Testy ze Základů matematiky 2007/2008

1. a) Symbol $<$ interpretujme jako obvyklé ostré uspořádání čísel. Rozhodněte, zda formule $\varphi = (\forall x)(\exists y)(y < x)$ je pravdivá v $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{N}$ a své tvrzení zdůvodněte.

   b) Napište negaci formule φ a upravte ji.

2. Vypište výčtem prvků množinu $A = \{B \mid \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq B \subseteq \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})\}$.

3. Pro množiny $A, B_i, i \in I$ dokažte

$$A \times \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i).$$

4. K zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1$ najděte zobrazení inverzní a ověřte, že se jedná o inverzi.

5. Pro množinu $A = \{1, 2, 3\}$ najděte dvě bijektivní zobrazení $f, g : A \to A$ tak, aby $f \circ g \neq g \circ f$ a současně $f^{-1} = f$.

---

1. Nechť R, S jsou relace na množině $\mathbb{N}$. Rozhodněte, zda platí následující implikace a své tvrzení dokažte:

   a) R, S jsou symetrické $\Rightarrow$ $R \circ S$ je symetrická,

   b) R, S jsou reflexivní $\Rightarrow$ $R \cap S$ je reflexivní.

2. Určete rozklad podle jádra zobrazení $f : \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \to \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, $f(X) = X \cap \{1, 2\}$.

3. Pro $a, b \in \mathbb{N} - \{1\}$ klademe

$$a \sim b \Leftrightarrow m = n \text{ pro } a = p_1 p_2 \dots p_m, b = q_1 q_2 \dots q_n,$$
$$p_1, p_2, \dots, p_m, q_1, q_2, \dots, q_n \text{ prvočísla.}$$

Ověřte, že $\sim$ je ekvivalence na $\mathbb{N} - \{1\}$ a určete, čemu odpovídá rozklad $(\mathbb{N} - \{1\})/\sim$.

4. Načrtněte hasseovský diagram šestiprvkové množiny, která má (současně) největší prvek, právě dva minimální prvky a právě čtyři automorfismy (tj. isomorfismy na sebe).

5. Najděte nějaké prosté izotonní zobrazení $(\mathbb{N}, \leq)$ do $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

---

1. Nechť R, S jsou relace na množině $\mathbb{N}$. Rozhodněte, zda platí následující implikace a své tvrzení dokažte:

a) R, S jsou antisymetrické $\Rightarrow R \cap S$ je antisymetrická,

b) R, S jsou reflexivní $\Rightarrow R \circ S$ je reflexivní.

2. Určete rozklad podle jádra zobrazení $f : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$, $f(X) = X - \{1\}$.

3. Pro $a, b \in \mathbb{Q}$ klademe

$$\begin{aligned} a \sim b \Leftrightarrow p = m \text{ pro } a = \frac{p}{q}, b = \frac{m}{n},\\ p, q \text{ nesoudělná}, m, n \text{ nesoudělná},\\ p, m \in \mathbb{Z}, q, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ověřte, že $\sim$ je ekvivalence na $\mathbb{Q}$ a určete, čemu odpovídá rozklad $\mathbb{Q}/\sim$.

4. Načrtněte hasseovský diagram šestiprvkové množiny, která má (současně) nejmenší prvek, právě čtyři maximální prvky a právě čtyři automorfismy (tj. isomorfismy na sebe).

5. Najděte nějaké surjektivní izotonní zobrazení $(\mathbb{Z}, \leq)$ na $(\mathbb{N}, \leq)$.