# Pravděpodobnost

$\Omega$ – **základní prostor**, množina všech výsledků

$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ – **možné výsledky**, prvky množiny $\Omega$

$A$ – **náhodný jev**, $A \subseteq \Omega$

$A^c$ – **jev opačný**, $A^c = \Omega \backslash A$

$\omega_i$ – **elementární jev**

$\Omega$ – **jev jistý**

$\emptyset$ – **jev nemožný**

$A \cap B = \emptyset$ – **jevy neslučitelné**

$A \subseteq B$ – jev $B$ je **důsledkem** jevu A

**Příklad 1.** Určitý výrobek je podroben třem různým zkouškám. Označme následující jevy
A – náhodně vybraný výrobek obstojí při první zkoušce
B – obstojí ve druhé
C – obstojí ve třetí

Vyjádřete v množinové symbolice, že výrobek obstojí

1. jen v první zkoušce
2. v první a druhé zkoušce, ale neobstojí ve třetí zkoušce
3. ve všech třech zkouškách
4. alespoň v jedné zkoušce
5. právě v jedné zkoušce
6. maximálně dvakrát

**Příklad 2.** Jev $A$ znamená, že aspoň jeden ze čtyř výrobků je zmetek, jev $B$ znamená, že aspoň dva ze čtyř výrobků jsou zmetky. Co znamenají jevy $A^c, B^c$?

**Příklad 3.** Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Jev $A$ je „padne sudé číslo“, jev $B$ je „padne číslo dělitelné třemi“. Co znamená jev $A \backslash B$?

$\mathcal{A}$ – **jevové pole**, systém podmnožin množiny $\Omega$, která splňuje podmínky:

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak je i $A \backslash B \in \mathcal{A}$,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak i $A \cup B \in \mathcal{A}$.

$(\Omega, \mathcal{A})$ – **měřitelný prostor**

**Příklad 4.** Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Určete všechna možná jevová pole na tomto základním prostoru.

**Definice 1:** Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. **Pravděpodobnost** je $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

1. $P(A) \geq 0$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. jestliže $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou **po dvou disjunktní** množiny, pak $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá **pravděpodobnostní prostor**.

**Příklad 5.** Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$. Vypište všechny reálné funkce, které zobrazují jevové pole $\mathcal{A}$ do množiny $0, 1, \theta, 1-\theta$ $(0 < \theta < 1)$ a jsou pravděpodobnostmi.

## Klasická pravděpodobnost

**Definice 2:** Nechť základní prostor $\Omega$ je konečná neprázdná množina a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je systémem všech podmnožin základního prostoru. Označme $m(\Omega)$ počet všech možných výsledků a pro libovolný jev $A \in \mathcal{A}$ označme $m(A)$ počet možných výsledků příznivých jevu $A$. Pak reálnou funkci $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definovanou pro všechna $A \in \mathcal{A}$ vztahem

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1}$$

nazveme **klasická pravděpodobnost.**

**Příklad 6. Vrchcáby** – hod šesti různobarevnými kostkami. Vypočtěte pravděpodobnost následujících „figur“:

1. $A_1$ …na první kostce 1, na druhé 2, …na šesté 6
2. $A_2$ …(sekvens) 1–6 kdekoli
3. $A_3$ …(generál) samé 6
4. $A_4$ …právě 5 šestek
5. $A_5$ …(poker) právě čtyři 6
6. $A_6$ …alespoň čtyři 6
7. $A_7$ …šest stejných
8. $A_8$ …trojice stejných a trojice jiných stejných
9. $A_9$ …tři dvojice stejných
10. $A_{10}$ …samé sudé.

**Příklad 7.** Firma investovala do tří nezávislých projektů. Pravděpodobnost zisku z těchto projektů je 0,4, 0,5 a 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že firma bude mít zisk:

1. právě jedenkrát (jev A)
2. alespoň jedenkrát (jev B) [0.91]
3. právě dvakrát (jev C) [0.41]
4. aspoň dvakrát (jev D) [0.55]
5. ze všech tří projektů (jev E) [0.14]
6. ze žádného projektu (jev F)? [0.09]

**Příklad 8.** V osudí je $a$ bílých a $b$ černých koulí.

1. $k$-krát po sobě táhneme (bez vracení) po jedné kouli. Jaká je pravděpodobnost, že poslední tažená koule je bílá?
2. Vytáhneme jedním tahem $(\alpha + \beta)$ koulí $(\alpha \leq a, \beta \leq b)$. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme $\alpha$ bílých a $\beta$ černých koulí?

**Příklad 9.** Hodíme $n$-krát po sobě kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň na jedné kostce padne 6?

**Příklad 10.** V balíku $n$ výrobků je $k$ zmetků. Určete pravděpodobnost toho, že mezi $m$ výrobky, náhodně vybranými ke kontrole, bude právě $l$ zmetků.

**Příklad 11.** Z urny, která obsahuje $n$ koulí s čísly $1, \ldots, n$ se postupně táhnout 2 koule. Přitom se 1. koule vrací pokud její číslo není rovno 1. Určete pravděpodobnost toho, že koule č. 2 bude vytažena při druhém tahu.

**Příklad 12. Hod mincí:** Dva hráči střídavě házejí mincí. Vyhrává ten, kterému dříve padne líc. Určete pravděpodobnost výhry každého hráče.

**Příklad 13.** V urně je $n$ bílých, $m$ černých a $l$ červených koulí, které se náhodně vybírají s vracením. Určete pravděpodobnost, že bílá bude vybrána dříve než černá.