**M1101: Matematická analýza I** **III. termín: 20. ledna 2009**

# ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

## Instrukce ke zkoušce:

- Zde napište své jméno: ______________
- Zde napište své UČO: __________

| Příklad | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | $\sum$ | Z | $\sum\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bodový zisk | | | | | | | | | | |

# TENTO LIST ODEVZDÁVÁTE SPOLEČNĚ S ŘEŠENÍM!

- Zde napište počet odevzdaných listů (včetně tohoto): ____
- Pokud jste přišli získat zápočet, napište ke svému jménu Z a proškrtněte sloupec s $\sum\sum$.

---

- Všechny své výpočty řádně zdůvodněte!
- Před odevzdáním zkontrolujte, zda jsou všechny listy, které odevzdáváte, čitelně podepsané vpravo nahoře.
- Před odevzdáním v tabulce proškrtněte příklady, které jste vůbec neřešili.
- Před odevzdáním očíslujte stránky, jak následují za sebou.
- Před odevzdáním zkontrolujte, zda máte na této straně vyplněný počet odevzdávaných listů.
- Minimální čas na vypracování je 100 minut.
- Zadání si můžete ponechat — spravné řešení naleznete v ISu ve studijních materiálech předmětu M1101.
- Ústní část zkoušky začíná ve $12^{30}$ v učebně MS2 na ÚMS.
- **HODNĚ ŠTĚSTÍ!** (Pokud jej potřebujete.)

**M1101: Matematická analýza I** **III. termín: 20. ledna 2009**

# ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

## ZADÁNÍ:

**1.** **(3 body)** Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

**2.** **(5 bodů)** Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

zderivujte ji a výsledek upravte.

**3.** **(12 bodů)** Vyšetřete průběh funkce

$$g(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

a nakreslete její graf. Určete také rovnici tečny a normály v bodě $x_0 = 1$.

**4.** **(6 bodů)** Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}.$$

**5.** **(5 bodů)** Napište Maclaurinův vzorec pro funkci $h(x) = \ln(\cos x)$ a $n = 5$. S jeho pomocí vypočtěte přibližnou funkční hodnotu v bodě $x_0 = 0{,}1$.

**6.** **(4 body)** Vypočtěte

$$\int (x \arcsin x^2)\,\mathrm{d}x$$

**7.** **(5 bodů)** Vypočtěte

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1},$$

přičemž můžete využít následující rovnosti: $\frac{1}{(x-1)(x^4+x^2+1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}$.

---

- Zadání si můžete ponechat — spravné řešení naleznete v ISu ve studijních materiálech předmětu M1101.
- Ústní část zkoušky začíná ve $12^{30}$ v učebně MS2 na ÚMS.

1) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\frac{1}{1+1}=\underline{\underline{1/2}}$$

---

2) $\underline{\underline{D(f)=(-1,1)}}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}=$$

$$=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x}{1-x^2}+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}=$$

$$=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\cdot\arcsin x+\frac{-1}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}-\frac{1}{1-x^2}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}}$$

---

3)
i) $D(g)=\mathbb{R}$

ii) spojitá v $D(g)$

iii) $g(-x)=-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=-g(x)\ldots$ lichá

iv) $g(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot e^{-x^2/2}=0$

$$\Downarrow$$

$$x=0$$

$g(x)$: $-$ | $+$

$0$

v) $g'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{2x}{2}\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$

$D(g') = \mathbb{R}$

vi) $g'(x) = 0 \iff 1-x^2=0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

| | | -1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$: | $-$ | | $+$ | | $-$ |
| $g(x)$: | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

-1: lok. MIN. $g(-1) = -e^{-\frac{1}{2}}$

1: lok. MAX $g(1) = e^{-1/2}$

vii) $g''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{2x}{2}\right) \cdot (1-x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-2x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}(3-x^2)$

$D(g'') = \mathbb{R}$

viii) $g''(x) = 0 \iff -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (3-x^2) = 0$

$x = 0$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

| | | $-\sqrt{3}$ | | 0 | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$: | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $g(x)$: | $\cap$ | | $\cup$ | | $\cap$ | | $\cup$ |

