Poznámky k Elektrodynamice kontinua

PřF MU v Brně, prosinec 2008

Michal Lenc

1 Prostorová disperse

Zobecnění lineárního vztahu vektorů elektrické indukce a intenzity

$$D_i(t,\vec{r}) = \varepsilon_0 \left[E_i(t,\vec{r}) + \int_0^\infty \int_{V'} f_{ik}(\tau;\vec{r},\vec{r}') \, E_k(t-\tau,\vec{r}') \, dV' \, d\tau \right] \tag{1.1}$$

zahrnuje jak časově, tak prostorově nelokální vztah obou vektorů i případnou anisotropii prostředí. Mluvíme o časové (frekvenční) a prostorové dispersi. Pro monochromatickou vlnu bude

$$\begin{aligned} D_i(t,\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_i(\vec{r}) \exp[-i\omega t] \, d\omega \quad , \\ E_i(t,\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_i(\vec{r}) \exp[-i\omega t] \, d\omega \end{aligned} \tag{1.2}$$

a můžeme pak psát místo (1.1)

$$D_i(\vec{r}) = \varepsilon_0 \left[E_i(\vec{r}) + \int_{V'} f_{ik}(\omega;\vec{r},\vec{r}') \, E_k(\vec{r}') \, dV' \right] \quad , \tag{1.3}$$

kde

$$f_{ik}(\omega;\vec{r},\vec{r}') = \int_0^\infty f_{ik}(\tau;\vec{r},\vec{r}') \exp[i\omega\tau] \, d\tau \quad . \tag{1.4}$$

Ve velké většině případů se integrální jádro $f_{ik}\left(\omega;\vec{r},\vec{r}^{\,/}\right)$ příliš nemění i při vzdálenostech mnohem větších než jsou atomární, přitom makroskopická pole jsou dána středními hodnotami v oblastech právě atomových rozměrů. Potom můžeme v (1.3) psát $E_i\left(\vec{r}^{\,/}\right)\approx E_i\left(\vec{r}\right)$ a vrátíme se tak k případu frekvenční s disperse s malými opravami – i ty ale mohou mít docela důležité důsledky. Výrazné nelokální jevy se mohou projevit ve vodivých prostředích díky pohybu volných nositelů proudu.

Výrazným projevem prostorové disperse je Dopplerovo rozšíření absorpční čáry v plynu. Pokud má atom v klidu absorpční čáru zanedbatelné šířky na frekvenci ω_0, potom vlivem Dopplerova jevu je tato čára posunuta o $\vec{k}\cdot\vec{v}$, kde $\vec{v}$ je rychlost atomu, $v\ll c$. Absorpční spektrum plynu má pak čáru o šířce $\Delta\omega\sim k\,v_T$, v_T je střední tepelná rychlost atomů plynu. Toto rozšíření pak vede k tomu, že existuje podstatná prostorová disperse pro

$$k\geq\frac{|\omega-\omega_0|}{v_T}\quad . \tag{1.5}$$

Ve vztahu (1.3) se neuvažuje možná závislost elektrické indukce na magnetické. Není to úkor obecnosti, protože ze vztahu

$$\operatorname{curl}\vec{E}=i\,\omega\vec{B} \tag{1.6}$$

je vidět závislost magnetické indukce na derivacích elektrické intenzity, což je vyjádření nelokálnosti. Můžeme si to ukázat v jednom rozměru

$$\begin{aligned}&B(x)=\alpha\frac{dE(x)}{dx}\quad,\quad D(x)=\int g(x,y)B(y)\,dy\quad\Rightarrow\\&D(x)=\int\alpha\,g(x,y)\frac{dE(y)}{dy}dy=-\int\alpha\frac{dg(x,y)}{dy}E(y)\,dy=\int\bar{g}(x,y)E(y)\,dy\quad .\end{aligned} \tag{1.7}$$

2 Maxwellovy rovnice

Z mikroskopických rovnic

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\cdot\vec{e}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad,\quad\vec{\nabla}\times\vec{e}=-\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}\quad,\\&\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{h}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}+\rho\vec{v}\quad,\quad\vec{\nabla}\cdot\vec{h}=0\end{aligned} \tag{2.1}$$

vytvoříme makroskopické středováním

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0}\quad,\quad\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad,$$
$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\langle\rho\vec{v}\rangle\quad,\quad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\quad. \tag{2.2}$$

Zavedli jsme vektory

$$\langle\vec{e}\rangle=\vec{E}\quad,\quad\langle\vec{h}\rangle=\vec{B}\quad. \tag{2.3}$$

