MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

Poznámky k předmětu M1020

Seminární skupina 03

BRNO 2008

Petr Liška

Aktualizace

- *17.9.2008* Vytvoření
- *18.9.2008* Přidání kapitoly Elementární fce a příkladů k procvičení
- *19.9.2008* Přidání výsledků k příkladům
- *20.9.2008* Přidání příkladů na dělení a určení znaménka, pár příkladů na definiční obor (7.-10.)
- *26.9.2008* Racionálně lomené funkce (rozklad na parciální zlomky, příklady), poznámky k soustavám lineárních rovnic, kvadratickým rovnicím a komplexním číslům, opraveny některé překlepy
- *4.10.2008* Příklady na derivace
- *10.10.2008* Spojitost, L'Hospitalovo pravidlo
- *11.10.2008* - Příklady na průběh funkce

Další aktualizace:

- *12-13.10.2008* - Pokusím se dodat řešený příklad na průběh funkce a výsledky k příkladům na průběh.
- *13. - 20. 10.2008* - Rozšíření informací o polynomech, diferenciál, Taylorův polynom

Omlouvám se za stále chybějící část o goniometrických a cyklometrických fcích, je to problém technického charakteru.

Předmluva

Zdravím všechny čtenáře (doufám, že nějací jsou, protože je to docela dost práce vytvořit tyhle stránky :-)). V tomto dokumentu se budu snažit vystavovat nějaké věci, které nestihneme na cviku nebo si budu myslet, že neuškodí, když se na ně kouknete. Hlavním cílem je ovšem poskytnout Vám nějaké příklady k procvičení (samozřejmě s výsledky).

Obsah bude postupně narůstat, jak budeme postupovat semestrem.

Jakékoliv připomínky, poznámky, přání jsou vítány na mailu `xliska@math.muni.cz`

Aktuální verze těchto poznámek je k vždy k dispozici na `www.math.muni.cz/~xliska/seminar.pdf` a ve studijních materiálech v ISu.

Omluvte občas zhoršenou kvalitu textu, obrázků i typografie…

Enjoy! :-)

Obsah

Kapitola 1

Polynomy

1.1 Hornerovo schéma

Pár polynomů u kterých můžete hledat kořeny (stačí reálné), výsledky najdete na konci.

1. $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

2. $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 8x - 12$

3. $x^6 - 2x^4 - 11x^2 + 12$

4. $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$

5. $x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 8x + 12$

Samozřejmě, že mnohé z vás napadne (možná nemnohé, ale někoho určitě), že všechny polynomy u kterých jsme hledali kořeny, byly svým způsobem divné, všechny měly totiž za vedoucí koeficient číslo 1 (vedoucí koeficient se nazývá to číslo, které je u proměnné s nejvyšším stupněm). Následující věta nám říká, jak tipovat kořeny polynomu, který jako vedoucí koeficient má nějaké celé číslo.

Věta. *Nechť* $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ *je polynom,* $a_n \ldots a_0 \in \mathbb{Z} a \frac{r}{s}$ *je racionální kořen polynomu* f *takový, že* $(r, s) = 1$*. Pak* s *dělí* a_n *a* r *dělí* a_0*.*

Trochu lidštěji řečeno, pokud mám polynom takový, že jeho koeficienty jsou celá čísla, tak za jeho kořeny volím takové zlomky v základním tvaru (tj. už se nedají nijak krátit, nemělo by přece smysl volit kořen $\frac{4}{12}$, když můžu volit $\frac{1}{3}$), že čitatel dělí absolutní člen polynomu (tj. ten, který je tvořen jen číslem) a jmenovatel dělí koeficient u vedoucího členu polynomu. Pokud rozmyslíte naše staré známe polynomy, tak je vidět, že jsem celou dobu vlastně postupovali podle této věty. Dělitelem vedoucího členu byla totiž jenom +/- jednička a tak jsme vlastně volili zlomky jako $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{-2}{1}$ atd.

Ilustrujme to na následujícím příkladu, snad to bude zřejmější. Cílem je najít kořeny polynomu

$$6x^5 + 7x^4 - 15x^3 - 5x^2 + 9x - 2$$

Čísla, která dělí vedoucí koeficient (číslo 6) jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, čísla dělící absolutní člen jsou $\pm 1, \pm 2$, má tedy smysl volit kořeny ve tvaru $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{6}$ a samozřejmě další,ta samá čísla,akorát se znamínkem mínus. Některá z nich ovšem vyjadřují ta stejná čísla (dají se krátit), čili počet čísel k ověření není nakonec tak drastický :-).

Možno si procvičit na následujících polynomech:

6. $4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$
7. $4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1$
8. $6x^4 - x^3 - 26x^2 + 4x + 8$

1.2 Příklady k procvičení

Proveďte dělení polynomů (se zbytkem, pokud vyjde):

1. $(x^8 - x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$
2. $(2x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1) : (x^2 - 3x + 1)$
3. $(x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1) : (x^3 - 2x - 1)$
4. $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1)$

5. $(x^3 - 3x^2 - x - 1) : (3x^2 - 2x + 1)$

Určete znaménko funkce na jejím definičním oboru:

1. $\frac{x^2-7x+10}{(x-3)(x+2)(x+5)}$

2. $\frac{(x-4)^4(x-1)^3(x^2+2)^5}{(x+2)(x+3)^6(x^2-2x+2)^3}$

3. $\frac{x^5(x-3)(x^2+1)^3}{(x-1)^4(x+5)^5(x-2)(x^2+4)^5}$

Kapitola 2

Elementární fce

Některé jsem s vámi trošku odbyl a teď mě hryže svědomí :-) Připomenu tedy některá pravidla pro posuny. Známe-li graf fce $y = f(x)$, lze z něj snadno odvodit grafy následujících fcí:

- $y = -f(x)$ má graf souměrný s grafem fce $y = f(x)$ podle osy x
- $y = f(-x)$ má graf souměrný s grafem fce $y = f(x)$ podle osy y
- $y = \|f(x)\|$ má část grafu totožnou s grafem fce $y = f(x)$ pro všechna x, pro něž je $f(x)$ nezáporné, a část grafu totožnou s grafem fce $y = f(-x)$ pro všechna x, pro něž je $f(x)$ záporné (čili co je nad osou x je ok, co je pod osou jde souměrně podle ní nahoru)
- $y = f(x) + q$ má graf, který dostaneme posunutím grafu fce $y = f(x)$ ve směru osy y, je-li q kladné, tak ve stejném směru jako osa y, je-li g záporné, tak ve směru opačném, velikost posunutí je rovna $\|q\|$
- $y = f(x+p)$ má graf, který dostaneme posunutím grafu fce $y = f(x)$ ve směru osy x, je-li p záporné, tak ve stejném směru jako osa x, je-li p kladné, tak ve směru opačném, velikost posunutí je rovna $\|p\|$

2.1 Lineární fce

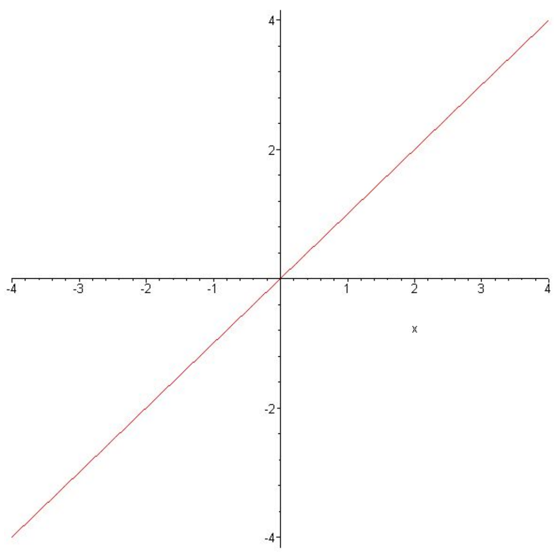
Lineární fce je tvaru

$$y = ax + b, kdea, b \in \mathbb{R},$$

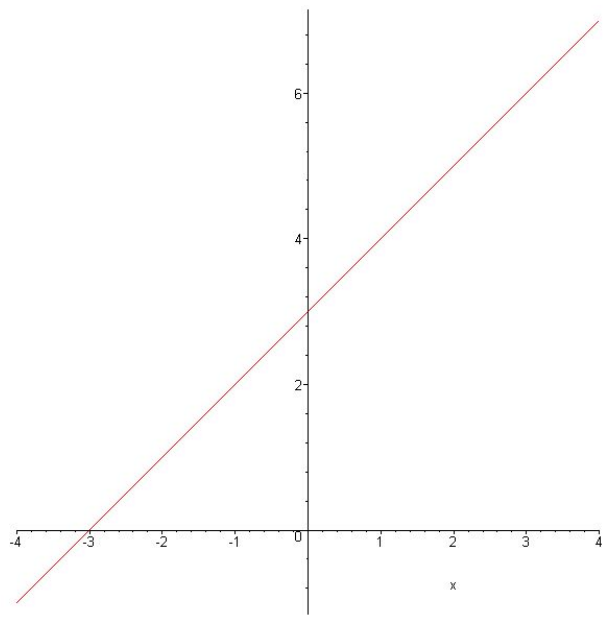
jedná se tedy o speciální případ polynomu. Jejím grafem je přímka. Tento tvar zápisu je docela vhodný, protože koresponduje se směrnicovým vyjádřením přímky, tak jak ho známe z analytické geometrie, roli směrnice hraje číslo a. Pro připomenutí, co je to směrnice. Směrnice je tangenta úhlu (tj. hodnota funkce tangens), který svírá přímka s osou x.

