M1101: Matematická analýza I **V. termín: 3. února 2009**

ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

Instrukce ke zkoušce:

- Jméno a příjmení: ____________________
- UČO: _______________

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	$\sum$	**Z**	$\sum\sum$
Bodový zisk										

TENTO LIST ODEVZDÁVÁTE SPOLEČNĚ S ŘEŠENÍM.

- Počet odevzdaných listů (včetně tohoto): _____
- Pokud jste přišli získat zápočet, napište ke svému jménu **Z** a proškrtněte sloupec s $\sum\sum$.
- Všechny své výpočty řádně zdůvodněte!
- Minimální čas na vypracování je 100 minut
- **HODNĚ ŠTĚSTÍ!** (Pokud jej potřebujete.)

ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ:

1. (3 body) Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}}{n+1}}.$$

2. (6 bodů) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} + \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$$

kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zderivujte ji a výsledek upravte.

3. (12 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$g(x) = 2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$$

a nakreslete její graf. Určete také rovnici tečny a normály v bodě $x_0 = 0$.

4. (6 bodů) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x}.$$

5. (4 body) Určete hromadné body posloupnosti $\{1 + \frac{n}{n+1}\cos(\frac{1}{2}n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$, limes superior, limes inferior a limitu této posloupnosti.

6. (3 body) Vypočtěte

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{-3x}\, \mathrm{d}x.$$

7. (6 bodů) Vypočtěte

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}\, \mathrm{d}x.$$

- Zadání si můžete ponechat — spravné řešení naleznete v ISu ve studijních materiálech předmětu M1101.
- Ústní část zkoušky začíná ve 16^{00} v učebně MS2 na ÚMS.

71101 - 3.2.2009

1) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}{1} =$$

$$= \underline{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

---

2) $\underline{D(f) = (-a, \infty)}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x+a}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}-(x+a)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 2x}{x^2+a^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x+a}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}-\frac{x(x+a)}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2} + \frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= \frac{x^2+a^2-x(x+a)}{(x+a)(x^2+a^2)} + \frac{a}{x^2+a^2} = \frac{x^2+a^2-x(x+a)+a\cdot(x+a)}{(x+a)(x^2+a^2)} =$$

$$= \frac{x^2+a^2-x^2-ax+ax+a^2}{(x+a)(x^2+a^2)} = \underline{\frac{2a^2}{(x+a)(x^2+a^2)}}$$

---

3) i) $D(f)=\mathbb{R}$

ii) spojitá v $\mathbb{R}$

iii) $g(-x) = 2(-x+1) - 3\sqrt[3]{(-x+1)^2}$ není sudá, není lichá

iv) $g(x)=0$

$$2(x+1) = 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$$
$$8(x+1)^3 = 27(x+1)^2$$
$$(x+1)^2\left[8(x+1)-27\right]=0$$
$$(x+1)^2\left[8x-19\right]=0$$

$x=-1$

$x=\frac{19}{8}$

$g(x)$: $-$ | -1 | $-$ | $\frac{19}{8}$ | $+$

v) $g'(x) = 2 - 3 \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3} = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x+1}}$

$D(g') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

vi) $g'(x) = 0$

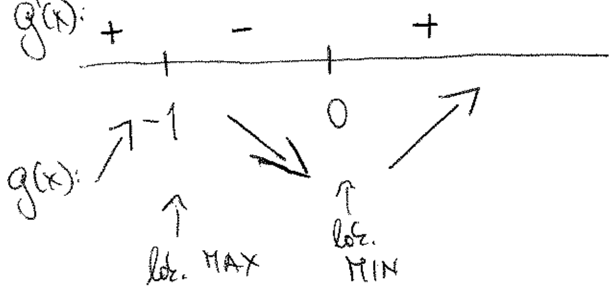
$2 = \frac{2}{\sqrt[3]{x+1}}$

$8 = \frac{8}{x+1}$

$8x + 8 = 8$

$8x = 0$

$\underline{x = 0}$

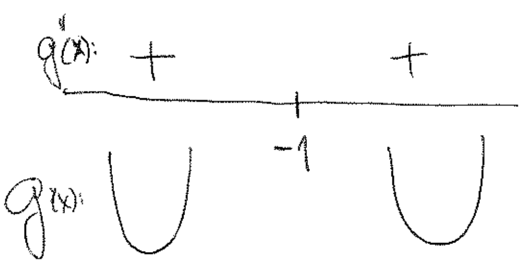


$g(-1) = 0$ $g(0) = -1$

vii) $g''(x) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)(x+1)^{-4/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}$

