y$ zapsat jako

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y) \quad . \tag{5.1}$$

Derivace funkce je

$$\left.\frac{d\,f}{d\,z}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\rightarrow 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \quad , \tag{5.2}$$

pokud tato limita existuje a je nezávislá na směru v komplexní rovině, kterým se Δz blíží k nule. Požadavek nezávislosti na směru vyjadřují Cauchyho – Riemannovy podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad . \tag{5.3}$$

Vztah (5.3) můžeme zapsat také jako

$$\frac{\partial f\left(z,z^*\right)}{\partial z^*}=0 \quad . \tag{5.4}$$

Pro úplnost uveďme, že derivováním prvního ze vztahů v (5.3) podle x a dosazením z druhého vztahu (resp. derivováním druhého ze vztahů v (5.3) podle y a dosazením z prvního vztahu) dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \quad . \tag{5.5}$$

Funkce $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je analytická v bodě $z=z_0$, je-li v tomto bodě a jeho okolí diferencovatelná. Pro integraci analytické funkce platí Cauchyho – Goursatova a Cauchyho věta: Nechť $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je analytická na uzavřené křivce C a ve všech bodech uvnitř C. Bod z_0 ať je libovolný vnitřní bod. Potom

$$\oint_C f(z)\,dz=0 \tag{5.6}$$

a

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \quad . \tag{5.7}$$

Orientace uzavřené křivky C se volí tak, že pravý úhel od vnější normály k tečně je orientován proti směru hodinových ručiček. Obě věty můžeme spojit do výrazu

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left\{f(z_0)\right\} \quad , \tag{5.8}$$

kde $\mathrm{Res}\left\{f(z_0)\right\}$ označuje residuum funkce $f(z)$ v isolovaném singulárním bodě $z=z_0$. Obecně, obsahuje-li oblast uzavřená křivkou C více isolovaných singulárních bodů, platí residuová věta

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_k \mathrm{Res}\left\{f(z_k)\right\} \quad . \tag{5.9}$$

Je-li bod $z=z_0$ pólem m-tého řádu, tj. funkce je representována Laurentovou řadou

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n+\sum_{n=1}^{m}\frac{b_n}{\left(z-z_0\right)^n} \tag{5.10}$$

a funkce $\left(z-z_0\right)^n f(z)$ je tedy analytická, můžeme residuum vyjádřit jako

$$\mathrm{Res}\left\{f(z_0)\right\}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{m-1}}{d z^{m-1}}\left[\left(z-z_0\right)^m f(z)\right]\right\} \quad . \tag{5.11}$$

5.2 Hlavní hodnota integrálu

Předpokládejme teď, že částí uzavřené křivky v Cauchyho větě (5.7) je reálná osa a že na této reálné ose leží singulární bod $z = x_0$ a že tedy integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)/(x - x_0)\,dx$ diverguje. Předpokládejme ale, že existuje hlavní hodnota tohoto integrálu

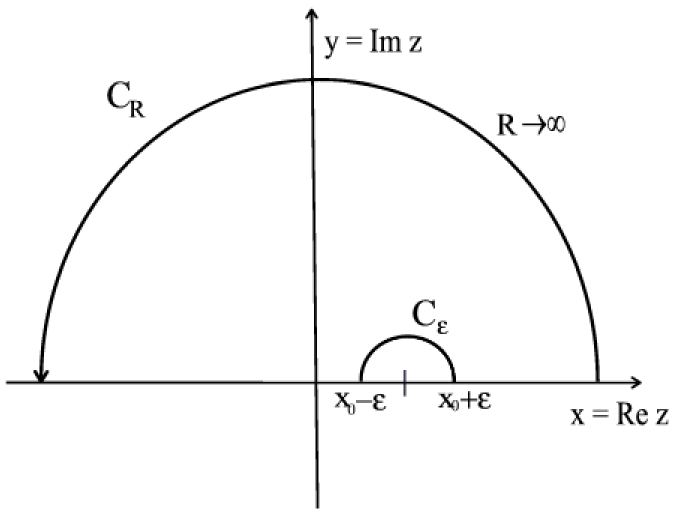
$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x - x_0}\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\,dx \right\} \quad . \tag{5.12}$$

Je-li funkce $f(z)$ analytická (až na m isolovaných singulárních bodů) v horní polorovině a ubývá dostatečně rychle pro $|z| \to \infty$, můžeme zvolit křivku C podle obrázku 2-1 a dostaneme

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - x_0}\,dz = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\,dx + \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - x_0}\,dz + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - x_0}\,dz = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\,dx - i\pi f(x_0) \tag{5.13}$$

a podle residuové věty

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\,dx = i\pi f(x_0) + 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\left\{ \frac{f(z_j)}{z_j - x_0} \right\} \quad . \tag{5.14}$$



