

Transformace náhodné veličiny

Borelovská funkce: Zobrazení $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazýváme **borelovskou funkcí**, právě když úplný vzor každé borelovské množiny je opět borelovská množina, tj.

$$\forall B \in \mathcal{B}^m; \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) \in B\} \in \mathcal{B}^n$$

Pozn.: Jedná se zejména o funkce spojitě.

Z dané náhodné veličiny $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vytvoříme pomocí borelovské funkce $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zobrazení $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dané takto:

$$\forall \omega \in \Omega; Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Toto zobrazení je opět náhodná veličina a nazývá se **transformovaná** náhodná veličina.

Náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x)$ a pravděpodobnostní funkci $\pi(x)$ nebo hustotu $f(x)$. Náhodná veličina $Y = g(X)$ má distribuční funkci $F_*(y)$ a pravděpodobnostní funkci $\pi_*(y)$ nebo hustotu $f_*(y)$. Označíme τ inverzní funkci k funkci g , pak platí:

1. X je diskrétní náhodná veličina

$$\pi_*(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X = \tau(y)) = \pi(\tau(y))$$

2. X je spojitá náhodná veličina, g je rostoucí funkce a necht' existuje její derivace τ

$$F_*(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq \tau(y)) = F(\tau(y))$$

$$f_*(y) = \frac{dF_*(y)}{dy} = f(\tau(y)) \frac{d\tau(y)}{dy}$$

3. X je spojitá náhodná veličina, g je klesající funkce a necht' existuje její derivace τ

$$F_*(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq \tau(y)) = 1 - P(X \leq \tau(y)) = 1 - F(\tau(y))$$

$$f_*(y) = \frac{dF_*(y)}{dy} = -f(\tau(y)) \frac{d\tau(y)}{dy}$$

Celkem pro spojitou náhodnou veličinu X platí:

$$f_*(y) = \frac{dF_*(y)}{dy} = f(\tau(y)) \left| \frac{d\tau(y)}{dy} \right|$$

1. Náhodná veličina X má normální rozdělení, tedy $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, provedem transformaci $Y = a + bX$, kde $b \neq 0$. Určete $f_*(y)$.
2. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina X , která má rozdělení $N(20, 16)$, nabude hodnoty:
 - a) menší než 16
 - b) větší než 20
 - c) v mezích od 12 do 28
 - d) menší než 12 nebo větší než 28?
3. Náhodná veličina Y je funkcí náhodné veličiny X (tedy $Y = g(X)$). Určete, čemu se rovná hustota pravděpodobnosti $f_*(y)$ jestliže platí:

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} ; \quad Y = X^2$$

4. Hledáme pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y , jestliže platí:

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{pro } x = 0, 1, \dots \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} ; \quad Y = 4X$$

5. Je dána náhodná veličina $X \sim Rs(0, 2\pi)$. Najděte hustotu $Y = \cos(X)$.

6. Nechť náhodná veličina $X \sim Rs(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Najděte hustotu transformované náhodné veličiny $Y = \text{tg}(X)$.