Pár grafů na ukázku:

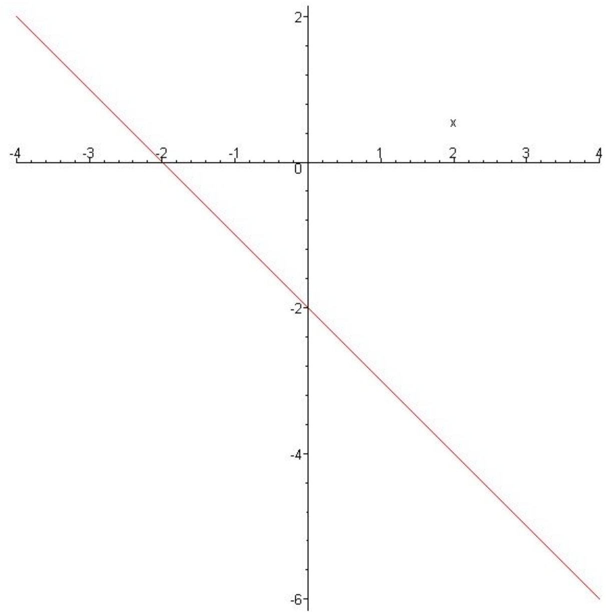
$y = x$

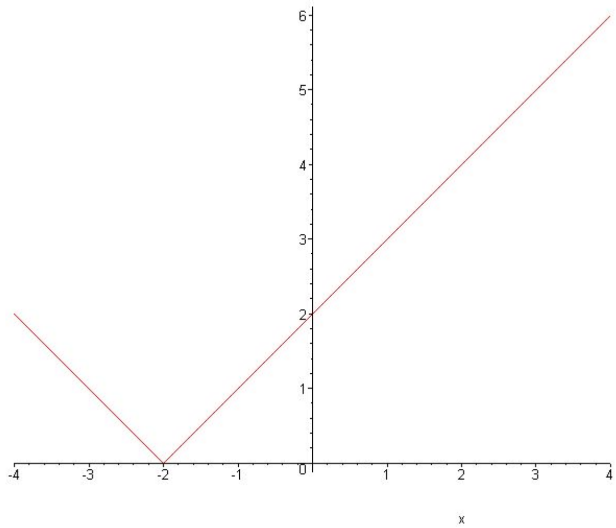


$y = x + 3$



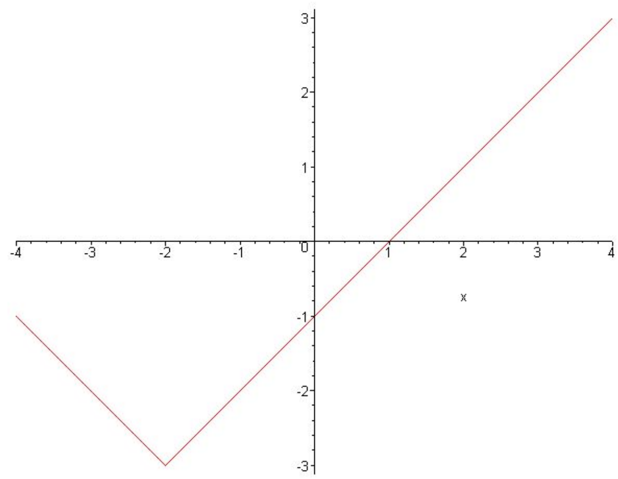
$y = -x - 2$ $\qquad\qquad$ $y = \| -x - 2 \|$





Samozřejmě, že se může stát, že ne celý výraz je v absolutní hodnotě. Co potom? Buď je situace dostatečně jednoduchá a umíme si poradit díky základním pravidlům (viz třeba následující příklad) a nebo je potřeba se zachovat podle definice absolutní hodnoty. (Pro připomenutí $\|x\| = x$ pro $x \geq 0$ a $\|x\| = -x$ pro x menší 0) Bude vidět na pozdějším příkladu.

$$y = \| - x - 2\| - 3$$



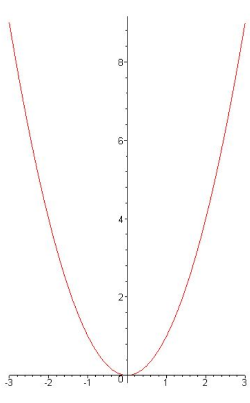
2.2 Kvadratická fce

Jedná se opět o zvláštní případ polynomiální fce. Kv. fce je tvaru

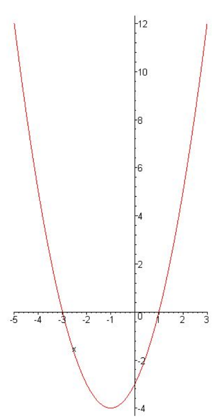
$$y = ax^2 + bx + c, kdea, b, c \in \mathbb{R}.$$

Grafem je parabola. Opět pár ukázek:

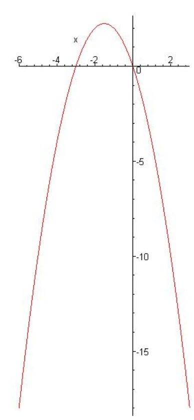
$y = x^2$



$y = x^2 + 2x - 3$



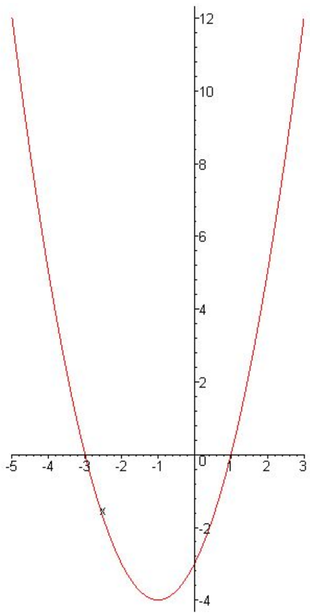
$y = -x^2 - 3x$



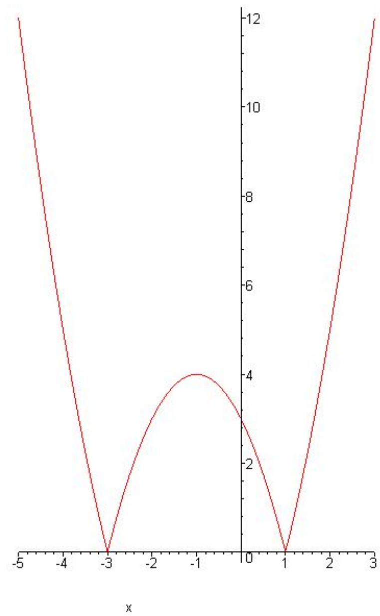
Důležité je vědět, kterým směrem se parabola „otvírá“, tj. dávat pozor na znaménko u x^2. Pro přibližné nakreslení stačí znát průsečíky s osou x, vrchol se pak dá již snadno dopočítat. Druhou možností je doplnění na úplný čtverec a pak aplikovat základní pravidla pro posun.

Trocha hrátek s absolutní hodnotou:

$$y = x^2 + 2x - 3$$

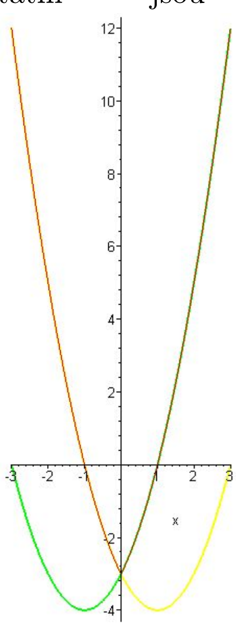


$$y = \|x^2 + 2x - 3\|$$

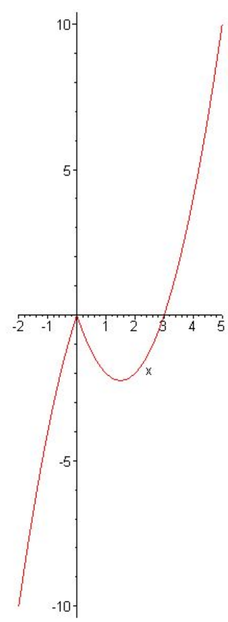


$$y = x^2 + 2\|x\| - 3$$

(výsledný graf je červený, ostatní jsou pomocné)



$$y = \|x\|(x - 3)$$



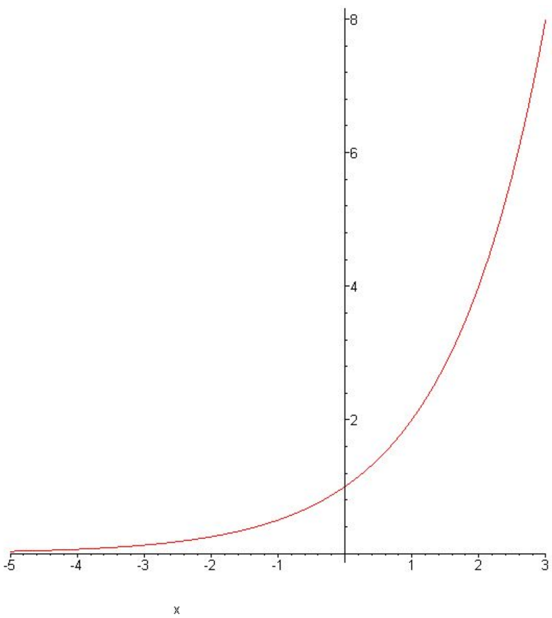
2.3 Exponenciální fce

Exponenciální fcí rozumíme fci tvaru

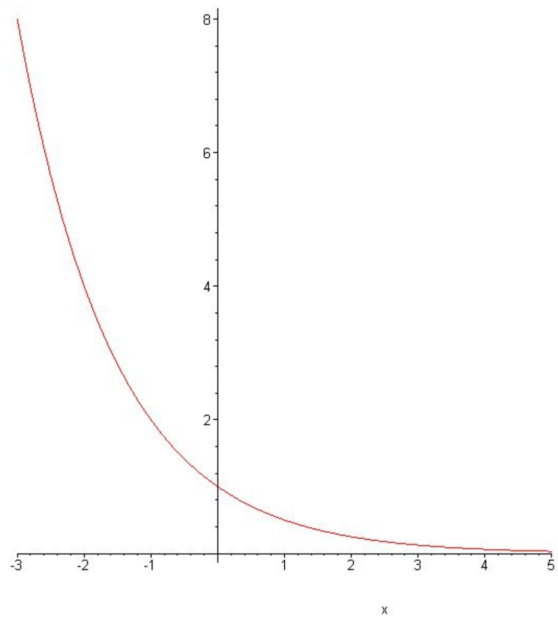
$$y = a^x, kdea \in \mathbb{R}^+.$$

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla, oborem hodnot jsou všechna kladná reálná čísla. Fce je pro a větší 1 rostoucí, pro a menší 1 je klesající. Největší význam má fce jejímž základem je Eulerovo číslo, tedy $y = e^x$. Exponenciální fce se poměrně často vyskytuje i v přírodě (rozpad jádra, absorpce záření ...).

