

Kombinatorika

Variace bez opakování: k -členná variace z n prvků je **uspořádaná** k -tice z těchto prvků tak, že se každý v ní vyskytuje **nejvýše jednou**.

Počet $V_k(n)$ všech k -členných variací z n prvků je

$$V_k(n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

kde $n!$ je **faktoriál**. $0! = 1$ je definováno.

Příklad 1. Ve škole je 10 různých předmětů a každý se učí nejvýše 1 hodinu denně. Kolikerym způsobem je možno sestavit rozvrh hodin na jeden den, je-li tento den 5 různých předmětů.

Příklad 2. Kolik různých čtyřciferných čísel lze napsat číslicemi 0, 1, 4, 7, 9, aniž by se čísla opakovala? Kolik z nich je sudých?

Příklad 3. K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

1. Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit [60]
2. Kolik z nich má modrý pruh? [36]
3. Kolik jich má modrý pruh uprostřed? [12]
4. Kolik jich nemá uprostřed červený pruh? [48]

Příklad 4. Určete počet prvků, z nichž lze vytvořit

1. 240 dvoučlenných variací;
2. dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných variací.

Příklad 5. V biochemické laboratoři se rozhodli prozkoumat účinnost pěti různých látek, které měly být podávány pokusným myším vždy po dvou. Každý pokus byl proveden na jedné myši. Kolik myší bylo zapotřebí, přičemž chtěli zjistit, jestli záleží na pořadí léků?

Variace s opakováním: k -členná variace s opakováním z n prvků je **uspořádaná** k -tice z těchto prvků tak, že se každý v ní vyskytuje **nejvýše k -krát**.

Počet $V'_k(n)$ všech k -členných variací z n prvků je

$$V'_k(n) = n^k,$$

Příklad 6. Určete počet všech trojčiferných čísel.

Příklad 7. Kolik různých vrhů může nastat současně dvěma různě barevnými hracími kostkami?

Příklad 8. Pokladna má zámek s pěti kotouči na nichž jsou číslice 0,1,...9. Zámek se otevře jestliže se nastaví pěticeforné číslo, které je heslem. Pokladník zapomene heslo a pamatuje si pouze číslici na místě desítek. Jak dlouho by mu trvalo vyzkoušet všechny možnosti, jestliže na nastavení jedné pětice potřebuje 3,6 s.

Permutace bez opakování: Permutace z n prvků je každá n -členná variace z těchto prvků neboli uspořádaná n -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

$$P(n) = V_n(n) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!$$

Příklad 9. Určete počet všech pěticeforných čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0,1,3,4,7. Kolik z těchto čísel je

1. dělitelných šesti;
2. větších než 70134?

Příklad 10. Určete součet všech čtyřciferných čísel sestavených z číslic 1,3,5,7 bez opakování číslic.

Permutace s opakováním: Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k -tice ustavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň jednou.

Pozn.: Označme k_1, k_2, \dots, k_p kolikrát se každý z daných prvků opakuje.

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_p) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_p)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_p!}$$

$$P'(k; n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Příklad 11. Kolik různých slov (majících i nemajících smysl) lze vytvořit z písmen slova

1. PARDUBICE
2. PRAHA
3. PROKOP
4. MISSISSIPPI

Příklad 12. BRIDŽ: 52 karet se rozdává mezi 4 hráče tak, že každý má 13 karet. Kolik různých rozdání existuje?

Příklad 13. Kolika způsoby je možno rozdělit 9 pracovníků na 3 pracoviště, jestliže na první jsou zapotřebí čtyři pracovníci, na druhé tři a na třetí dva.

Kombinace bez opakování: k -členná kombinace z n prvků je **neuspořádaná** k -tice sestavená z těchto prvků tak, že se každý vyskytuje **nejvýše jednou**.

$$C_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$\binom{n}{k}$... kombinační číslo

Příklad 14. Pět přátel se loučí

1. kolik stisků ruky si navzájem vymění;
2. kolik stisků ruky si vymění, jestliže se loučí jen tři?

Příklad 15. V lavici sedí pět chlapců z nichž dva bratři chtějí sedět vedle sebe. Kolikrát můžeme chlapce přesadit?

Příklad 16. Je dáno n ($n > 2$) bodů v rovině z nichž žádné 3 neleží v přímce a žádné 4 na kružnici. Kolik kružnic je těmito body určeno a kolik jich prochází každým z bodů?

Příklad 17. Na mistrovství světa v ledním hokeji bylo vysláno 22 hráčů z toho 12 útočníků, 8 obránců a 2 brankáři. Nepřihlížejme k tomu, že např. obránce může hrát na levé nebo pravé straně obrany. Kolik různých sestav může trenér z těchto hráčů sestavit?

Příklad 18. V podniku pracuje 18 mužů a 16 žen. Kolika způsoby lze vybrat 7 zaměstnanců tak, aby to byli

1. 4 muži a 3 ženy;
2. 6 mužů a 1 žena.

Příklad 19. V soutěžní porotě je 10 znalců. Při hlasování hlasovalo 7 členů pro návrh a 3 proti. Kolika způsoby to mohlo nastat?

Kombinace s opakováním: k -členná kombinace s opakováním z n prvků je **neuspořádaná** k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát.

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = C_k(n+k-1)$$

Příklad 20. Existují 4 krevní skupiny – A, B, AB, 0. Určete počet všech možných rozdělení 10 osob podle uvedených krevních skupin.