Vypočtěte determinant pomocí úprav a Laplaceovy věty.
Evaluate the following determinants by row operations and Laplace theorem.

Poznámky: a) vytknutí, **b)** Laplaceův rozvoj podle nejvhodnějšího sloupce nebo řádku.

Comments: a) we take out some number(s), **b)** we expand determinant along some row or column.

1. $$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \overset{a)}{=} 2\cdot 3\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 24\cdot 2\cdot (-1)^{4+4}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 48\cdot 1 = 48$$

2. $$\begin{vmatrix} \boxed{2} & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ \boxed{1} & 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} -8 & -9 & 5 \\ \boxed{-8} & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & -14 & 4 \\ -8 & 5 & 1 \\ \boxed{3} & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -14 & 4 \\ -5 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 294$$

3. $$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 8 & 3 \\ -2 & 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 9 & -7 \\ 0 & -4 & 17 & -6 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 9 & -7 \\ -4 & 17 & -6 \\ \boxed{3} & -8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 9 & -7 \\ \boxed{-1} & 9 & -5 \\ 3 & -8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 9 & -5 \\ 0 & 19 & -14 \end{vmatrix} = 38$$

4. $$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} -1\cdot (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 5 \\ 1 & \boxed{-6} & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ \boxed{-2} & 0 & 3 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} -1\cdot 4\cdot (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

5. $$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} (-1)\cdot (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -2 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{a)}{=} -4\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & \boxed{3} \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ 10 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot (-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 8 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{a)}{=}$$

$$= 2\cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & \boxed{-1} \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 2\cdot (-1)\cdot (-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -82$$

7. $$\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ -5 & -4 & -7 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot(-1)^{5+5}\cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & -7 & 5 \end{vmatrix} \overset{a)}{=} 2\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{-1} \\ -5 & -4 & -7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 4\cdot(-1)\cdot(-1)^{3+4}\cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 4\cdot 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\cdot(8-4) = -48$$

8. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{a)}{=}$$

$$= -1\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2\cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 11 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} -2\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 11 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot[-20-12-(165)] = 394$$

9. $$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{b)}{=}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 16$$

10. $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} -5 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & \boxed{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -7 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} -1\cdot 2\cdot(-1)^{4+4}\cdot \begin{vmatrix} -7 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{a)}{=} 2\cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 2\cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 36$$

11. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 12 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{b)}{=} 2\cdot(-1)^{5+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \boxed{1} \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -7 & 0 \\ -7 & -10 & -13 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \overset{b)}{=}$$

$$= 2\cdot 1\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2 & -7\\ -7 & -10 & -13\\ 0 & -5 & -5\end{vmatrix} \overset{a)}{=} -2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-5)\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 7 & 10 & 13\\ 0 & 1 & \boxed{1}\end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix}1 & -5 & 0\\ 7 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= 10\cdot 32 = 320$$

12. $$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 5 & \boxed{1} & 4 & 2 & 7 & 3\\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0\\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6\\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0\\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3\\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0\\ 4 & 0 & 1 & 2 & -4 & 7\end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 9 & 0\\ 3 & 1 & \boxed{1} & 0 & 3\\ 1 & 8 & 0 & 27 & 0\\ 4 & 1 & 2 & -4 & 7\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 9 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 8 & 0 & 27 & 0\\ -2 & -1 & 0 & -4 & 1\end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 9 & 0\\ 1 & 8 & 27 & 0\\ -2 & -1 & -4 & 1\end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}\boxed{1} & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\\ 1 & 8 & 27\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 6 & 24\end{vmatrix} = 12$$

13. $$\begin{vmatrix}\boxed{3} & 0 & 0 & 7\\ 0 & 3 & 7 & 0\\ 0 & 7 & 3 & 0\\ 7 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 3 & 7 & 0\\ 0 & 7 & 3 & 0\\ 4 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix} \overset{a)}{=} 4\cdot\begin{vmatrix}3 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 3 & 7 & 0\\ 0 & 7 & 3 & 0\\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 10\\ 0 & 3 & 7 & 0\\ 0 & 7 & 3 & 0\\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1\end{vmatrix} \overset{b)}{=}$$

$$= 4\cdot 1\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 10\\ 3 & 7 & 0\\ 7 & 3 & 0\end{vmatrix} \overset{b)}{=} (-4)\cdot 10\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 7\\ 7 & 3\end{vmatrix} = 40\cdot(9-49) = 1600$$