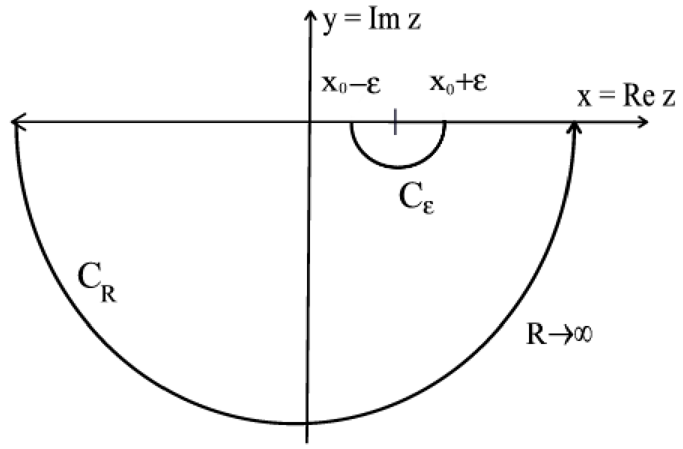
Obrázek 5-1

Obdobně, je-li funkce $f(z)$ analytická (až na n isolovaných singulárních bodů) ve spodní polorovině a ubývá dostatečně rychle pro $|z| \to \infty$, můžeme zvolit křivku C podle obrázku 2-2 a dostaneme

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-x_0} d\,z = -\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} d\,x + \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-x_0} d\,z + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-x_0} d\,z = -\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} d\,x - i\pi f(x_0) \quad (5.15)$$

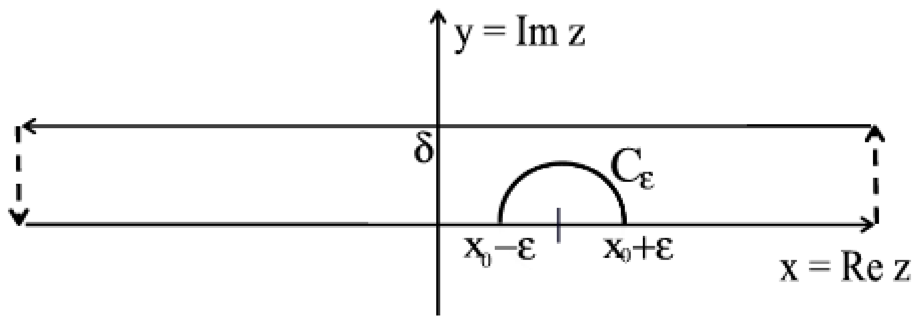
a podle residuové věty

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} d\,x = -i\pi f(x_0) - 2i\pi \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}\left\{ \frac{f(z_j)}{z_j - x_0} \right\} \quad . \quad (5.16)$$



Obrázek 5-2

Jiný způsob volby integrační křivky podle obrázku 2-3



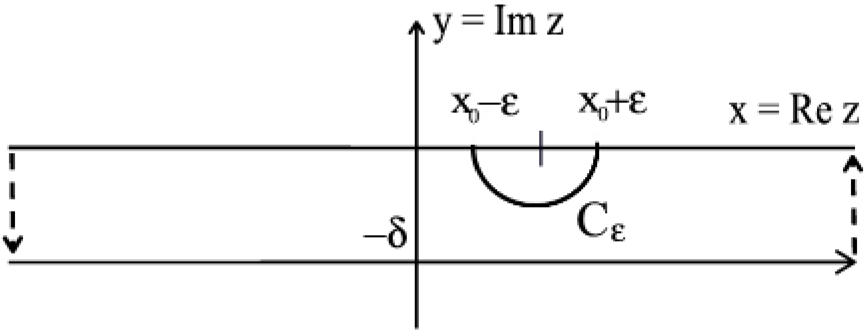
Obrázek 5-3

vede k vyjádření

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} d\,x = i\pi f(x_0) + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0+i\delta} d\,x \quad . \quad (5.17)$$

Druhá možnost volby takové křivky vede podle obrázku 2-4 k výrazu

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,d\,x=-i\,\pi\,f\left(x_0\right)+\lim_{\delta\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0-i\,\delta}\,d\,x \quad . \tag{5.18}$$



Obrázek 5-4

Formální zápis (5.17) a (5.18) je

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{x-x_0\pm i\,\delta}=\mathrm{P}\frac{1}{x-x_0}\mp i\,\pi\,\delta\left(x-x_0\right) \quad . \tag{5.19}$$