$a > 1$

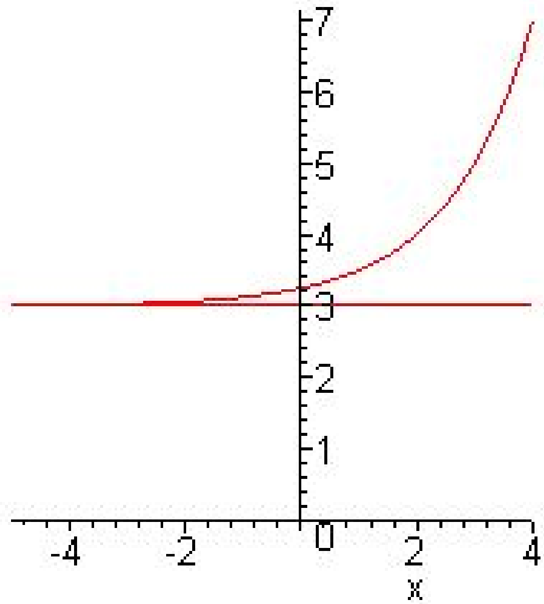


$0 < a < 1$



Je dobré si všimnout, že se funkce neustále blíží k ose x, ale nikdy ji neprotne (takovou přímku nazýváme asymptotou), toho se dá dobře využít při posunování grafu (pro přibližné nakreslení prostě jen posuneme asymptotu). Další dobrou připomínkou je, že fce $y = a^x$ vždy prochází bodem $[0, 1]$, neboť cokoliv na nultou je jedna (čili spolu s asymptotou můžeme posunout i tento významný bod pro trochu přesnější obrázek).

$y = 2^{x-2} + 3$



2.4 Logaritmická fce

Definice. Buď $a \in \mathbb{R}, a$ větší 0, $a \neq 1$. Funkce inverzní k funkci $y = a^x$ se nazývá logaritmická funkce o základu a, značí se $y = log_a x$.

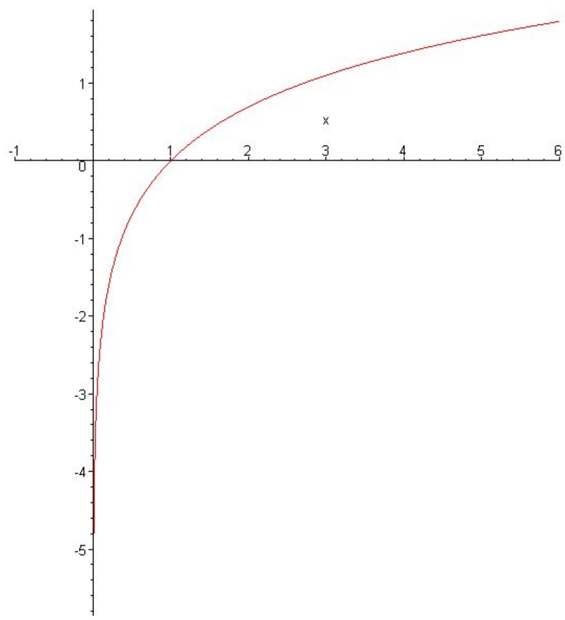
Možno připomenout i „překrásnou" definici toho, co je to logaritmus nějakého čísla. Logaritmem o základu a nějakého čísla x rozumíme číslo y takové, že když umocníme základ logaritmu (a) dostaneme číslo logaritmované (x).

Nejvýznamnější logaritmy jsou o základu e (Eulerovo číslo) - přirozený logaritmus a o základu 10 - dekadický logaritmus.

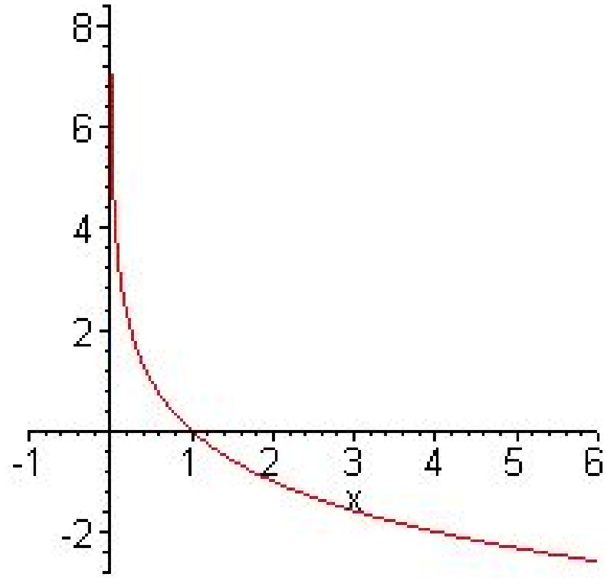
Definičním oborem log. fce. jsou všechna kladná reálná čísla, oborem hodnot jsou všechna reálná čísla. Fce je rostoucí na celém definičním oboru pro základ a větší než 1 a klesající pro a menší než 1.

Graf i některé další vlastnosti (průsečík s osou x, asymptota . . .) plynou z definice (inversnosti k exp. fci.).

$y = ln(x)$



$y = log_{\frac{1}{2}} x$



2.5 Lineárně lomená fce

Lineárně lomená fce je tvaru

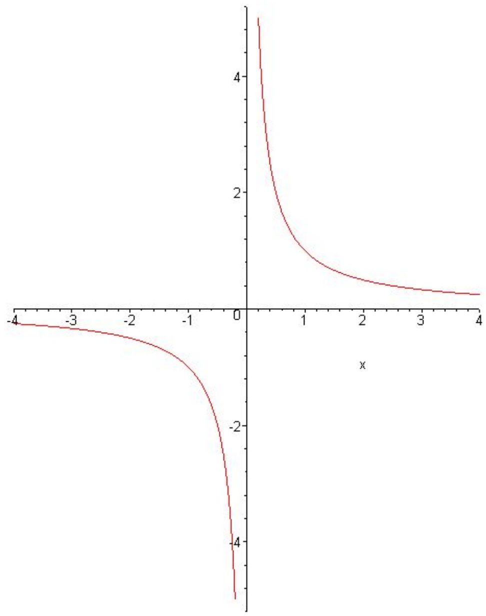
$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, kde a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Jedná se o speciální případ racionální fce (viz. cvičení 23.9.2008). Grafem je rovnoosá hyperbola. Nejjednodušším případem je $y = \frac{1}{x}$, tzv. nepřímá úměra. Jelikož grafem je hyperbola, vyplatí se při posunovaní grafu posunovat asymptoty. Nutno upozornit, že první je výraz potřeba upravit do tvaru

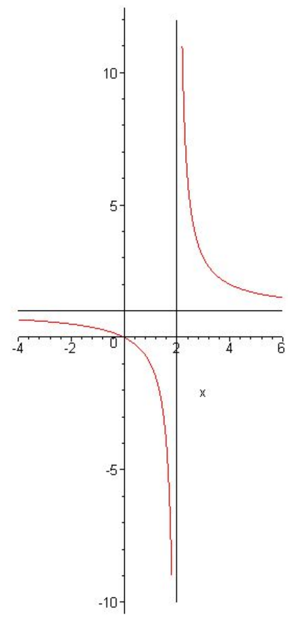
$$y = k + \frac{l}{mx+n}, kde k, l, m, n \in \mathbb{R}.$$

Posun je pak dán čísly k, n podle základních pravidel.

$$y = \frac{1}{x}$$



$$y = 1 + \frac{2}{x-2}$$



2.6 Hyperbolické fce

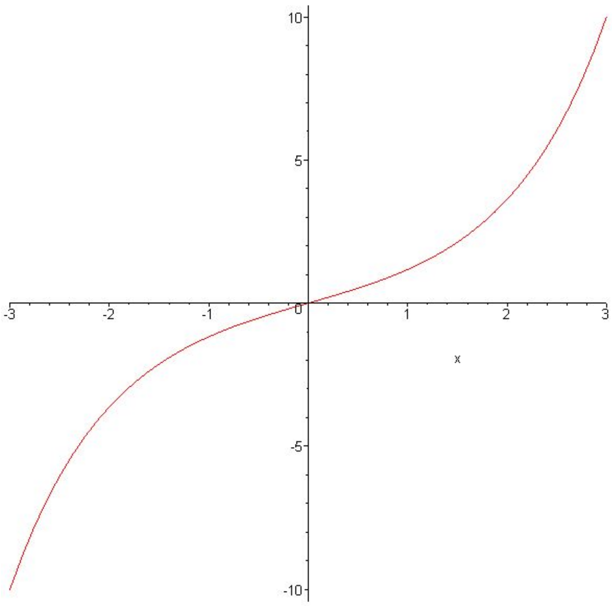
Uvádím je pro zajímavost, jednou se to může hodit. Tyto fce jsou definovány následovně:

$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

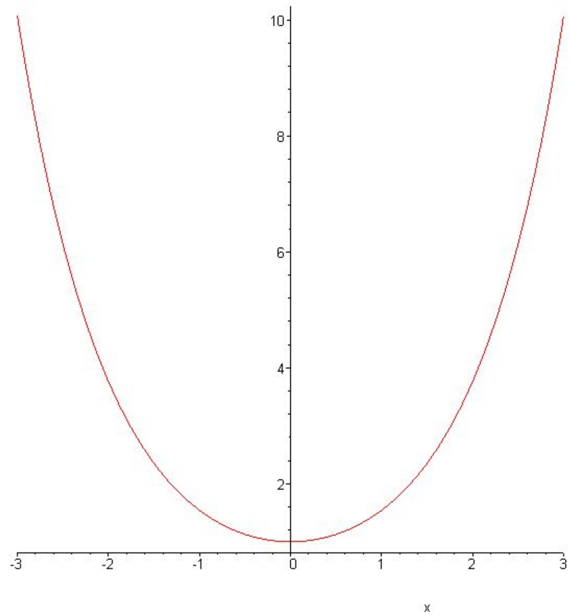
Důležité jsou následující vlastnosti:

$$cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1, (sinh(x))' = cosh(x), (cosh(x))' = sinh(x)$$

$y = sinh(x)$



$y = cosh(x)$



2.7 Příklady k procvičení

Určete definiční obor fcí (tj. pro která x má daný výraz smysl):

1. $y = \frac{x+1}{x-3}$

2. $y = \frac{x}{13x^2+10x-3}$

3. $y = \frac{1}{\|x+3\|-4}$

4. $\sqrt{x+2}$

5. $y = \sqrt{\frac{x+2}{4x-6}}$

6. $y = \sqrt{\log_5(x)+1}$

7. $y = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2}$

8. $y = \frac{3}{4-x^2} + \ln(x^3 - x)$

9. $y = ln[x^2(-x^2+3x+4)] + \frac{1}{\log_2 \|x\|}$

10. $y = \sqrt{(x-1)(e^{2x} - 4e^x + 3}$

Nakreslete grafy následujících fcí:

1. $y = -2x + 1$
2. $y = -2\|x\| + 1$
3. $y = -2\|x+1\| - 3$
4. $y = \|x+2\| - \|3-x\|$
5. $y = x^2 + x + 1$
6. $y = -x^2 - 3x$
7. $y = x^2 - 6x + 9$
8. $y = 3x^2 + 6x + 3$
9. $y = x^2 - 3\|x\|$
10. $y = \|2x+1\| - x\|x-4\|$
11. $y = 2^x - 4$
12. $y = 2^{x+1} - 4$
13. $y = (\frac{1}{2})^{x-3} - 1$
14. $y = -(\frac{1}{2})^{x+2} + 4$
15. $y = 2^{\|x+1\|} - 4$
16. $y = log_2(x+4)$
17. $y = log_2(x+4) - 1$
18. $y = \| \log_2(x+4) - 1\|$

19. $y = \| \log_2(x+4) \| - 1$

20. $y = \log_2 \| (x+4) \| - 1$

Kapitola 3

Racionálně lomené funkce

Definice. Buď $P(x)$ polynom stupně n a $Q(x)$ nenulový polynom stupně m. Funkci

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

nazýváme racionální lomenou funkcí, a to ryzí, je-li $m > n$ a neryzí, je-li $m \leq n$.

Věta (Věta o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky)**.** *Buď $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ryze lomená racionální funkce, nechť polynomy P, Q nemají společné kořeny a buď*

$$Q(x) = a_n(x-\alpha)^k \cdot \cdots \cdot (x-\lambda)^r[(x-a)^2+b^2]^s \cdot \cdots \cdot [(x-p)^2+q^2]^v$$

rozklad jmenovatele v $\mathbb{R}$. Pak existuje n reálných čísel

$$A_1, \ldots, A_k, \ldots, L_1, \ldots, L_r, M_1, N_1, \ldots, M_s, N_s, \ldots, U_1, V_1, \ldots, U_v, V_v$$

takových, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro něž $Q(x) \neq 0$, platí

$$\begin{aligned} R(x) = [\frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots + \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \cdots + \frac{L_r}{(x-\lambda)^r} + \cdots + \frac{L_1}{(x-\lambda)}] + \\ + \frac{M_s x + N_s}{[(x-a)^2+b^2]^s} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{(x-a)^2+b^2} + \\ + \cdots + \frac{U_v x + V_v}{[(x-p)^2+q^2]^v} + \cdots + \frac{U_1 x + V_1}{(x-p)^2+q^2} \end{aligned}$$

Předchozí věta působí poněkud komplikovaně (spousta písmenek :-)), ale není tomu tak. Je pouze potřeba si ji pořádně přečíst a algoritmus rozkladu z ní snadno vyplyne. Vše snad objasní příklad.

Příklad: Rozložte funkci $R(x) = \frac{12}{x^6+x^5+2x^4+2x^3}$ na parciální zlomky.

Nejprve je potřeba rozložit jmenovatele. Vytkneme x^3 a dostaneme $x^3(x^3+x^2+2x+2)$, dále např. pomocí Hornerova schématu zjistíme, že jediným kořenem polynomu v závorce je -1 a celý rozklad jmenovatele tedy vypadá:

$$x^3(x+1)(x^2+2).$$

Můžeme tedy aplikovat naši větu a psát:

$$\frac{12}{x^3(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+2}.$$

Vynásobíme-li celou rovnost výrazem $x^3(x+1)(x^2+2)$, dostaneme rovnost dvou polynomů (po příslušném krácení):

$$2 = Ax^{12}(x+1)(x^2+2)+Bx(x+1)(x^2+2)+C(x+1)(x^2+2)+Dx^3(x^2+2)+(Ex+F)x^3(x+1).$$

Po chytrém roznásobení (zvažte, že docela dobře víte, čemu se rovnají všechny součiny bez výrazného počítání) dostaneme:

$$\begin{aligned} 12 = {} & A(x^5+x^4+2x^3+2x^2) + B(x^4+x^3+2x^2+2x)+ \\ & + C(x^3+x^2+2x+2) + D(x^5+2x^3) + E(x^5+x^4) + F(x^4+x^3) \end{aligned}$$

Dané polynomy musí být identické, tj. mají stejné koeficienty, jejich porovnáním dostaneme soustavu šesti rovnic o šesti neznámých.

$$\begin{array}{lllllll} x^5: & A & & & +D+E & & = 0 \\ x^4: & A & +B & & & +E+F & = 0 \\ x^3: & 2A & +2B & +C+2D & & +F & = 0 \\ x^2: & 2A & +2B & +C & & & = 0 \\ x^1: & & 2B+2C & & & & = 0 \\ x^0: & & & 2C & & & = 12 \end{array}$$

Nyní je potřeba vyřešit nějakým způsobem danou soustavu (z posledních tří rovnic rychle dostaneme koeficienty A, B, C, po jejich dosazení do prvních tří dostaneme tři rovnice o třech neznámých, které se již dají snadno vyřešit).

$$A = 3, B = -6, C = 6, D = -4, E = 1, F = 2$$

Výsledný rozklad tedy vypadá:

$$\frac{12}{x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3} = \frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{4}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+2}$$

Mnoha lidem přijde rozklad funkcí na parciální zlomky jednoduchý, přesto doporučuji procvičit:

1. $\frac{12x+7}{x^2-9x+18}$
2. $\frac{1}{x^3(x+1)}$
3. $\frac{x+1}{(x^2+1)(x^3+x)}$
4. $\frac{3x^5+5x^4+3x^3+8x^2-2x+7}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$
5. $\frac{x^2}{x^4-16}$
6. $\frac{x}{x^3+1}$
7. $\frac{3x^3+6x^2-38x+20}{x^4-x^3-4x^2+4x}$
8. $\frac{x-1}{x^4+3x^2+2}$

Kapitola 4

Limity

Nemá valného smyslu se zde rozepisovat o nějaké teorii (čistě bych opisoval skripta), postupy, jak příklady počítat, jsme probrali na cvičení, zanechám zde tedy pouze příklady k počítání, výsledky, popř. návody jsou na konci, příklady jsou trochu členěny podle typu a obtížnosti.

Jinak nezapomeňte, že limita není nic hrozného a všechny ty „strašné“ definice v podstatě pouze precizují laické vyjádření toho, co je limita funkce v bodě.

Limita funkce v daném bodě je hodnota, ke které se neomezeně blíží hodnota funkce, jestliže se hodnota proměnné neomezeně blíží k zadanému číslu.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$
2. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+2x-15}$
3. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}$
4. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^4-16}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$
6. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$
7. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}$
8. $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$
9. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{x^5-x^4}{\sqrt[3]{1+x^4}-1}$
13. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$
14. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan x}$
17. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$
18. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x+\tan^2 x}{x\sin x}$
19. $\lim_{x\to \infty} \frac{6x^3+2x^2}{3x^3+x^2+x-5}$
20. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^4+x^3+6}{x^3+6x^2+x}$
21. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4+x^3+6}{x^3+6x^2+x}$
22. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^4+x+1}{x^3+1}$
23. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+x^2+8}{6x^3+12}$
24. $\lim_{x\to \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$
25. $\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-3}$
26. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$
27. $\lim_{x\to 1} \frac{6}{x^2-1}$
28. $\lim_{x\to 2} \frac{x}{(x+5)^2}$

Kapitola 5

Spojitost

Připomeňme si pojem spojitosti:

Definice. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 spojitá, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definice. Buď f funkce, $I \subseteq D(f)$ interval. Řekneme, že f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I a patří-li levý (pravý) koncový bod do I, je v něm spojitá zprava (zleva). (Píšeme $f \in C(I)$ a je-li $I = [a, b]$, také $f \in C[a, b]$.)

Všechny tzv. elementární funkce, tj.

