M1101: Matematická analýza I **II. termín: 13. leden 2009**

ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

Instrukce ke zkoušce:

- Na první stranu nahoru napište své jméno.
- Na první stranu nahoru překreslete následující tabulku:

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	$\sum$	**Z**	$\sum\sum$
Bodový zisk										

- Pokud jste přišli získat zápočet, napište ke svému jménu
  ◯
  a proškrtněte sloupec s $\sum\sum$.
- Všechny své výpočty řádně zdůvodněte!
- Před odevzdáním zkontrolujte, zda jsou všechny listy, které odevzdáváte, čitelně podepsané vpravo nahoře.
- Před odevzdáním v tabulce proškrtněte příklady, které jste vůbec neřešili.
- Před odevzdáním očíslujte stránky, jak následují za sebou.
- Minimální čas na vypracování je 100 minut.
- Zadání si můžete ponechat.
- **HODNĚ ŠTĚSTÍ!** (Pokud jej potřebujete.)

ŘEŠENÍ:

1. (3 body) Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

2. (5 bodů) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = (x^2+1)\arctan x + \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}},$$

zderivujte ji a výsledek upravte.

Řešení:

Definiční obor:

$$\begin{aligned} \frac{1-\sin x}{1+\sin x} > 0 \wedge 1+\sin x \neq 0,\\ \sin x \neq 1 \wedge \sin x \neq -1,\\ x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{aligned}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Derivace:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x^2+1)\arctan x + \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)' \\ &= 2x\arctan x + \frac{x^2+1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} \\ &= 2x\arctan x + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\frac{-\cos x(1+\sin x+1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} \\ &= 2x\arctan x + 1 + \frac{1}{2}\frac{-2\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} \\ &= 2x\arctan x + 1 - \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = 2x\arctan x + 1 - \frac{\cos x}{\cos^2 x} = 2x\arctan x + 1 - \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

3. (12 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$g(x) = (1+x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

a nakreslete její graf. Určete také rovnici tečny a normály v bodě $x_0 = 1$.

Řešení:

- $D_g = \mathbb{R}$, funkce je kladná na D_g. Sudá, tj. $g(x) = g(-x)$

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}, \\ g(-x) &= (1+(-x)^2)\,\mathrm{e}^{-(-x)^2} = (1+x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{2x\,\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0.$$

- $$g'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} + (1+x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}(-2x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} - 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^3\,\mathrm{e}^{-x^2} = -2x^3\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

  Stacionární body: $g'(x) = 0$, $-2x^3\,\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, $x = 0$, $g(0) = (1+0^2)\,\mathrm{e}^{-0^2} = 1$. Na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce $g(x)$ rostoucí. Na intervalu $(0, \infty)$ je funkce $g(x)$ klesající. Bod $[0, 1]$ je lokální maximum.

- $$g''(x) = -6x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} + (-2x^3)\,\mathrm{e}^{-x^2}(-2x) = (-6x^2 + 4x^4)\,\mathrm{e}^{-x^2} = 2x^2(-3+2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

  $g''(x) = 0$, $2x^2(-3+2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $g(x_2) = g(x_3) = g\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = (1+\frac{3}{2})\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

  Na intervalech $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$ je funkce $g(x)$ konvexní. Na intervalu $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$, $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ je funkce $g(x)$ konkávní. Inflexní body: $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right]$, $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right]$.

- Asymptoty:

  $$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + x}{\mathrm{e}^{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} + 1}{2x\,\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2x^3\,\mathrm{e}^{x^2}} + \frac{1}{2x\,\mathrm{e}^{x^2}}\right) = 0. \\ b &= \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0. \end{aligned}$$

  Bez směrnice neexistuje, se směrnicí $y = ax + b = 0x + 0 = 0$.

- $$\begin{aligned} g(1) &= (1+1^2)\,\mathrm{e}^{-1^2} = 2\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}, \\ g'(x) &= -2x^3\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ g'(1) &= -2\,\mathrm{e}^{-1} = -\frac{2}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

  Tečna t:$(y - \frac{2}{\mathrm{e}}) = -\frac{2}{\mathrm{e}}(x-1)$ nebo ve tvaru t:$y = -\frac{2}{\mathrm{e}}x + \frac{4}{\mathrm{e}}$.
  Normála n:$(y - \frac{2}{\mathrm{e}}) = \frac{\mathrm{e}}{2}(x-1)$ nebo ve tvaru n:$y = \frac{\mathrm{e}}{2})x + \frac{-\mathrm{e}^2+4}{2\,\mathrm{e}}$.
  Graf si nakreslete sami.

4. **(6 bodů)** Vypočítejte limitu
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x &= \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x}\\
&= \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}\\
&= \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}}\\
\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{\arctan x}\\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{\arctan x} = -\frac{2}{\pi}\\
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x &= \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}.
\end{aligned}$$

5. **(5 body)** Napište Taylorův vzorec pro funkci $h(x) = \arcsin\frac{x}{a}$ ve středu $x_0 = \frac{a}{2}$ a $n = 2$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{a}{2}\right) &= \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\\
h'(x) &= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\\
h'\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}} = \frac{1}{a}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3a}\\
h''(x) &= -\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\\
h''\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{(a^2-\frac{a^2}{4})^3}} = \frac{1}{2a^2}\frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9a^2}
\end{aligned}$$

Výsledek

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= f(x_0) + h'(x_0)(x-x_0) + \frac{h''(x_0)}{2}(x-x_0)^2,\\
T_2(x) &= \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3a}\left(x-\frac{a}{2}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{9a^2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

6. **(4 body)** Vypočtěte
$$\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x.$$

Řešení: Metoda per partes

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x &= \ln(\sin x)(-\operatorname{cotg} x) + \int \frac{\cos x}{\sin x}\operatorname{cotg} x \mathrm{d}x \\
&= -\ln(\sin x)\operatorname{cotg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x \\
&= -\ln(\sin x)\operatorname{cotg} x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= -\ln(\sin x)\operatorname{cotg} x + \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= -\ln(\sin x)\operatorname{cotg} x + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x \\
&= -\ln(\sin x)\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} x - x + c = -\operatorname{cotg} x(1+\ln(\sin x)) - x + c.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= \ln(\sin x) \qquad v' = \frac{1}{\sin^2 x} \\
u' &= \frac{\cos x}{\sin x} \qquad v = -\operatorname{cotg} x
\end{aligned}
$$

7. (5 bodů) Vypočtěte

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Pomocné výpočty: $(x^3+1):(x^3-5x^2+6x) = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$, $x^3-5x^2+6x = x(x-3)(x-2)$

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-2}$$

$$
\begin{aligned}
5x^2-6x+1 &= A(x-3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-3) \\
x = 0: A &= \frac{1}{6}, \quad x = 3: B = \frac{28}{3}, x = 2: C = -\frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

Výpočet:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x &= \int \left(1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-3)(x-2)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{\frac{28}{3}}{x-3} + \frac{-\frac{9}{2}}{x-2}\mathrm{d}x = x + \frac{1}{6}\ln|x| + \frac{28}{3}\ln|x-3| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + c.
\end{aligned}
$$