14. $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & \boxed{1}\\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0\\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot(-1)^{2+5}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \boxed{1} & 1\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ -3 & -2 & 0 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ -3 & -2 & 0 & 1\end{vmatrix} \overset{b)}{=} (-1)\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}\boxed{1} & 2 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-16) = 16$$

15. $$\begin{vmatrix}-2 & 5 & 0 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 7 & -2\\ 2 & 6 & -1 & 3 & 2\\ 7 & 4 & -4 & 2 & 3\\ 0 & -2 & -1 & 4 & \boxed{1}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & 7 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -1 & 15 & 0\\ 2 & 10 & 1 & -5 & 0\\ 7 & 10 & -1 & -10 & 0\\ 0 & -2 & -1 & 4 & 1\end{vmatrix} \overset{b)}{=} 1\cdot(-1)^{5+5}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 7 & 1 & 0\\ 3 & -4 & -1 & 15\\ 2 & 10 & 1 & -5\\ 7 & 10 & -1 & -10\end{vmatrix} \overset{a)}{=}$$

$$= 5\cdot\begin{vmatrix}-2 & 7 & \boxed{1} & 0\\ 3 & -4 & -1 & 3\\ 2 & 10 & 1 & -1\\ 7 & 10 & -1 & -2\end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix}-2 & 7 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 3\\ 4 & 3 & 0 & -1\\ 5 & 17 & 0 & -2\end{vmatrix} \overset{b)}{=} 5\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ 4 & 3 & \boxed{-1}\\ 5 & 17 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot\begin{vmatrix} 13 & 12 & 0\\ 4 & 3 & -1\\ -3 & 11 & 0\end{vmatrix} \overset{\text{b)}}{=} 5\cdot(-1)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 13 & 12\\ -3 & 11\end{vmatrix} = 5\cdot(143+36) = 895$$

16. $$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0\\ \boxed{1} & 5 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -19 & -30 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5\end{vmatrix} \overset{\text{b)}}{=} (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -19 & -30 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot\begin{vmatrix} -19 & -30 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 0 & -30\\ 0 & 1 & 0 & -19\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{vmatrix} \overset{\text{b)}}{=} (-1)\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix} -19 & -30 & 0\\ 1 & 5 & -30\\ 0 & 1 & -19\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 & -35 & 30\\ 1 & 5 & -30\\ 0 & 1 & -19\end{vmatrix} \overset{\text{a)}}{=}$$

$$= -5\cdot\begin{vmatrix} 4 & 7 & -6\\ 1 & 5 & -30\\ 0 & 1 & -19\end{vmatrix} \overset{\text{a)}}{=} 5\cdot\begin{vmatrix} 4 & 7 & 6\\ \boxed{1} & 5 & 30\\ 0 & 1 & 19\end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 0 & -13 & -114\\ 1 & 5 & 5\\ 0 & 1 & 19\end{vmatrix} \overset{\text{b)}}{=} 5\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -13 & -114\\ 1 & 19\end{vmatrix} =$$

$$= -5\cdot(-13\cdot 19+114) = 665$$

17. $$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b & c+a & d-a\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix} \overset{\text{b)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ b & a+c & d-a\\ \boxed{1} & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & c+a & d-a-b\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= d-a-b$$

18. $$\begin{vmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ -1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{vmatrix} \overset{\text{a)}}{=} \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 & -3 & 2\\ 2 & 1 & 0 & \boxed{1}\\ -4 & 5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{20}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 7 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -2 & 0\end{vmatrix} \overset{\text{b)}}{=}$$

$$= \frac{1}{20}\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3\\ 0 & 7 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix} \overset{\text{a)}}{=} \frac{1}{20}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3\\ 0 & 7 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot(1+21) = \frac{11}{5}$$

19. $$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 4 & 1\\ 2 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 3 & 0 & -2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 4 & 4 & -3\\ 0 & -3 & 4 & 2 & -1\end{vmatrix} = -720$$

20. $$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 & 0\\ -2 & 4 & 4 & 2 & -2\\ -3 & 2 & -3 & 3 & 3\\ 3 & 4 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0\end{vmatrix} = 312$$

21. $$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 4 & -1 & 5\\ 4 & 3 & -2 & 1 & 4\\ 3 & -3 & 3 & 0 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 0 & 3\end{vmatrix} = -12$$

22. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 382$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -58$

24. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 20$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -90$

26. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 18$

27. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 302$

28. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 59$