Vektor polarizace zavedeme z podmínky

$$\int_V\langle\rho\rangle dV=\quad.0\Rightarrow\langle\rho\rangle=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\quad,\quad\vec{r}\notin V\Rightarrow\vec{P}(\vec{r})=0 \tag{2.4}$$

Na rozdíl od obvyklého postupu při nepřítomnosti prostorové disperse však nespojujeme vektor polarizace s elektrickým dipólovým momentem, ale klademe

$$\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=\langle\rho\vec{v}\rangle\quad. \tag{2.5}$$

Potom není třeba zavádět vektor intenzity magnetického pole (tedy pokládáme magnetizaci $\vec{M}=0$) a Maxwellovy rovnice mají tvar

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0\quad,\quad\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\quad,\quad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\quad, \tag{2.6}$$

vektor elektrické indukce je

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\quad. \tag{2.7}$$

Ze zobecněného principu symetrie kinetických koeficientů plyne

$$f_{ik}\left(\omega;\vec{r},\vec{r}^{\,\prime}\right)=f_{ki}\left(\omega;\vec{r}^{\,\prime},\vec{r}\right)\quad. \tag{2.8}$$

3 Neohraničené homogenní prostředí

V takovém případě platí $f_{ik}\left(\omega;\vec{r},\vec{r}^{\,\prime}\right)=f_{ik}\left(\omega;\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}\right)$. Je proto výhodné provést i Fourierovu transformaci podle prostorových proměnných, tedy uvažovat koeficienty u členů

$$\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\right]\quad. \tag{3.1}$$

Máme pak

$$D_i=\varepsilon_0\,\varepsilon_{ik}\left(\omega,\vec{k}\right)E_k\quad, \tag{3.2}$$

kde

$$\varepsilon_{ik}\left(\omega,\vec{k}\right)=\delta_{ik}+\int_0^\infty\int f_{ik}\left(\tau;\vec{\rho}\right)\exp\left[i\left(\omega\tau-\vec{k}\cdot\vec{\rho}\right)\right]d^3\vec{\rho}\,d\tau \quad . \tag{3.3}$$

Obdobně jako $\lim_{\omega\to 0}$ vyjadřovala přechod ke statickému poli, vyjadřuje $\lim_{k\to 0}$ přechod k homogennímu poli a tedy k situaci bez prostorové disperse

$$\lim_{k\to 0}\varepsilon_{ik}\left(\omega,\vec{k}\right)=\varepsilon_{ik}\left(\omega\right) \quad . \tag{3.4}$$

Z definice (3.3) plyne

$$\varepsilon_{ik}\left(-\omega,-\vec{k}\right)=\varepsilon_{ki}^{*}\left(\omega,\vec{k}\right) \tag{3.5}$$

a ze symetrie (2.8)

$$\varepsilon_{ik}\left(\omega,\vec{k};\vec{B}_{ext}\right)=\varepsilon_{ki}\left(\omega,-\vec{k};-\vec{B}_{ext}\right) \quad . \tag{3.6}$$

Pro prostředí se středem inverse je

$$\varepsilon_{ik}\left(\omega,\vec{k};\vec{B}_{ext}\right)=\varepsilon_{ki}\left(\omega,\vec{k};-\vec{B}_{ext}\right) \quad . \tag{3.7}$$

Pokud nedochází v prostředí k disipaci energie, je tensor dielektrické permitivity hermiteovský.

4 Isotropní prostředí se středem inverse

Podle předchozího odstavce můžeme zapsat tensor dielektrické permitivity jako

$$\varepsilon_{ik}\left(\omega,\vec{k}\right)=\varepsilon_t\left(\omega,k\right)\left[\delta_{ik}-\frac{k_i k_k}{k^2}\right]+\varepsilon_l\left(\omega,k\right)\frac{k_i k_k}{k^2} \quad . \tag{4.1}$$

Máme

$$\vec{E}\,||\,\vec{k}\Rightarrow\vec{D}=\varepsilon_0\,\varepsilon_l\left(\omega,k\right)\vec{E} \quad , \quad \vec{E}\perp\vec{k}\Rightarrow\vec{D}=\varepsilon_0\,\varepsilon_t\left(\omega,k\right)\vec{E} \quad . \tag{4.2}$$

Také platí

$$\varepsilon_l\left(\omega,0\right)=\varepsilon_t\left(\omega,0\right)=\varepsilon\left(\omega\right) \quad . \tag{4.3}$$

