M1101: Matematická analýza I **IV. termín: 27. leden 2009**

ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

Instrukce ke zkoušce:

- Na první stranu nahoru napište své jméno.
- Na první stranu nahoru překreslete následující tabulku:

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	$\sum$	**Z**	$\sum\sum$
Bodový zisk										

- Pokud jste přišli získat zápočet, napište ke svému jménu
  $\bigcirc$
  a proškrtněte sloupec s $\sum\sum$.
- Všechny své výpočty řádně zdůvodněte!
- Před odevzdáním zkontrolujte, zda jsou všechny listy, které odevzdáváte, čitelně podepsané vpravo nahoře.
- Před odevzdáním v tabulce proškrtněte příklady, které jste vůbec neřešili.
- Před odevzdáním očíslujte stránky, jak následují za sebou.
- Minimální čas na vypracování je 100 minut.
- Zadání si můžete ponechat.
- **HODNĚ ŠTĚSTÍ!** (Pokud jej potřebujete.)

ŘEŠENÍ:

1. (3 body) Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)}{\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1-2x-x^2)-(1+x)^2}{x(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1-2x-x^2-1-2x-x^2}{x(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-4x-2x^2}{x(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x(2+x)}{x(\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2(2+x)}{\sqrt{1-2x-x^2}+(1+x)} = \frac{-4}{2} = -2.
\end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(-2-2x)}{2\sqrt{1-2x-x^2}}-1}{1} = -2.$$

2. (5 bodů) Určete definiční obor funkce

$$f(x) = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2},$$

zderivujte ji a výsledek upravte.

Řešení:

Definiční obor:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2} \geq 0 \quad \wedge \quad -1 \leq \sqrt{\frac{x}{2}} \leq 1 \quad &\wedge \quad 2x-x^2 \geq 0 \\
x \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x}{2} \leq 1 \quad &\wedge \quad x(2-x) \geq 0 \\
x \leq 2 \quad &\wedge \quad x \in [0,2]
\end{aligned}$$

$D_f = [0,2]$.

Derivace:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2}\right)' = \frac{2}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2}}\frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2}}} - \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}}\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} - \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} - \frac{1-x}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}} \\
&= \frac{1-1+x}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}} = \frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}.
\end{aligned}$$

3. (12 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$g(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

a nakreslete její graf. Určete také rovnici tečny a normály v bodě $x_0 = 0$.

Řešení:

- $D_g = \mathbb{R}$, nulový bod $[2, 0]$, funkce je záporná na intervalu $(-\infty, 2)$ a kladná na intervalu $(2, \infty)$.

  Není sudá, lichá, periodická.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-4x+4}{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

- První derivace funkce $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{2x(x-2)}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2+2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Stacionární body:

$$g'(x) = 0,$$
$$\frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$
$$2x+1 = 0,$$
$$x = -\frac{1}{2},$$
$$g(-\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}-2}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = -\sqrt{5}.$$

Na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$ je funkce $g(x)$ klesající. Na intervalu $(-\frac{1}{2}, \infty)$ je funkce $g(x)$ rostoucí.

Bod $[-\frac{1}{2}, \sqrt{5}]$ je lokální minimum.

- Druhá derivace funkce $g(x)$:

$$g''(x) = \frac{2(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (2x+1)\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2+1)^3} = \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x^2+2-6x^2-3x)}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x^2-3x+2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

Výpočet inflexních bodů:

$$g''(x) = 0,$$
$$\frac{-4x^2-3x+2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = 0,$$
$$4x^2+3x-2 = 0,$$
$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{41}}{8},$$
$$x_2 = \frac{-3-\sqrt{41}}{8}.$$

Na intervalech $\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8}\right)$, $\left(\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, \infty\right)$ je funkce $g(x)$ konkávní. Na intervalu $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\right)$ je funkce $g(x)$ konvexní.

