Stochasticky nezávislé jevy

Definice: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Řekneme, že jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou **stochasticky nezávislé** (vzhledem k P), právě když platí multiplikativní vztahy:

$$\begin{aligned} \forall\, i < j : &\; P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \\ \forall\, i < j < k : &\; P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) \\ &\;\vdots \\ &\; P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n) \end{aligned}$$

1. V urně máme čtyři lístky s čísly 000, 011, 101, 110. Náhodně vybereme jeden lístek. Uvažujeme tyto tři náhodné jevy:

   - A_1 – vybraný lístek má jedničku na 1. místě
   - A_2 – vybraný lístek má jedničku na 2. místě
   - A_3 – vybraný lístek má jedničku na 3. místě.

   Jsou dané jevy stochasticky nezávislé?

2. Jevy A_1, A_2, A_3 jsou stochasticky nezávislé, $P(A_1) = 0,5$, $P(A_2) = 0,5$, $P(A_3) = 0,25$. Vypočtěte pravděpodobnost nastoupení alepsoň jednoho z jevů A_1, A_2, A_3.

3. Nechť platí $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ a $P(A \cup B) = 0,6$. Rozhodněte, zda jevy A, B jsou závislé či nezávislé.

4. Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnost zásahu při prvním, druhém a třetím výstřelu je postupně 0,4, 0,5 a 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že střelec zasáhne cíl

   (a) právě jedenkrát
   (b) alespoň jedenkrát?

5. Do terče se střílí n-krát nezávisle na sobě. Pravděpodobnost zásahu při i-tém výstřelu je p_i, $i = 1, 2, \ldots n$. Stanovte pravděpodobnost, že terč bude zasažen alespoň dvakrát.

6. Je pravděpodobnější vyhrát se stejně silným soupeřem tři partie ze čtyř nebo pět partií z osmi, když nerozhodný výsledek je vyloučen a výsledky jsou nezávislé?

Geometrická pravděpodobnost

Definice: Nechť Ω je borelovská množina v $\mathbb{R}^n$ s kladnou a konečnou Lebesgueovou mírou, $\mathcal{A}$ nechť je systém všech borelovských podmnožin množiny Ω a $\mu(A)$ nechť značí Lebesgueovu míru množiny A. Potom množinovou funkci P_G definovanou pro každé $A \in \mathcal{A}$ vztahem $P_G(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ budeme nazývat **geometrickou pravděpodobností**.

7. Jaká je pravděpodobnost, že součet dvou náhodně zvolených kladných čísel menších než 1 bude menší než 1 a jejich součin bude větší než 2/9?

8. Úsečka dlouhá 200 mm je náhodně rozdělena na 3 díly. Určete pravděpodobnost, že prostřední díl bude nejvýše 10 mm dlouhý.

9. Je dán čtverec s vrcholy v bodech: $[1; 1], [-1; 1], [-1; -1], [1; -1]$, ve kterém náhodně vybereme bod M se souřadnicemi $[\mu, \nu]$. Určete pravděpodobnost, že kvadratická rovnice $x^2 + \mu x + \nu = 0$ bude mít reálné kořeny.

10. **Buffonova úloha:** Rovina je rozdělena stejně od sebe vzdálenými rovnoběžkami. Hodíme na ni jehlu menší délky než je vzdálenost rovnoběžek. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku, jestliže každou polohu jehly považujeme za stejně nadějnou?

11. Každý ze dvou parníků může doplout do přístaviště vždy jednou za den, a to se stejnou šancí v kterýkoli jeho okamžik a nezávisle na druhém parníku. První se v přístavišti zdrží jednu hodinu a druhý dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že jeden bude muset čekat až druhý opustí přístaviště?

12. Hodiny, které nejsou natažené, se po nějaké době zasatví. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví mezi 6 a 9?