Pravděpodobnost sjednocení jevů

- $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
- $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum\limits_{i=1}^{n-2} \sum\limits_{j=i+1}^{n-1} \sum\limits_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i)$
- $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i^c)$

1. Otec chtěl napsat n různých dopisů pro n různých adresátů, dítě iniciativně dopisy vložilo do obálek a obálky zalepilo. Pokud otec náhodně napíše na obálky příslušných n adres, jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna dojde na správnou adresu?

2. Hodíme naráz n kostkami ($n \geq 6$). Jaká je pravděpodobnost, že každé z čísel 1–6 padne alespoň jednou?

3. Do výtahu n poschoďové budovy nastoupilo k osob ($k \geq n$). Za předpokladu, že každá z nich vystoupí se stejnou pravděpodobností v libovolném poschodí, vypočítejte pravděpodobnost, že v každém poschodí vystoupí alespoň jedna osoba.

Podmíněná a úplná pravděpodobnost

Definice: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $H \in \mathcal{A}$ jev s nenulovou pravděpodobností. Pro každé $A \in \mathcal{A}$ definujeme **podmíňenou pravděpodobnost** vzorcem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \tag{1}$$

4. V populaci je 5 % diabetiků, 2 % populace jsou diabetici kuřáci. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený diabetik je kuřák?

5. Jaká je pravděpodobnost, že na dvou kostkách padnou dvě pětky, je-li známo, že součet ok je dělitelný pěti?

6. Z urny, v níž je a bílých a b černých koulí, vybereme postupně bez vracení dvě koule. Jaká je pravděpodobnost, že druhá koule je bílá, za předpokladu, že první byla bílá?

7. Profesor cestou domů z fakulty navštíví čtyři různé obchody. Pravděpodobnost, že v obchodě zapomene deštník, je $\frac{1}{4}$.
   (a) Určete pravděpodobnost, že deštník zapomněl ve čtvrtém obchodě.
   (b) Když přijde domů bez deštníku, určete pravděpodobnost, že ho zapomněl ve čtvrtém obchodě.

Věta o úplné pravděpodobnosti: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a nechť je dán rozklad $\{H_i\,;\, i \in I\}$ základního prostoru Ω na nejvýše spočetně mnoho neslučitelných jevů H_i s vlastností $P(H_i) > 0$ (tzv. apriorní pravděpodobnosti) a $P(\bigcup\limits_{i \in I} H_i) = 1$. Říkáme, že je dán **úplný systém hypotéz**. Potom platí:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i) \tag{2}$$

8. Potřebu smrkových sazenic kryje lesní závod produkcí dvou školek. První školka kryje 75 % výsadby, přičemž ze 100 sazenic je 80 první jakosti. Druhá školka kryje výsadbu z 25 % přičemž

na 100 sazenic je 60 první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná sazenice je první jakosti?

9. Tři výrobci dodávají žárovky do obchodu. První výrobce dodává 45 %, druhý 40 % a třetí 15 % celkového množství. První dodavatel má 70 % standardních žárovek, druhý 80 % a třetí 81 % standardních žárovek. Určete pravděpodobnost, že si zákazník koupí standardní žárovku.