ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

Instrukce ke zkoušce:

- Jméno a příjmení: ____________________
- UČO: _______________

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	$\sum$	**Z**	$\sum\sum$
Bodový zisk										

TENTO LIST ODEVZDÁVÁTE SPOLEČNĚ S ŘEŠENÍM.

- Počet odevzdaných listů (včetně tohoto): _____
- Všechny své výpočty řádně zdůvodněte!
- Minimální čas na vypracování je 100 minut
- **HODNĚ ŠTĚSTÍ!** (Pokud jej potřebujete.)

ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ:

1. (3 body) Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2 - n}}.$$

2. (5 bodů) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \mathrm{e}^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 1}},$$

zderivujte ji a výsledek upravte.

3. (12 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

a nakreslete její graf. Určete také rovnici tečny a normály v bodě $x_0 = 1$.

4. (6 bodů) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}\right).$$

5. (5 bodů) Napište Maclaurinův vzorec pro funkci $h(x) = \operatorname{tg} x$ a $n = 3$. S jeho pomocí vypočtěte přibližnou funkční hodnotu v bodě $x_0 = 0{,}1$.

6. (4 body) Vypočtěte

$$\int \sin^4 x \cos^5 x \,\mathrm{d}x.$$

7. (5 bodů) Vypočtěte

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 2x + 2)},$$

přičemž můžete využít následující rovnosti: $\frac{1}{(x^2-6x+8)(x^2+2x+2)} = -\frac{1}{20}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{52}\frac{1}{x-4} + \frac{1}{130}\frac{4x+11}{x^2+2x+2}$.

- Zadání si můžete ponechat — spravné řešení naleznete v ISu ve studijních materiálech předmětu M1101.
- Ústní část zkoušky začíná ve 12^{30} v učebně MS2 na ÚMS.

M1101 - 10.2.2009

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n^2-n}} \cdot \frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n+\sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n^2-(n^2-n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1+\sqrt{1-\frac{1}{n}} = \underline{2}$$

---

2) $D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x - \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} \cdot \frac{1/2}{\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}} \cdot \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{\sqrt{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{\sqrt{e^{2x}}} \cdot \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}+1} = \underline{\underline{\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}}}$$

---

3) i) $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ii) spojitá v $D(g)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{2x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

iii) $g(-x) = \frac{1}{2}\left(-x-\frac{1}{x}\right) = -g(x)$ ... lichá

iv) $g(x) = 0$

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 0$$

$$x = -\frac{1}{x}$$

$$x^2 = -1$$

neexist.

$g(x)$: $-$ | $+$

0

v) $g'(x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$ $\qquad D(g') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

vi) $g'(x) = 0$ $\qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2x^2}$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$g'(x)$:	+		−		−		+
		-1		0		1	
$g(x)$:	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		lok. MAX				lok. MIN	
		$g(-1) = -1$				$g(1) = 1$	

vii) $g''(x) = -\frac{1}{2}(-2) \cdot x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ $\qquad D(g'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

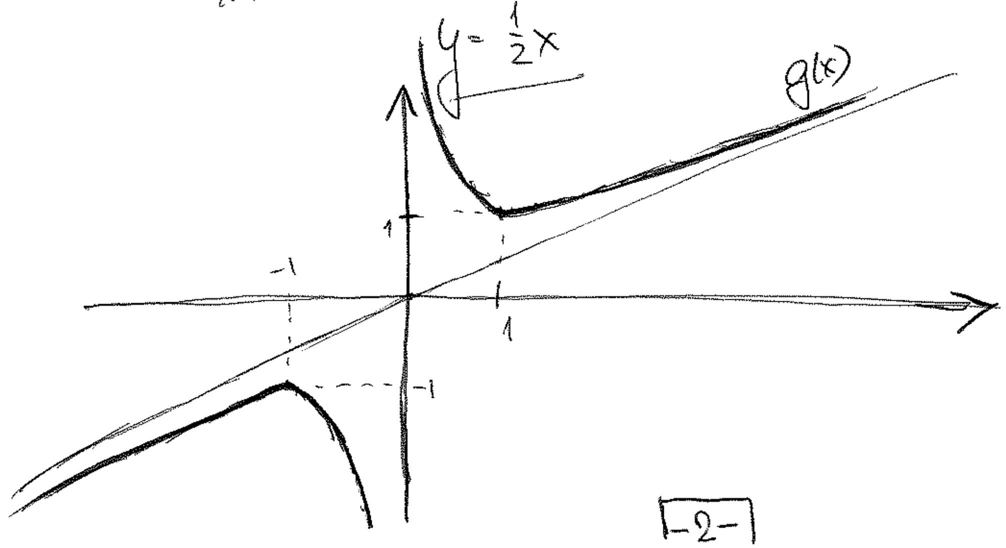
viii) $g''(x) = 0$ .. neexistuje

$g''(x)$:	−		+
		0	
$g(x)$:	$\cap$		$\cup$

ix) asymptoty bez smernice : $x_0 = 0$

x) $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} \right) = \frac{1}{2}$

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) - \frac{1}{2}x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$



$x_0 = 1$

$g(x_0) = 1$

$g'(x_0) = 0$

$t:\ y - 1 = 0$

$\underline{\underline{t:\ y = 1}}$

normála „neexistuje", neboť $g'(x_0) = 0$.

---

4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{x^2} \left|\frac{0}{0}\right| \overset{L.H.}{=}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)\cdot\frac{1}{1+x} + \ln(1+x) - 1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} \left|\frac{0}{0}\right| \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

---

5) $h(x) = \operatorname{tg} x \xrightarrow{x_0 = 0} 0$

$h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{x_0 = 0} 1$

$h''(x) = -2 \cdot \cos^{-3} x \cdot (-\sin x) \xrightarrow{x_0 = 0} 0$

$h'''(x) = (2 \cdot \cos^{-3} x \cdot \sin x)' = 2 \cdot (-3) \cdot \cos^{-4} x\, (-\sin x) \cdot \sin x + 2 \cdot \cos^{-3} x \cdot \cos x \xrightarrow{x_0 = 0} 2$

$h(x) \approx 0 + 1 \cdot x + 0 + \frac{2}{3!} x^3 = x + \frac{1}{3} x^3$

$\underline{\underline{\operatorname{tg} 0{,}1 \approx 0{,}100333}}$

6) $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x \, dx \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{matrix} \right| = \int t^4 (1-t^2)^2 \, dt =$

$= \int t^4 - 2t^6 + t^8 \, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \underline{\underline{\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \cdot \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C}}$

---

7) $\int \frac{dx}{(x^2-6x+8)(x^2+2x+2)} = \int \frac{-\frac{1}{20}}{x-2} + \frac{1/52}{x-4} + \frac{1}{130} \frac{4x+11}{x^2+2x+2} =$

$= \underline{\underline{-\frac{1}{20} \cdot \ln|x-2| + \frac{1}{52} \ln|x-4| + \frac{2}{130} \ln|x^2+2x+2| + \frac{7}{130} \operatorname{arctg}(x+1) + C}}$

$\int \frac{-\frac{1}{20}}{x-2} = -\frac{1}{20} \ln|x-2|$

$\int \frac{1/52}{x-4} = \frac{1}{52} \ln|x-4|$

$\int \frac{4x+11}{x^2+2x+2} = 2 \cdot \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + 7 \cdot \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = 2 \cdot \ln|x^2+2x+2| + 7 \cdot \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$

$= 2 \cdot \ln|x^2+2x+2| + 7 \cdot \operatorname{arctg}(x+1)$