- mnohočleny
- exponenciální a logaritmické funkce
- goniometrické a cyklometrické funkce
- obecná mocnina

a všechny funkce, které z nich vzniknou konečným počtem aritmetických operací sečítání, odčítání, násobení a dělení a skládáním, jsou spojité na svých definičních oborech. Tedy limita takové funkce v daném bodě je rovna funkční hodnotě.

Ze spojitosti plynou některé zajímavé vlastnosti. Předpokládejme tedy, že funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak platí:

- $f(x)$ je na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své největší a nejmenší hodnoty
- $f(x)$ nabývá všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou
- je-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje takový bod c, že $f(c) = 0$

Zkusme malý příklad: Určete parametr a tak, aby funkce f byla spojitá ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pro } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 \text{pro } x > 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

Funkce je zřejmě spojitá na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$. Jediným bodem, kde by mohl být problém je bod $x = 1$. Potřebujeme, aby $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$. Snadno spočteme, že

$$\lim_{x \to 1^-} x + 1 = f(1) = 2$$

a jelikož

$$\lim_{x \to 1^+} 3 - ax^2 = 3 - a$$

dostáváme $3 - a = 2$, tedy $a = 1$.

Kapitola 6

Derivace

Zopakujme zde jen ta nejdůležitější pravidla, která potřebujeme znát při derivování nějaké zadané funkce.

Mají-li funkce $f(x), g(x)$ na množině M derivaci, pak na množině M platí:

1. $(cf(x))' = cf'(x)$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. Je-li $g(x) \neq 0$, pak $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Nechť funkce $u = g(x)$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a nechť funkce $y = f(u)$ má vlastní derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má vlastní derivaci v bodě x_0 a platí:

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

Jednoduše řečeno, derivace složené funkce je rovna derivaci vnější funkce krát derivace funkce vnitřní.

Uveďme i derivace elementárních funkcí:

1. $c' = 0$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{R}$

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$

14. $(arccotx)' = -\frac{1}{x^2+1}$

Zderivujme si pár funkcí, ať je trochu vidět, jak to funguje:

1. $(2x^4 + x^3 - 2x)' = 2 \cdot 4x^3 + 3x^2 - 2 \cdot 1x^0 = 8x^3 + 3x^2 - 2$

2. $(3\sqrt[3]{x})' = (3x^{\frac{1}{3}})' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

3. $(x^2 \sin x)' = 2x \sin(x) + x^2 \cos x$

4. $(\frac{\cos x - 1}{\sin x})' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - (\cos x - 1) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1+\cos x}{1-\cos^2 x} = -\frac{1}{1+\cos x}$

5. $(\sqrt{e^x + x^2})' = \frac{1}{2}(e^x + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (e^x + x^2)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{e^x+x^2}}(e^x + 2x)$

Najděte derivace následujících funkcí:

1. $y = 3x^2 - 6x + 3$
2. $y = 6x^2 + 3\sin x$
3. $y = 2e^x - 3\ln x$
4. $y = \sqrt[6]{x^7}$
5. $y = e^x \sin x - \tan x$
6. $y = x^2 e^x - \operatorname{arctan} x$
7. $y = 16x^3 \cos x - \arcsin x$
8. $y = 6x \log_2 x - \frac{3}{x^2}$
9. $y = \frac{x^2+1}{\sin x}$
10. $y = \frac{x^3+1}{x}$
11. $y = \sin^2 x$
12. $y = \sin x^2$
13. $y = e^{x^2}$
14. $y = \sqrt{2x+1}$
15. $y = \cos(6x+3)$
16. $y = \ln(\frac{x}{x^2+1})$
17. $y = \arccos(\frac{x}{x-1})$
18. $y = \tan(\sin x)$
19. $y = \sin[\sin(\sin x)]$
20. $y = x^x$

Geometrický význam derivace. Mluvili jsme o tom mnohokrát. Funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci právě tehdy, když má graf v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu se směrnicí $f'(x_0)$. Rovnice takové tečny v bodě $T(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Rovnice normály (přímky kolmé k tečně a procházející bodem dotyku):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Ukažme si, jak napsat rovnici tečny na jednoduchém příkladu. Najděme rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 1$. Jediné, co musíme udělat, je najít koeficienty do výše uvedené rovnice. $f(x_0) = 1^2 = 1$, derivace $(f(x))' = 2x$ a $f'(x_0) = 2 \cdot 1 = 2$. Tedy $y = 1 + 2(x-1)$, po úpravě:

$$2x - y - 1 = 0.$$

Napište rovnici tečny k grafu funkce v daných bodech:

1. $f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}$

2. $f(x) = \frac{1}{2x+3}, x_0 = 0$

Derivace vyšších řádů. Pokud máme vypočítat druhou, třetí atd. derivaci, není to žádný problém.

Definice. Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme n-tou derivaci (derivaci n-tého řádu) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Chci-li tedy derivaci druhého řádu nějaké funkce zderivuji ji prostě dvakrát (tj. zderivuji její první derivaci) atd.

6.1 L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo je docela silným nástrojem pro výpočet mnoha limit.

Věta. *Buď* $x_0 \in \mathbb{R}^*$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

(ii) $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, pak existuje také* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Poznámky:

1. Je nutné, aby opravdu byly splněny podmínky dané věty! Tj. pravidlo se nedá použít pro výpočet limit „$\frac{cokoliv}{0}$“ a podobně.

2. Taky se může stát, že $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nemusí existovat, to ale neznamená, že neexistuje $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$!

3. L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít i vícekrát v řadě, tj. může se stát, že i po použití L.P. dostaneme výraz, který splňuje předpoklady věty. V takovém případě použijeme L.P. ještě jednou atd.

Ilustrujme použití na následujících příkladech:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$=„$\frac{0}{0}$"=$\lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{2x-3}=\frac{-1}{1}=-1$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$=„$\frac{0}{0}$"=$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$=„$\frac{0}{0}$"=$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$=„$\frac{0}{0}$"=$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$

L'Hospitalova pravidla užíváme k určení limit tzv. neurčitých výrazů:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

První dva případy lze řešit přímo užitím L.P. ostatní je možno převést na první následovně:

- $\infty-\infty$: $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$
- $0\cdot\infty$: $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
- $0^0, \infty^0, 1^\infty$: $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$

Vypočítejte limity:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x-2}{x^2-1}$
2. $\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)\ln x$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$
4. $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x})$
5. $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}$
6. $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})^{\sin x}$
7. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$
8. $\lim_{x\to 1^-}\ln(x)\cdot\ln(1-x)$

Kapitola 7

Průběh funkce

7.1 Předpis funkce

Z předpisu funkce můžeme zjistit mnoho důležitých údajů:

1. $D(f), (H(f))$

2. zda-li je funkce sudá, lichá, periodická

3. nulové body funkce (průsečíky s osou x) a intervaly, kde je kladná a kde záporná

7.2 Monotonie funkce, extrémy

Zda-li je funkce rostoucí, klesající a nebo kde má extrémy nám pomáhá určit první derivace.

Věta. *Nechť f má konečnou derivaci na otevřeném intervalu I.*

(i) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na I.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na I.

Každý pravděpodobně intuitivně tuší, co to znamená mít v bodě lokální extrém, ale pro přesnost a připomenutí:

Definice. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:

- lokální maximum, existuje-li okolí bodu x_0 takové, že pro každé x z tohoto okolí je $f(x) \leq f(x_0)$,
- lokální minimum, existuje-li okolí bodu x_0 takové, že pro každé x z tohoto okolí je $f(x) \geq f(x_0)$.

Lokální maxima a minima se souhrnně nazývají lokální extrémy.

Lokální extrém může mít funkce pouze ve dvou bodech:

1. $f'(x) = 0$ (stacionární body)
2. $f'(x)$ neexistuje

Ne každý takový bod je ovšem lokálním extrémem! Bod x_0 je lokálním extrémem právě tehdy, když se kolem něj mění znaménko derivace (a samozřejmě splňuje jednu z těchto dvou podmínek).

Kromě lokálních extrémů můžeme hledat i extrémy globální (absolutní). Jde o největší (nejmenší) hodnoty funkce na dané **množině**. Globální extrémy má vždy funkce, která je definovaná a spojitá na ohraničeném, uzavřeném intervalu. Globální extrémy jsou potom buď ve stacionárních bodech, bodech, kde derivace neexistuje a nebo v krajních bodech intervalu. Stačí porovnat funkční hodnoty ve všech těchto bodech.

7.3 Konvexnost, konkávnost, inflexní body

Definice. Řekneme, že funkce f je konvexní na intervalu I, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Řekneme, že funkce f je konkávní na intervalu I, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Tato definice je pro většinu asi trochu nic neříkající, řekněme ji tedy trochu lidštěji. Podmínky vyjádřené nerovnostmi se dají vyjádřit také slovy. Bod o souřadnicích $(x_2, f(x_2))$ leží pod (nad) přímkou určenou body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$.

Při kreslení grafu se hodí hlavně následující poznatek:

- Je-li funkce konvexní, pak je její graf nad tečnou grafu.
- Je-li funkce konkávní, pak je její graf pod tečnou grafu.

K určení zda-li je funkce konvexní či konkávní slouží druhá derivace:

Věta. *Nechť I je otevřený interval a f má vlastní druhou derivaci na I.*

(i) Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f ostře konvexní na I.

(ii) Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f ostře konkávní na I.

Pro jednoduchost si řekněme, že **inflexní bod** je bod, ve kterém graf přechází z pod tečny nad tečnu nebo naopak. Inflexní bod může mít funkce f v bodě x_0 ve dvou případech:

1. $f''(x_0) = 0$
2. $f''(x)$ v bodě x_0 neexistuje

Podobně v jako případě extrémů platí, že ne každý bod splňující jednu z těchto dvou podmínek je inflexní! Aby daný bod byl inflexní, musí se kolem něj měnit znaménko druhé derivace!

7.4 Asymptoty funkce

Pro jednoduchost - asymptoty jsou přímky, ke kterým se daná funkce neomezeně blíží. Rozlišujeme asymptoty dvojího typu.