Z výrazu (3.3) vidíme, že každá ze složek tenzoru má stejné chování jako permitivita při frekvenční dispersi. Jsou to analytické funkce komplexní proměnné ω, které nemají v horní polorovině singularity. Pro každé pevné k jsou splněny Kramersovy – Kronigovy relace. Pro $k>0$ není limita funkce $\varepsilon_l\left(\omega,k\right)$ pro $\omega\to 0$ nekonečná ani ve vodivém prostředí. Stejným postupem jako u frekvenční disperse spočteme časové střední hodnoty hustoty energie a hustoty toku energie (Poyntingova vektoru), pouze musíme vytvořit vlnová klubka nejen kolem střední hodnoty frekvence, ale také vlnového vektoru. Výsledkem je

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \frac{\partial \omega \varepsilon_{ik}\left(\omega, \vec{k}\right)}{\partial \omega} E_i\, E_k^* + \frac{1}{\mu_0} B_k\, B_k^* \right] \tag{4.4}$$

a

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left\{ \vec{E} \times \vec{B}^* \right\} - \frac{1}{4} \omega \varepsilon_0\, E_i^*\, E_k \frac{\partial \varepsilon_{ik}\left(\omega, \vec{k}\right)}{\partial \vec{k}} \quad . \tag{4.5}$$

5 Srovnání vztahů s a bez prostorové disperse

Uvažujeme-li prostorovou dispersi, vzali jsme

$$\left\langle \rho \vec{v} \right\rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad , \quad \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\, \vec{E} \quad . \tag{5.1}$$

Pro Fourierovu složku je

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -i\, \omega \vec{P} \tag{5.2}$$

a dosazením z (5.2) a (4.1) do (5.1) dostaneme

$$\left\langle \rho \vec{v} \right\rangle = -i\, \omega \varepsilon_0 \left\{ \left[\varepsilon_t\left(\omega, k\right) - 1 \right] \vec{E} - \frac{1}{k^2} \left[\varepsilon_t\left(\omega, k\right) - \varepsilon_l\left(\omega, k\right) \right] \left(\vec{k} \cdot \vec{E} \right) \vec{k} \right\} \quad . \tag{5.3}$$

Bez prostorové disperse jsme vzali

$$\left\langle \rho \vec{v} \right\rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad , \quad \vec{P} = \varepsilon_0 \left[\varepsilon\left(\omega\right) - 1 \right] \vec{E} \quad , \quad \frac{1}{\mu_0} \vec{M} = \left[\mu\left(\omega\right) - 1 \right] \vec{H} \quad . \tag{5.4}$$

Pro Fourierovu složku platí

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = i\, \vec{k} \times \vec{M} = \mu_0 \left[\mu\left(\omega\right) - 1 \right] \vec{k} \times \vec{H} \tag{5.5}$$

a z Maxwellovy rovnice pro stejnou složku

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{1}{\omega \mu_0\, \mu\left(\omega\right)} \vec{k} \times \vec{E} \quad . \tag{5.6}$$

Využijeme ještě identity

$$\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E} \right) = \left(\vec{k} \cdot \vec{E} \right) \vec{k} - k^2\, \vec{E} \tag{5.7}$$

a dostáváme konečně

$$\left\langle \rho \vec{v} \right\rangle = -i\, \omega \varepsilon_0 \left\{ \left[\varepsilon\left(\omega\right) - 1 + \frac{k^2\, c^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{1}{\mu\left(\omega\right)} \right) \right] \vec{E} - \frac{c^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{1}{\mu\left(\omega\right)} \right] \left(\vec{k} \cdot \vec{E} \right) \vec{k} \right\} \quad . \tag{5.8}$$

Porovnáním členů u $\left(\vec{k} \cdot \vec{E} \right) \vec{k}$ a $\vec{E}$ v (5.3) a (5.8) dostáváme

$$1-\frac{1}{\mu(\omega)}=\lim_{k\to 0}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_t(\omega,k)-\varepsilon_l(\omega,k)}{k^2} \quad , \quad \varepsilon(\omega)=\lim_{k\to 0}\varepsilon_l(\omega,k) \quad . \tag{5.9}$$

Předpokládáme, že $\mu(\omega)\neq 0$. Potom máme

$$\begin{gathered}
\varepsilon_t(\omega,k)\big|_{k=0}=\varepsilon_l(\omega,k)\big|_{k=0}=\varepsilon(\omega) \quad , \quad \left.\frac{\partial\varepsilon_t(\omega,k)}{\partial k}\right|_{k=0}=\left.\frac{\partial\varepsilon_l(\omega,k)}{\partial k}\right|_{k=0} \quad , \\
\frac{1}{\mu(\omega)}=1-\frac{\omega^2}{2c^2}\left[\left.\frac{\partial^2\varepsilon_t(\omega,k)}{\partial k^2}\right|_{k=0}-\left.\frac{\partial^2\varepsilon_l(\omega,k)}{\partial k^2}\right|_{k=0}\right] \quad .
\end{gathered} \tag{5.10}$$