$D(g'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

viii) $g''(x) = 0$ ... nikdy



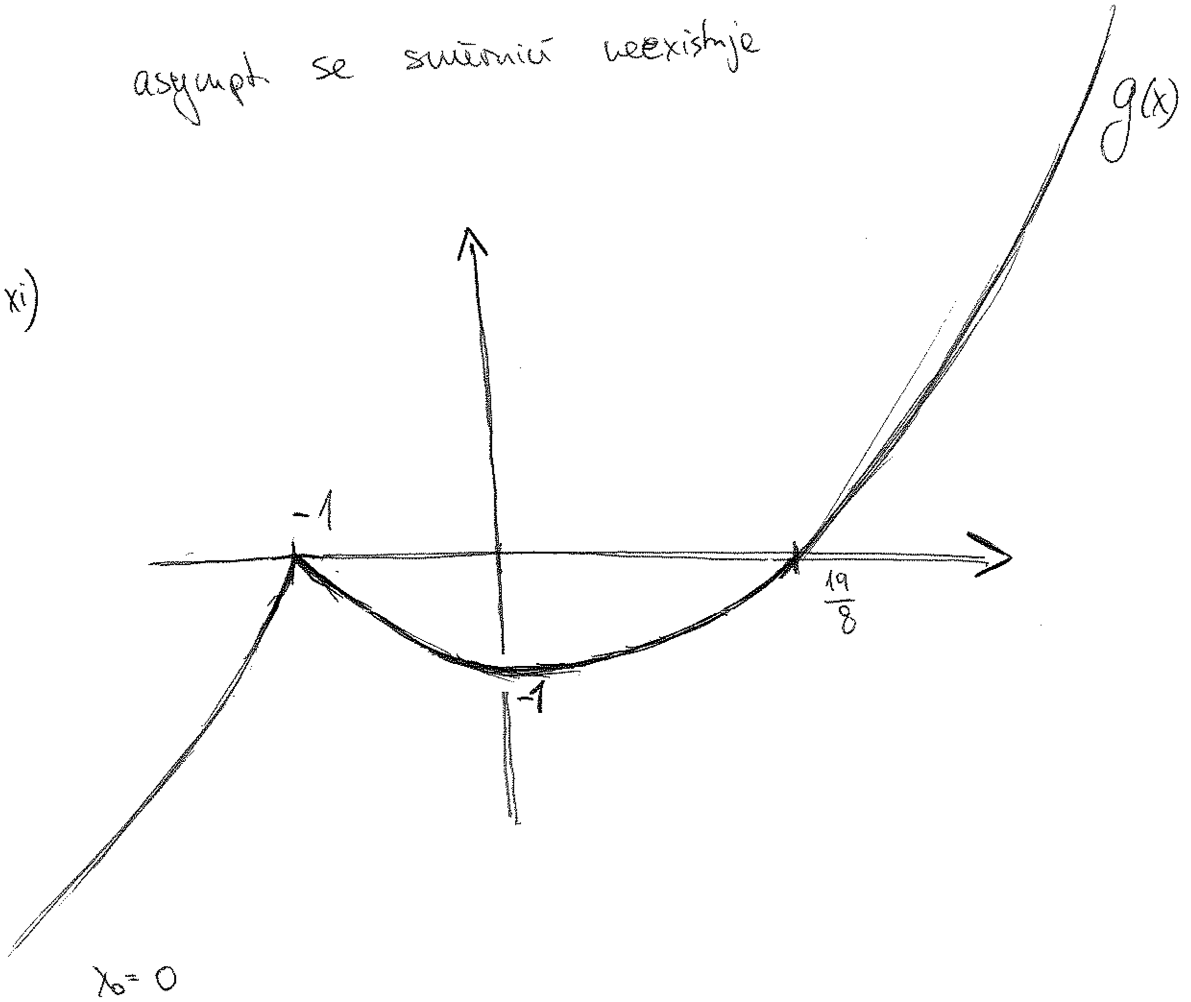
ix) asympt. bez směrnice nejsou

x) $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x} \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{L.H.}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - 3\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}}{1} = \underline{\underline{2}}$, where $(x+1)^{-1/3} \to 0$

