

Bayesův vzorec

Věta: Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor a nechť je dán rozklad $\{H_i; i \in I\}$ základního prostoru Ω na nejvýše spočetně mnoho neslučitelných jevů H_i s vlastností $P(H_i) > 0$ a $P(\bigcup_{i \in I} H_i) = 1$. Pak pro $P(A) > 0$ a pro libovolný jev $B \in \mathcal{A}$ dostáváme:

1. Bayesův vzorec

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} \quad (1)$$

2. Bayesův vzorec

$$P(B|A) = \frac{\sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i) \cdot P(B|A \cap H_i)}{\sum_{i \in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} \quad (2)$$

- Mezi šesti puškami jsou pouze dvě zastřílené. Pravděpodobnost zásahu je u zastřílené 0,9 a u nezastřílené 0,2. Náhodně vybranou puškou se podařilo cíl zasáhnout, jaká je pravděpodobnost, že šlo o zastřílenou pušku?
- Jsou dána tři osudí s bílými a černými koulemi. Pravděpodobnost volby i -tého osudí je p_i pro $i = 1, 2, 3$, pravděpodobnost vytažení bílé koule z i -tého osudí je q_i pro $i = 1, 2, 3$. zvolíme náhodně jedno osudí, vytáhneme z něj jednu kouli. Ukázalo se, že je bílá. Jaká je pravděpodobnost, že vytažená koule pocházela z prvního osudí?
- V první zásuvce jsou 2 zlaté mince, ve druhé je 1 zlatá a 1 stříbrá, ve třetí zásuvce jsou 2 stříbrné mince. Zvolíme náhodně zásuvku a vytáhneme minci. Jaká je pravděpodobnost, že v zásuvce zůstane zlatá mince, jestliže jsme vytáhli stříbrnou?
- V urně je n koulí – bílé a černé. Byla naplněna tak, že někdo hodil n -krát kostkou, když padla 6, vložil do urny bílou kouli, jinak černou. Z takto naplněné urny byla náhodně vybrána jedna koule a ukázalo se, že je bílá. Jaká je pravděpodobnost, že urna před tímto tahem obsahovala jen bílé koule?
- V testu jsou u každé otázky uvedeny čtyři možné odpovědi. Zná-li student správnou odpověď, má pravděpodobnost rovnu 1, že ji označí správně. Hádá-li, je pravděpodobnost, že vybere správnou odpověď rovna 0,25. Předpokládejme, že dobrý student zná 90 % správných odpovědí, slabší student pouze 50 %. Jestliže dobrý student zodpověděl určitou otázku správně, jaká je pravděpodobnost, že v tomto případě jen hádal? A jak je tomu v případě slabšího studenta?
- Předpokládejme, že snímkování rentgenem prováděné ke zjištění tuberkulózy má tyto vlastnosti: u lidí majících TBC objeví tuto nemoc v 90 % případů, u lidí nemajících tuto nemoc snímek v jednom ze sta případů vede k nesprávné diagnóze (*false positive*). Předpokládejme dále, že TBC se vyskytuje u 5 lidí z 10 000. Náhodně vybraná osoba je snímkována a radiolog hlásí onemocnění TBC. Jaká je pravděpodobnost, že vybraná osoba má skutečně TBC?
- Zákazník si náhodně vybírá obraz ze skupiny obsahující 8 originálů a 2 kopie. Konzultuje s expertem, který pozná originál s pravděpodobností 5/6.
 - Jestliže expert soudí, že obraz je originál, stanovte pravděpodobnost, že se skutečně o originál jedná.
 - Expert soudí, že obraz je kopie. Zákazník obraz odloží a volí náhodně jeden ze zbývajících obrazů. Stanovte pravděpodobnost, že obraz je originál.