(a) Asymptoty bez směrnice

Definice. Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá asymptotou bez směrnice funkce f, jestliže má f v x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj. $\lim_{x \to x_0^+} = \pm\infty$ nebo $\lim_{x \to x_0^-} = \pm\infty$

Uvědomte si, že tyto asymptoty mohou být pouze v bodech, kde funkce není spojitá!

(b) Asymptoty se směrnicí

Tyto asymptoty nám pomáhají určit chování funkce v nevlastních bodech.

Definice. Přímka $y = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$, se nazývá asymptotou se směrnicí funkce f, jestliže platí $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ nebo $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$.

Předchozí definice vlastně přesně popisuje naši představu o asymptotě, požaduje aby rozdíl mezi funkcí a asymptotou v nekonečnu byl nulový. Platí následující:

Věta. *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \to +\infty}(f(x) - ax) = b.$$

Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

7.5 Příklady

Příklad 1: Najděte globální (absolutní) extrémy funkce $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ na intervalu $[-3, 1]$.

První najdeme stacionární body jako řešení rovnice $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0$$

Odtud $x \in \{-2, 0, 2\}$. Jelikož funkce má derivaci ve všech bodech, nemáme žádné další body podezřelé na lokální extrémy. Do intervalu, který vyšetřujeme spadají body $x_1 = -2ax_2 = 0$. Spočteme funkční hodnoty v těchto dvou bodech a krajních bodech intervalu, dané hodnoty porovnáme a dostaneme výsledek.

$$f(-2) = -25, f(0) = -9, f(-3) = 0, f(1) = -16$$

Máme tedy absolutní minimum v bodě -2 a absolutní maximum v bodě -3.

Poznámky:

1. Všimněte si, že v bodě 0 máme lokální maximum, ale není to rozhodně globální maximum. Proto pozor, nikdy nezapomeňte spočítat hodnoty v krajních bodech.

2. Funkce může mít více globálních extrémů. Například, kdybychom hledali globální extrémy v předchozím příkladu na intervalu $[-1, 1]$, měli bychom dvě globální minima v bodech $-1, 1$.

Příklad 2: Najděte takové kladné číslo, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl minimální.

Označme součet s a hledané číslo x, pak

$$s \ = x + \frac{1}{x}$$

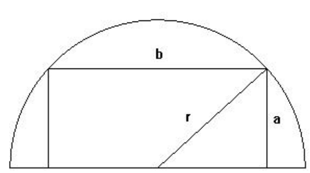
Hledáme minimum součtu s v závislosti na x, tedy s je funkce proměnné x, hledáme-li extrém, potřebujeme první derivaci položit rovnu nule pro určení stacionárních bodů:

$$s'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Ověříme-li, jestli má funkce v bodě $x = 1$ extrém (např. podle znamének derivace), zjistíme, že v něm opravdu má hledané minimum. Hledané číslo je tedy 1 a nejmenší možný součet kladného čísla a jeho převrácené hodnoty je 2.

Příklad 3: Do půlkruhu o poloměru r vepište obdélník největšího obsahu.

Označme si strany obdélníku a, b.



Z Pythagorovy věty platí:

$$(\frac{b}{2})^2 + a^2 = r^2$$

a odtud (je zřejmé, že $a > 0$)

$$a = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}.$$

Pro obsah obdélníku platí $S = a \cdot b$, tedy v našem případě:

$$S \ = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot b$$

Máme tedy obsah obdélníka vyjádřený jako funkci jedné proměnné, tj. můžeme hledat jeho extrém a to je vlastně náš cíl! Vyjádřeme si tedy první derivaci podle naší proměnné b:

$$S'(b) = \frac{r^2 - \frac{2b^2}{4}}{\sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}}$$

Najděme stacionární body:

$$S'(b) = 0 \Leftrightarrow r^2 - \frac{2b^2}{4} = 0 \Leftrightarrow b = r\sqrt{2}$$

Ověříme-li, jestli má funkce v bodě $b = r\sqrt{2}$ extrém (např. podle znamének derivace), zjistíme, že v něm opravdu má hledané maximum. Můžeme tak dopočítat $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$ a $S_{max} = r^2$.

Poznámky:

1. Nejdůležitějším krokem při řešení takovýchto příkladů je správné určení funkce, tomu mnohdy napomáhá správně nakreslený obrázek.

2. Další příklady (i řešené) je možno nalézt např. v [9], [8].

Najděte absolutní extrémy funkcí na intervalech:

1. $y = x^2 - 6x + 10, x \in [-1, 5]$

2. $y = 2\sin 2x + \cos 4x, x \in [0, \frac{\pi}{3}]$

3. $y = x^2 \ln x, x \in [1, e]$

Vyšetřete průběh následujících funkcí:

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

2. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

3. $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$

4. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

5. $f(x) = xe^x$

6. $f(x) = \ln \sin x$

7. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

Kapitola 8

Dodatky

8.1 Řešení soustavy lineárních rovnic

Problematikou řešení soustav lineárních rovnic se budeme později zabývat podrobněji a odborněji v rámci kapitoly o Lineární algebře. Trochu laicky se na ni ovšem můžeme podívat už teď. Ze střední školy umíme bez problémů řešit soustavy dvou rovnic o dvou neznámých a třech rovnic o třech neznámých. A to hlavně pomocí dvou metod, které si ilustrujme na následujícím příkladu:

a) **Metoda dosazovací**

Mějme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x+4y &= 8 \\ x-y &= 1 \end{aligned}$$

Z druhé rovnice si vyjádříme $x = y + 1$ a dosadíme do rovnice první

$$2(y + 1) + 4y = 8$$

z níž dostáváme $y = 1$, dosadíme do rovnice druhé a zjistíme, že $x = 2$.

b) **Metoda sčítací**

Řešme stejnou soustavu:

$$\begin{aligned} 2x+4y &= 8 \\ x\ -y &= 1 \end{aligned}$$

Vynásobíme-li druhou rovnici číslem 4 a přičteme ji k rovnici první, dostaneme:

$$6x = 12,$$

tedy $x = 2$ a dosazením do libovolné ze dvou rovnic $y = 1$.

Myslím, že na tomto jednoduchém příkladu je vidět, jak obě metody fungují (určitě je znáte, čili není nutno je příliš osvětlovat). V jednoduchých případech jsou obě metody zhruba stejně efektivní, ale ve složitějších (více rovnic, více neznámých) je metoda sčítací efektivnější. Pokud je rovnic (a neznámých) málo, tak samozřejmě můžeme postupovat jak je uvedeno výše, ale není to příliš vhodné, lepší je užít zjednodušení.

Důležité je říct, které úpravy soustavy lineárních rovnic jsou ekvivalentní (tj. nemění množinu řešení).

Věta. *Nechť je dána soustava lineárních rovnic. Pak následující úpravy jsou ekvivalentními úpravami soustavy*

1. *libovolná záměna pořadí rovnic*
2. *vynásobení libovolné rovnice nenulovým číslem*
3. *k jedné rovnici přičtení jiné rovnice vynásobené libovolným číslem*
4. *(vypuštění rovnice, která je lineární kombinací ostatních rovnic)*

Nyní přistupme ke slibovanému zjednodušení. Jeho podstatou je reprezentace dané soustavy pomocí matice. Zcela přesnou definici matice nemůžeme momentálně uvést, ale vystačíme si s následující představou:

Obdélníkové schéma $m \cdot n$ čísel sestavené z m řádků a n sloupců nazýváme maticí typu m/n.

Podstata reprezentace je úplně jednoduchá, koeficienty z dané soustavy rovnic prostě zapíšeme na dané místo v matici, která ji potom reprezentuje.

Například soustava:

$$\begin{aligned} x+2y-5z &= 12 \\ 2x\ -y\ +z &= 8 \\ -y\ +z &= 2 \end{aligned}$$

se dá zapsat pomocí matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jak se tedy soustava rovnic vlastně řeší? Pomocí tzv. Gaussovy eliminační metody, její podstatou je ekvivalentními úpravami převést danou soustavu na soustavu takovou, aby její matice byla ve schodovitém (trojúhelníkovém) tvaru. Matice je ve schodovitém tvaru jestliže každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí. Příklad takové matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 12 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Vyřešme si tedy následující soustavu:

$$\begin{aligned} a-2b+3c\ +d &= 2 \\ 3a\ -b+2c\ +d &= 1 \\ -2a+4b\ +c\ -d &= 4 \\ a-2b-2c-2d &= 2 \end{aligned}$$

Tu si můžeme vyjádřit maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní pomocí ekvivalentních úprav upravujeme rovnice tak, abychom dostali schodovitý tvar, přičemž jednotlivé rovnice jsou reprezentovány řádky matice.

První řádek opišme, aby jsme získali druhý v předepsaném tvaru (tj. s 0 na prvním místě), vynásobme první číslem -3 a přičtěme ho druhému, podobně dvojnásobek prvního k třetímu a mínus jedna násobek k čtvrtému:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní již první tři řádky jsou v požadovaném tvaru, opišme je tedy a upravme čtvrtý tak, aby měl na třetím místě nulu, tj. pětinásobek třetího přičteme k sedminásobku čtvrtého.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 40 \end{pmatrix}$$

Z posledního řádku $-16d = 40$, tedy $d = \frac{-5}{2}$. Z třetího $7c + d = 8$, dosadíme za d a dostaneme $c = \frac{3}{2}$ atd. Celkem:

$$[a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{10}, c = \frac{3}{2}, d = \frac{-5}{2}]$$

8.2 Kvadratická rovnice a komplexní čísla

Všichni samozřejmě umíte řešit kvadratickou rovnici, čili jen pro připomenutí.

