Základní a výběrové soubory

Nechť je dán základní soubor $E = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, kde ε_i udává – táhneme i-tý prvek. Z n prvků je r označených a $n-r$ neoznačených. k-krát táhneme s vracením/bez vracení a přitom je výsledný soubor uspořádaný nebo neuspořádaný. Budeme uvažovat tři jevy:

- A … prvky se neopakují
- B … daný prvek se vyskytuje ve výběru
- C … ve výběru je právě x označených prvků.

I. **Uspořádané výběry bez opakování**
$\Omega = \{\omega_i = (\varepsilon_{i1}, \dots \varepsilon_{ik}); \forall\, i, j; \varepsilon_{ij} \in E \wedge \varepsilon_{ij} \neq \varepsilon_{it} \text{ pro } j \neq t\}$

- $p(A_1) = \dfrac{V_k(n)}{V_k(n)} = 1$
- $p(B_1) = \dfrac{k \cdot V_{k-1}(n-1)}{V_k(n)} = \dfrac{k}{n}$
- $p(C_1) = \dfrac{\binom{k}{x}(V_x(r) \cdot V_{k-x}(n-r))}{V_k(n)} = \dfrac{\binom{r}{x}}{\binom{n}{k}}\binom{n-r}{k-x}$ … **Hypergeometrické rozdělení**

$n \to \infty : \lim\limits_{n,r\to\infty} \dfrac{r}{n} = \theta > 0$: $\boxed{\lim\limits_{\substack{n,r\to\infty \\ \frac{r}{n}\to\theta}} P(C_1) = \binom{k}{x}\theta^x(1-\theta)^{k-x}}$

II. **Uspořádané výběry s opakováním**
$\Omega = E \times E \times \dots E = E^k = \{\omega_i = (\varepsilon_{i1} \dots \varepsilon_{ik}); \varepsilon_{ij} \in E\}$

- $P(A_2) = \dfrac{V_k(n)}{V'_k(n)} = \prod\limits_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)$
- $P(B_2) = 1 - \dfrac{(n-1)^k}{n^k} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$
- $P(C_2) = \dfrac{\binom{k}{x} V'_k(r) \cdot V'_{k-x}(n-r)}{V'_k(n)} = \binom{k}{x} \left(\frac{r}{n}\right)^x \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{k-x}$… **Binomické rozdělení**

III. **Neuspořádané výběry bez opakování**
$\Omega = \{\omega_i = \{\varepsilon_{i1}, \dots \varepsilon_{ik}\}; \varepsilon_{ij} \in E \wedge \forall t \neq j,\ \varepsilon_{it} \neq \varepsilon_{ij}\}$

- $P(A_3) = \dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k}} = 1$
- $P(B_3) = \dfrac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$
- $P(C_3) = \dfrac{\binom{r}{x} \cdot \binom{n-r}{k-x}}{\binom{n}{k}}$ … **hypergeometrické rozdělení**

Pokud máme více označených skupin: $n_1, n_2, \dots, n_r$ a vybíráme $x_1, x_2 \dots x_r$ prvků, dostáváme

- **multinomické rozdělení:** je zobecněním binomického
$\frac{n!}{x_1! \dots x_{r-1}! x_r!} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{x_1} \dots \left(\frac{n_{r-1}}{n}\right)^{x_{r-1}} \left(\frac{n_r}{n}\right)^{x_r}$
- **multihypergeometrické** - bez vracení
$\dfrac{\binom{n_1}{x_1} \dots \binom{n_r}{x_r}}{\binom{n}{k}}$

Mějme p věcí a rozdělme je do N osudí. Jaká je pravděpodobnost, že zvolené osudí bude obsahovat k věcí, když věci jsou:

1. rozlišitelné ... **Maxwellovo–Boltzmannovo schéma výběru**
2. nerozlišitelné ... **Boseovo–Einsteinovov schéma výběru**

Za podmínky, že v každé přihrádce je nejvýš jedna věc je **Fermitovo–Diracovo schéma**.

1. Mějme k koulí číslovaných 1,2,..., k a n přihrádek. Každou kouli náhodně vyhodíme do jedné z přihrádek. Jaká je pravděpodobnost, že v první přihrádce je právě m koulí? [*M–B model*]

2. [*B–E model*]

   (a) Do vlaku s n vagóny nastoupilo k cestujících, kteří si zvolili náhodně vagón. Určete pravděpodobnost, že ve vybraném vagóně je x cestujících.

   (b) Máme k korun náhodně rozdělit n osobám. Jaká je pravděpodobnost, že vybraný jedinec dostal x korun?

3. [**Pólyovo–urnové schéma:**] Mějme urnu s a bílými a b černými koulemi. Z urny vytáhneme kouli, vrátíme ji zpět a přidáme δ koulí stejné barvy. Tento postup opakujeme n-krát. Jaká je pravděpodobnost, že mezi taženými koulemi je m bílých a $n - m$ černých?

4. [*Narozeniny:*] Ve třídě je n studentů, jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva studenti mají narozeniny ve stejný den? (problém n věcí v N přihrádkách – $N = 365$)

5. [*Klíče ve tmě:*] Kdosi má v kapse n klíčů a chce potmě otevřít dveře svého bytu. Vyjímá naslepo klíče z kapsy jeden po druhém a zkouší jimi otevřít dveře. Jaká je pravděpodobnost toho, že při k-tém pokusu zvolí správný klíč?

6. [*Šrouby:*] Zákazník koupil v železářství m mosazných a $n - m$ železných šroubů téže velikosti. Prodavač vložil všechny šrouby do jedné krabičky, šrouby se tedy promíchaly. Doma zákazník šrouby postupně po jednom vybíra až je krabička prázdná. Jaká je pravděpodobnost, že mosazný šroub vytáhl poprvé při k-tém tahu?