Verze A1 (každý příklad je za 2body)

1. Rozhodněte, jestli řada konverguje nebo diverguje:

$$\text{a.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{9n+1}}{\sqrt{4n+1}}, \qquad \text{b.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}.$$

Řešení: a) Ověříme nutnou podmínku konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n+1}}{\sqrt{4n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{1}{n}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{diverguje.}$$

b) Použijeme podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{e^n}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}(n+1)!}{e^n(n+2)(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{(n+2)} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Konverguje.}$$

2. Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}, \qquad |x| \geq 2.$$

Řešení: Použijeme Weierstrassovo kriterium:

$$\frac{1}{4^n} \text{ je konvergentní, geometrická s } q = \frac{1}{4} < 1$$

$$\left|\frac{1}{x^{2n}}\right| \leq \frac{1}{4^n} \Rightarrow 4^n \leq (x^2)^n \Rightarrow 4 \leq x^2 \Rightarrow \text{konverguje stejnoměrně.}$$

3. Určete obor konvergence mocniné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}(x-1)^n.$$

Řešení: $x_0 = 1$,

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n5^n}}{\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{n5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)5}{n} = 5,$$

$x = -4: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}(-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 0 \Rightarrow$
je splněna nutná podmínka konvergence, řada konverguje.
$x = 6: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}(5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \Rightarrow$ harmonická řada, diverguje.
Obor konvergence mocniné řady je $x \in [-4, 6)$.

4. Určete součet mocniné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-1}}{2^n}.$$

Řešení:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x^{n-1})'}{2^n} == x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n-1}}{2^n}\right)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n}\right)' = x \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)' =$$

$$= \left[\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 2\right] = x \left(\frac{1}{2-x}\right)' = x \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{x}{(2-x)^2}.$$

5. Pomocí čtyř prvních členů Maclaurinova rozvoje určete přibližnou hodnotu výrazu:

$$\sqrt[4]{90}.$$

Řešení: Použijeme binomický rozvoj

$$\sqrt[4]{90} = \sqrt[4]{81+9} = \sqrt[4]{3^4+3^2} = \sqrt[4]{3^4\left(1+\frac{1}{3^2}\right)} = 3\left(1+\frac{1}{3^2}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= 3\left(1 + \frac{1}{4}\frac{1}{3^2} + \frac{\frac{1}{4}\frac{-3}{4}}{2}\frac{1}{3^4} + \frac{\frac{1}{4}\frac{-3}{4}\frac{-7}{4}}{2*3}\frac{1}{3^6}\right) = 3 + \frac{1}{3*4} - \frac{1}{32*3^2} + \frac{7}{128*3^5} = 3,0801.$$