Kvadratickou rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0, kde a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Řešení takové rovnice je tvaru

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Výraz $D = b^2 - 4ac$ se nazývá diskriminant. Podle jeho hodnoty můžeme určit počet řešení kvadratické rovnice. Je-li $D > 0$ má rovnice dvě různá reálná řešení, je-li $D = 0$, má rovnice jeden dvojnásobný reálný kořen, při $D < 0$ nemá rovnice žádné reálné kořeny, má však dva různé imaginární kořeny!

Než přistoupíme k bližšímu seznámení s komplexními čísly, ukažme si ještě jednu užitečnou vlastnost kvadratických rovnic. Mějme kvadratickou rovnici tvaru:

$$x^2 + bx + c = 0, kde b, c \in \mathbb{R}.$$

Označme p, q kořeny dané rovnice, potom platí tzv. Vietovy vzorce:

$$p + q = -b, p \cdot q = c.$$

Pokud má tedy hledaná kvadratická rovnice „pěkné kořeny“ (celá čísla, jednoduché zlomky), můžeme je určit rychle z hlavy.

A teď již ke komplexním číslům.

Definice. Komplexní čísla $\mathbb{C}$ zavádíme jako množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel, tzn. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sčítání a násobení komplexních čísel definujeme takto : pro libovolné $(a, b), (c, d) \in C$ položíme:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Můžeme si povšimnout, že pro komplexní čísla tvaru $(t, 0)$ jsou definované operace stejné jako pro čísla reálná, můžeme tedy každé komplexní číslo tvaru $(t, 0)$ ztotožnit s reálným číslem t. Označíme-li navíc imaginární číslo $(0, 1)$ symbolem i, můžeme každé komplexní číslo psát ve tvaru:

$$z \ = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$

Definice. Vyjádření komplexního čísla $z = (a, b)$ ve tvaru $z = a+bi$ se nazývá algebraický tvar komplexního čísla z . Přitom reálné číslo a se nazývá reálná část komplexního čísla z , reálné číslo b se nazývá imaginární část komplexního čísla z a číslo $i = (0, 1)$ se nazývá imaginární jednotka.

My si bohatě celou dobu vystačíme s vyjádřením komplexního čísla v algebraickém tvaru. Z předchozích definic vyplývá:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

čili $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, atd.$

Je-li dáno komplexní číslo $z = a + bi$, pak číslo $\bar{z} = a - bi$ se nazývá číslo komplexně sdružené k číslu z.

Otázkou je jak sčítat a násobit komplexní čísla v algebraickém tvaru?

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + i(b + d)$$

Sčítáme tedy po složkách. Násobit dvě komplexní čísla je jednoduché, stačí je roznásobit jako dvě závorky a využít faktu $i^2 = -1$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2 = (ac - bd) + i(ad + cb)$$

Vraťme se teď ke kvadratickým rovnicím. Jak jsme již zmínili, řešením kvadratické rovnice se záporným diskriminantem je dvojice komplexních čísel a ta jsou komplexně sdružená! Ukažme si takové řešení na následujícím příkladu:

Řešme takovouto kvadratickou rovnici:

$$3x^2 + 2x + 6 = 0$$

Diskriminant je $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -68 < 0$, čili rovnice má dva komplexně sdružené kořeny. Dosaďme do vzorečku pro kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-68}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-1) \cdot 4 \cdot 17}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{17} \cdot \sqrt{-1}}{6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{17}}{3}$$

Pokud má někdo zájem, může si vyřešit několik kvadratických rovnic, a to jak rozkladem „z hlavy“, tak i pomocí vzorce.

1. $x^2 + 2x + 1 = 0$
2. $x^2 - 8x + 7 = 0$
3. $x^2 + 11x + 30 = 0$
4. $x^2 - 4x - 12 = 0$
5. $x^2 + 5x + 4 = 0$
6. $2x^2 - 4x + 3 = 0$
7. $-x^2 + 2x - 5 = 0$
8. $x^2 + x + 1 = 0$
9. $5x^2 - 12x + 3 = 0$
10. $x^2 - 2x + 13 = 0$

Kapitola 9

Výsledky

Hornerovo schéma

1. $1, 1, 1, 1, 1$
2. $-1, -1, 2, 2, 3$
3. $-2, -1, 1, 2$
4. $-2, -1, 3, 4$
5. $-3, -2, -2, 1, 1$
6. $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$
7. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1$
8. $-2, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2$

Dělení polynomů

1. $x^4 - 2x^2 + x + 1$
2. $2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$
3. $x^3 + x^2 - x - 1$

4. $2x^2 + 3x + 11, 25x - 5$

5. $\frac{1}{9}(3x - 7), \frac{1}{9}(-26x - 2)$

Definiční obory

1. $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

2. $x \in \mathbb{R} - \{-1, \frac{3}{13}\}$

3. $x \in \mathbb{R} - \{-7, 1\}$

4. $x \in [-2, \infty)$

5. $x \in (-\infty, -2] \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

6. $x \in [\frac{1}{5}, \infty)$

7. $x \in [-2, 0) \cup (0, 1)$

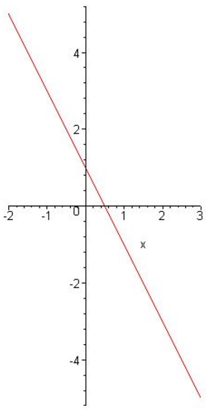
8. $x \in (-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

9. $x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 4)$

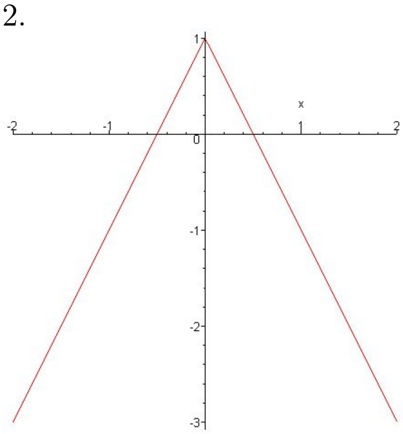
10. $x \in [0, 1] \cup [\ln(3), \infty$

Grafy

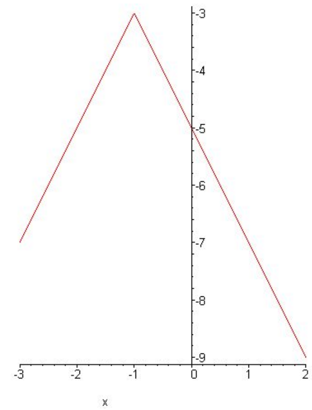
1.



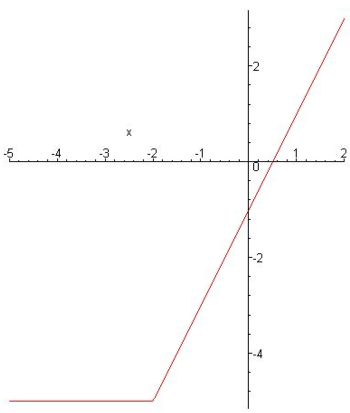
2.



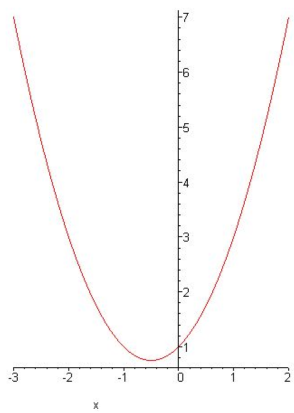
3.



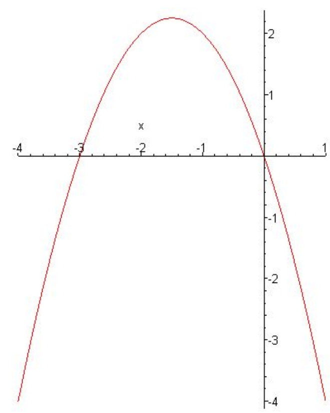
4.



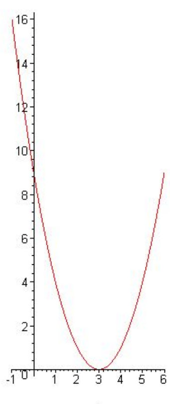
5.



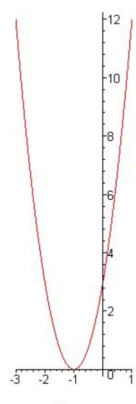
6.



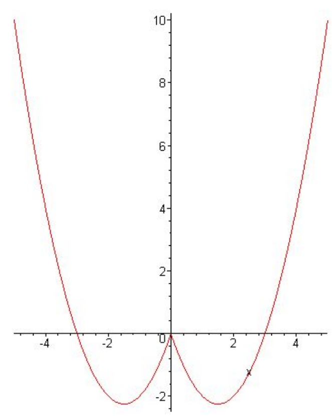
7.



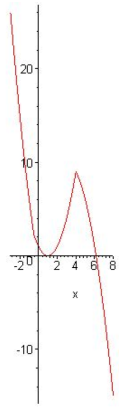
8.



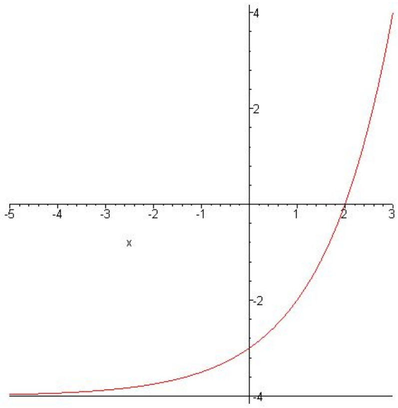
9.



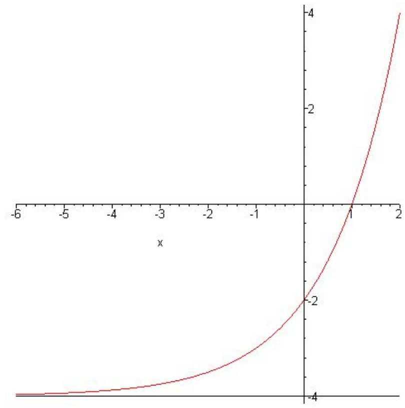
10.