$-\sqrt{3}$: infl. bod

$g'(-\sqrt{3}) = -2 \cdot e^{-3/2}$

$g(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} \cdot e^{-3/2}$

0: infl. bod

$g'(0) = 1$

$g(0) = 0$

$\sqrt{3}$: infl. bod

$g'(\sqrt{3}) = -2e^{-3/2}$

$g(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot e^{-3/2}$

ix) asymptoty bez směrnice neexistují

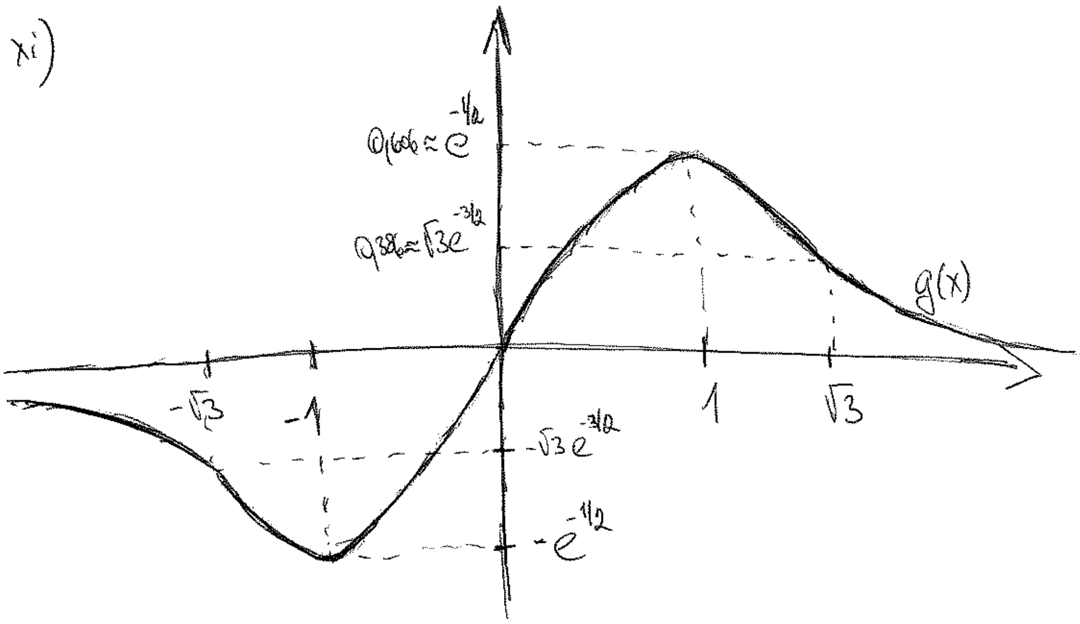
x)

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{L.H.}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x \cdot e^{x^2/2}} = 0$$

$$\underline{\underline{y = 0}}$$

xi)




$x_0 = 1$, $f(x_0) = e^{-1/2}$, $f'(x_0) = 0$

$t: \ y - e^{-1/2} = 0$

$t: \ \underline{\underline{y = e^{-1/2}}}$

normála neexistuje, neboť $f'(x_0) = 0$.

171101-20.1.2009

4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{6}}}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}\left|\frac{0}{0}\right| \overset{L.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{(\cos x)\cdot x-\sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}\cdot\frac{1}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{2x^2\cdot\sin x}\left|\frac{0}{0}\right| \overset{L.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\cdot\sin x-\cos x}{4x\sin x+2x^2\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{x(4\sin x+2x\cos x)}\left|\frac{0}{0}\right| \overset{L.H.}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{4\cdot\cos x+2\cdot\cos x-2x\cdot\sin x} = \frac{-1}{4+2-0} = \underline{-\frac{1}{6}}$$

---

5) $n=5,\ \tilde{x}_0=0$

$$f(x)=\ln(\cos x)\xrightarrow{\tilde{x}_0=0} 0$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\xrightarrow{\tilde{x}_0=0} 0$$

$$f''(x)=\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\cos^2 x}\xrightarrow{\tilde{x}_0=0} -1$$

$$f'''(x)=(-1)\cdot(-2)\cdot\cos^{-3}x\cdot(-\sin x) = -2\cdot\frac{\sin x}{\cos^3 x}\xrightarrow{\tilde{x}_0=0} 0$$

$$f^{(4)}(x)=\left(-2\cdot\sin x\cdot\cos^{-3}x\right)' = -2\cdot\cos x\cdot\cos^{-3}x-2\sin x\cdot(-3)\cdot\cos^{-4}x\cdot(-\sin x)=$$

$$=-2\cdot\cos^{-2}x-6x\cdot\sin^2 x\cdot\cos^{-4}x\xrightarrow{\tilde{x}_0=0} -2$$

$$f^{(5)}=-2\cdot(-2)\cdot\cos^{-3}x\cdot(-\sin x) - 6\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos^{-4}x -$$

$$-6x\cdot\sin^2 x\cdot(-4)\cdot\cos^{-5}x\cdot(-\sin x)\xrightarrow{\tilde{x}_0=0} 0$$

$$f(x) = 0 + 0 + \frac{-1}{2}\cdot(x-0)^2 + 0 + \frac{-2}{4!}(x-0)^4 + 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4}}$$

$$\ln(\cos 0{,}1) \approx -0{,}005008333$$

---

6)
$$\int x\cdot \arcsin x^2\, dx \quad \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \arcsin t\, dt \quad \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin t & u' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ v' = 1 & v = t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t\cdot \arcsin t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right) = \frac{1}{2}t\cdot \arcsin t - \frac{1}{2}\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \quad \left| \begin{array}{l} w = 1-t^2 \\ dw = -2t\,dt \\ -\frac{1}{2}dw = t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}t\cdot \arcsin t + \frac{1}{4}\int \frac{dw}{\sqrt{w}} = \frac{1}{2}t\cdot \arcsin t + \frac{1}{4}\int w^{-1/2}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2}t\cdot \arcsin t + \frac{1}{4}\cdot \frac{w^{1/2}}{1/2} + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot \arcsin x^2 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-x^4} + C}}$$

---

7)
$$\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \int \frac{1}{3}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}\, dx =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C}}$$

$$\int \frac{1}{x-1}\, dx = \ln|x-1|$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx = \ln|x^2+x+1|$$

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\, dx = \int \frac{1}{(x-1/2)^2 + \frac{3}{4}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot \arctan\frac{x-1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot \arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$