$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2(x+1) - 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}\right) = \underline{-\infty}$

asympt. se směrnicí neexistuje

xi)



$x_0 = 0$

$g(x_0) = -1,\ g'(x_0) = 0$

$t:\ y + 1 = 0$

$t:\ \underline{\underline{y = -1}}$

normála „neexistuje", neboť $g'(x_0) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)} = e^0 = \underline{1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)}{x}\left|\frac{0}{0}\right|\overset{L.H.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x-\operatorname{arctg}x}{x^2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\left|\frac{0}{0}\right|\overset{L.H.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\underline{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg}x}{x\cdot\operatorname{arctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\operatorname{arctg}x}{x(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg}x}\left|\frac{0}{0}\right|\overset{L.H.}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)}{(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg}x+x\cdot 2x\cdot\operatorname{arctg}x+x(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cdot\operatorname{arctg}x}{(1+3x^2)\operatorname{arctg}x+x}\left|\frac{0}{0}\right|\overset{L.H.}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{arctg}x-2x\cdot\frac{1}{1+x^2}}{6x\operatorname{arctg}x+(1+3x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}+1}=\frac{0-0}{0+1\cdot 1+1}=\underline{\underline{0}}$$

---

5) $a_n=\left\{1+\frac{n}{n+1}\cos\left(\frac{1}{2}n\pi\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

$n=4k$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{4k}{4k+1}\cos\left(\frac{1}{2}\cdot 4k\pi\right)\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{4k}{4k+1}\cos(2k\pi)}_{1\cdot 1}\right)=$$

$$=1+1=\underline{\underline{2}}$$

$n=4k+1$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{4k+1}{4k+2}\cos\left(\frac{1}{2}(4k+1)\pi\right)\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{4k+1}{4k+2}}_{\downarrow\, 1}\cdot\underbrace{\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}_{\downarrow\, 0}\right)=$$

$$=1+0=\underline{\underline{1}}$$

$n=4k+2$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{4k+2}{4k+3}\cos\left(\frac{1}{2}(4k+2)\pi\right)\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{4k+2}{4k+3}}_{\downarrow\, 1}\underbrace{\cos(2k\pi+\pi)}_{\downarrow\, -1}\right)=$$

$$=1+(-1)=\underline{\underline{0}}$$

$n=4k+3$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{4k+3}{4k+4}\cos\left(\frac{1}{2}(4k+3)\pi\right)\right)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{4k+3}{4k+4}}_{\downarrow\, 1}\underbrace{\cos\left(2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right)}_{\downarrow\, 0}\right)=$$

$$=1+0=\underline{1}$$

HROMADNÉ BODY: $\{0,1,2\}$

$\underline{\underline{\limsup a_n = 2}}$

$\underline{\underline{\liminf a_n = 0}}$ $\Rightarrow$ $\limsup \neq \liminf$ $\Downarrow$ ~~Limita~~ neexistuje

6) $\int x^2 e^{-3x}\,dx \quad \left| \begin{matrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^{-3x} & v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{3}e^{-3x}\cdot x^2 + \frac{2}{3}\int x e^{-3x}\,dx \quad \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-3x} & v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{matrix} \right| =$

$= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx\right) = -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}x e^{-3x} + \frac{2}{9}\int e^{-3x}\,dx =$

$$= -\frac{1}{3}x^2 e^{-3x} - \frac{2}{9}x e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right) + C}}$$

---

7) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}\,dx = \int 1 + \frac{2x}{x^2+x+2}\,dx = \underline{\underline{x + \ln|x^2+x+2| - \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C}}$

$(x^2+3x+2) : (x^2+x+2) = 1 + \frac{2x}{x^2+x+2}$

$\underline{-x^2-x-2}$

$2x$

$$\int \frac{2x}{x^2+x+2}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx =$$

$$= \ln|x^2+x+2| - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \ln|x^2+x+2| -$$

$$- \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$