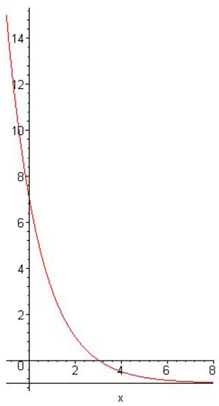
11.



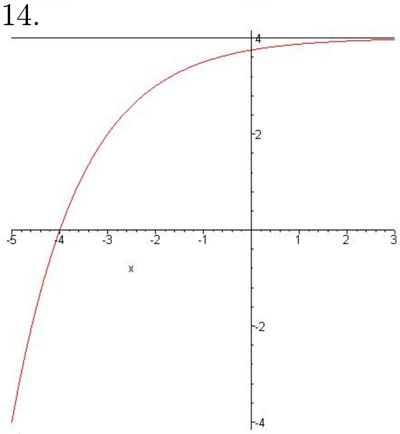
12.



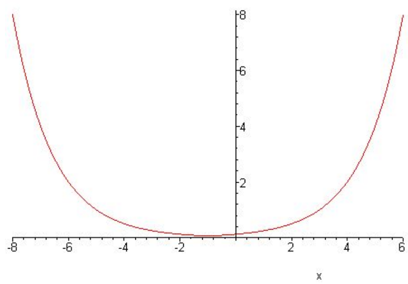
13.



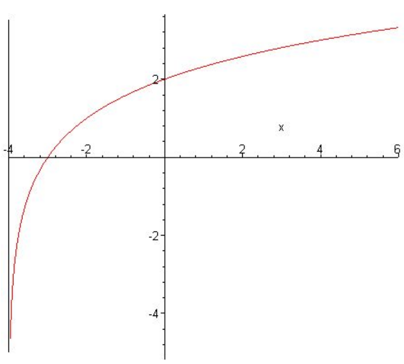
14.



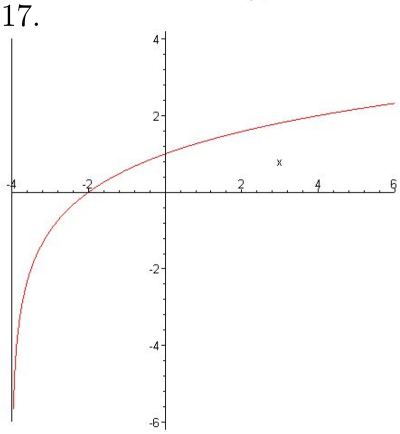
15.



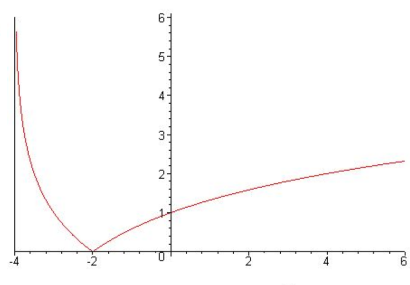
16.



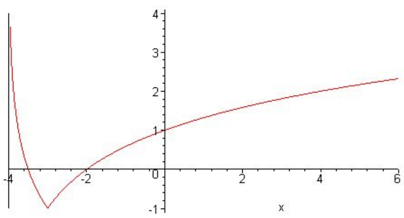
17.



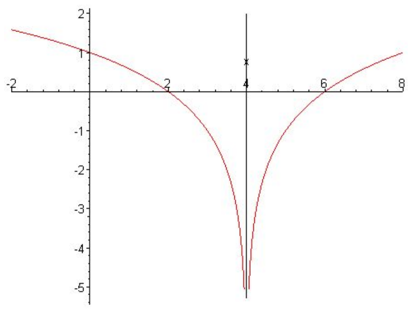
18.



19.



20.



Parciální zlomky

1. $\frac{-43}{3}\frac{1}{x-3} + \frac{79}{3}\frac{1}{x-6}$

2. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1}$

3. $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}$

4. $\frac{2x}{x^2+1} + \frac{x-2}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$

5. $\frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}$

6. $\frac{1}{3}(\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1})$

7. $\frac{5}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x+2}$

8. $\frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x-1}{x^2+2}$

Limity

1. Upravte čitatele$(x-1)(x+1)$, [2]

2. Upravte na $\frac{(x-3)(x+3)}{(x+5)(x-3)}$, $[\frac{3}{4}]$

3. Upravte na $\frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x-2)}$, [2]

4. Upravte na $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)}$, $[\frac{3}{8}]$

5. Upravte na $\frac{x^2(x+2)-(x+2)}{x^2-1}$, [3]

6. Upravte (např. pomocí Hornerova schématu) na $\frac{(x+1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x^3-x^2+x+1)}$, $[-\frac{1}{2}]$

7. Rozšiřte výrazem $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$, [2]

8. Rozšiřte výrazem $\frac{\sqrt{6+x}+2}{\sqrt{6+x}+2}$, $[\frac{1}{4}]$

9. Rozšiřte výrazem $\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}-2}$, [4]

10. Rozšiřte výrazem $\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}$, $[\frac{\sqrt{2}}{4}]$

11. Rozšiřte výrazem $\frac{(\sqrt{x^2+1}+1)\cdot(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+1}+1)\cdot(\sqrt{x^2+16}+4)}$, [4]

12. Rozšiřte výrazem $\frac{\sqrt[3]{(1+x^4)^2}+\sqrt[3]{1+x^4}+1}{\sqrt[3]{(1+x^4)^2}+\sqrt[3]{1+x^4}+1}$, $[-3]$

13. Užijte vzorce pro dvojnásobný úhel. $[\frac{\sqrt{2}}{2}]$

14. Užijte vyjádření $x = \sin \arcsin x$a $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1, [1]$

15. Vhodnou úpravou převeďte na užití $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, [5]$

16. Viz. předchozí příklad,[3]

17. Vynásobte vhodnou jedničkou, [0]

18. Užijte vzorců pro tangens, dvojnásobný úhel, upravte ,užijte $lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, [3]$

19. [2]

20. $[\infty]$

21. $[-\infty]$

22. [0]

23. $[\frac{1}{6}]$

24. Užijte definice, tj. převeďte na $\lim_{t\to 0^+} f(\frac{1}{t}), [\frac{1}{2}]$

25. Určete obě jednostranné limity.$[neexistuje]$

26. Určete obě jednostranné limity.$[\infty]$

27. Určete obě jednostranné limity.$[neexistuje]$

28. Určete obě jednostranné limity.$[-\infty]$

Derivace

1. $y' = 6x - 6$
2. $y' = 12x + 3\cos x$
3. $y' = 2e^x - \frac{3}{x}$
4. $y' = \frac{7}{6}\sqrt[6]{x}$
5. $y' = e^x \sin x + e^x \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$
6. $y' = 2xe^x + x^2 e^x - \frac{1}{x^2+1}$
7. $y' = 48x^2 \cos x - 16x^3 \sin x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $y' = 6\log_2 x + \frac{6}{\ln 2} + 6\frac{\ln x}{x^3} - \frac{3}{x^3}$
9. $y' = \frac{2x\sin x - (x^2+1)\cos x}{\sin^2} x$
10. $y' = \frac{2x^3-1}{x^2}$
11. $y' = 2\sin x \cos x$
12. $y' = 2x\cos x^2$
13. $y' = 2xe^{x^2}$
14. $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
15. $y' = -6\sin(6x+3)$
16. $y' = \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$
17. $y' = \frac{1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{1-2x}{(x-1)^2}}}$
18. $y' = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$
19. $y' = \cos[\sin(\sin x)] \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x$
20. Tohle byl hnusný příklad, je potřeba užít triku $x^x = e^{\ln x^x}$,$y' = x^x(\ln x + 1)$

Tečny

1. $2x - 2y - \pi = 0$
2. $2x + 9y - 3 = 0$

Limity L'Hospitalem

1. ∞
2. 0
3. 2
4. $-\frac{1}{3}$
5. 1

6. 1

7. 0

8. 0

Absolutní extrémy funkcí

1. Maximum 17 v bodě -1, minimum 1 v bodě 3

2. Maximum $\frac{3}{2}$ v bodě $\frac{\pi}{12}$, minima 1 v bodech 0 a $\frac{\pi}{4}$

3. Maximum e^2 v bodě e a minimum 0 v bodě 1

Kvadratické rovnice

1. dvojnásobný kořen -1

2. $[7, 1]$

3. $[-5, -6]$

4. $[6, -2]$

5. $[-4, -1]$

6. $[1 \pm \frac{i\sqrt{2}}{2}]$

7. $[1 \pm 2i]$

8. $[-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}]$

9. $[\frac{6}{5} \pm \frac{1}{5}i\sqrt{29}]$

10. $[1 \pm 2i\sqrt{3}]$

Seznam použité literatury

[1] Petáková J. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy).*, Praha, Prometheus, 2001, s. 303

[2] Polák J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1983, s. 628

[3] Rosický J. *Algebra.* Brno, Masarykova univerzita, 2002, s. 133

[4] Musilová J., Musilová P. *Matematika pro porozumění i praxi.* Brno, VUTIUM, 2006, s. 281

[5] Horák, P. *Základy matematiky*
`http://www.math.muni.cz/~horak/08p_zm_skripta.pdf` 2008

[6] Bušek I. *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1985, s. 532

[7] Neznámý *Příklady*
`http://www.math.muni.cz/~xsmykal/cma.ps` 2008

[8] Hrubý D., Kubát J. *Diferenciální a integrální počet.* Praha, Prometheus, 2007, s. 210

[9] Došlá Z., Kuben J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Brno, Masarykova univerzita, 2003, s. 209

[10] Osicka J. *Matematika pro chemiky.* Brno, Masarykova univerzita, 2007, s. 213