$$g\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{8}\right) = \frac{\frac{-3-\sqrt{41}}{8} - 2}{\sqrt{\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{8}\right)^2 + 1}} = \frac{-3-\sqrt{41}-16}{\sqrt{9+6\sqrt{41}+41+64}}$$
$$= \frac{-19-\sqrt{41}}{\sqrt{6}\sqrt{19+\sqrt{41}}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{19+\sqrt{41}} = -\sqrt{\frac{19+\sqrt{41}}{6}}$$
$$g\left(\frac{-3+\sqrt{41}}{8}\right) = \frac{\frac{-3+\sqrt{41}}{8} - 2}{\sqrt{\left(\frac{-3+\sqrt{41}}{8}\right)^2 + 1}} = \frac{-3+\sqrt{41}-16}{\sqrt{9-6\sqrt{41}+41+64}}$$
$$= \frac{-19+\sqrt{41}}{\sqrt{6}\sqrt{19-\sqrt{41}}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{19-\sqrt{41}} = -\sqrt{\frac{19-\sqrt{41}}{6}}$$

Inflexní body: $\left[\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, -\sqrt{\frac{19+\sqrt{41}}{6}}\right] \doteq [-1,18; -1,78]$, $\left[\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, -\sqrt{\frac{19-\sqrt{41}}{6}}\right] \doteq [0,42; -1,44]$.

- Asymptoty:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1}} = 0.$$
$$b_1 = \lim_{x\to\infty} (g(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = 1.$$
$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (g(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = -1.$$

Bez směrnice neexistuje, se směrnicí jsou dvě $y = ax + b_1 = 1$, $y = ax + b_2 = -1$.

-

$$g(0) = -2,$$
$$g'(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$g'(0) = 1$$

Tečna t: $(y+2) = x$ nebo ve tvaru t: $y = x - 2$.

Normála n: $(y+2) = -x$ nebo ve tvaru n: $y = -x - 2$. Graf si nakreslete sami.

4. (6 bodů) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x} &= \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}\\
&= \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}\\
\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}\left(\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\sin\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}} = \frac{1-0}{0+1} = 1\\
\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x} &= \mathrm{e}\,.
\end{aligned}$$

5. (5 body) Napište Taylorův vzorec pro funkci $h(x)=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ ve středu $x_0=a$ a $n=2$, kde $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
h(a) &= \frac{1}{a}\arctan 1 = \frac{\pi}{4a}\\
h'(x) &= \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}\frac{a^2}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2+x^2}\\
h'(a) &= \frac{1}{a^2+a^2} = \frac{1}{2a^2}\\
h''(x) &= -\frac{2x}{(a^2+x^2)^2}\\
h''(a) &= -\frac{2a}{(a^2+a^2)^2} = -\frac{2a}{(2a^2)^2} = -\frac{2a}{4a^2} = -\frac{1}{2a^3}.
\end{aligned}$$

Výsledek

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= f(x_0)+h'(x_0)(x-x_0)+\frac{h''(x_0)}{2}(x-x_0)^2,\\
T_2(x) &= \frac{\pi}{4a}+\frac{1}{2a^2}(x-a)+-\frac{1}{4a^3}(x-a)^2.
\end{aligned}$$

6. (4 body) Vypočtěte

$$\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x.$$

Řešení: Metoda substituce $y=1+\ln x$, $\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{x}\frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x = \int\frac{y-1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \int\left(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\mathrm{d}y\\
&= \int(y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}y = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-2y^{\frac{1}{2}}+c\\
&= \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}-2(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}+c = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}-2\sqrt{(1+\ln x)}+c.
\end{aligned}$$

7. (5 bodů) Vypočtěte
$$\int \frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Pomocné výpočty:
$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned}
1 &= A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)\\
x &= 1 : A = \frac{1}{4}, \quad x = -1 : B = -\frac{1}{4},\\
x^0 &: 1 = A - B - D, \quad D = -\frac{1}{2}\\
x^3 &: 0 = A + B + C, \quad C = 0.
\end{aligned}$$

Výpočet:
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x\\
&= \int \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|} - \frac{1}{2}\arctan x + c.
\end{aligned}$$