Náhodná veličina

Definice: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazývá **náhodná veličina** (vzhledem k jevovému poli $\mathcal{A}$), právě když

$$\forall B \in \mathcal{B} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}, \tag{1}$$

tj. úplný vzor každé borelovské množiny je jevem.

Poznámka: Obraz $X(\omega)$ se nazývá **číselná realizace** náhodné veličiny X příslušná k možnému výsledku ω. Množinu $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ zkráceně zapisujeme $\{X \in B\}$ nebo $(X \in B)$

Distribuční funkce

Definice: Funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definována vztahem

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = P(X \leq x), \tag{2}$$

kde $P(X \leq x)$ značí $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$, se nazývá **distribuční funkce** náhodné veličiny X (vzhledem k P).

Distribuční funkce má tyto vlastnosti:

1. je neklesající, tj. pro všechna $x_1 < x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$
2. je zprava spojitá, tj. pro všechna $x_0 \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$
3. $0 \leq F(x) \leq 1$
4. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, ale pevně zvolené je
$$P(X = x_0) = F(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} F(x)$$
5. Pro $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ je $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Diskrétní náhodná veličina

Definice: Náhodná veličina X s distribuční funkcí $F(x)$ se nazývá **diskrétní**, jestliže existuje neprázdná, nejvýše spočetná podmnožina N reálných čísel a funkce $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s těmito vlastnostmi:

1. $\pi(x) > 0$ pro $x \in N$
   $\pi(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} - N$
2. $\sum\limits_{x \in \mathbb{R}} \pi(x) = \sum\limits_{x \in N} \pi(x) = 1$

a pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme $F(x) = \sum\limits_{t \leq x} \pi(t)$. Funkce $\pi(x)$ se nazývá **pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny** X. Platí $\pi(x) = P(X = x)$.

1. Střelec střílí do terče až do prvního zásahu. Má v zásobě čtyři náboje. Pravděpodobnost zásahu je při každém výstřelu 0,6. Náhodná veličina X udává počet nespotřebovaných nábojů. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkcí náhodné veličiny X a nakreslete grafy těchto funkcí.

2. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$\pi(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{7} \cdot 0,7^x & x = 1, 2, \ldots \\ 0 & jinak \end{cases}$$

Jaká je pravděpodobnost, že tato náhodná veličina nabude hodnot:

(a) menších jak 3

(b) větších jak 4

(c) větších jak 1 a menších jak 4?

3. Pro jakou hodnotu parametru $c \in \mathbb{R}$ je funkce

$$\pi(x) = P(X = x) = \begin{cases} c \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x & x = 1, 2, \ldots \\ 0 & jinak \end{cases}$$

pravděpodobnostní funkcí?

4. Po každý kontrolovaný výrobek je pravděpodobnost 0,6, že vydrží zkoušku pevnosti v tahu. Kontrola končí jakmile první výrobek zkoušku nevydrží. Stanovte definiční obor a pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X, která udává počet kontrolovaných výrobků. (*geometrické rozdělení*).

5. Pravděpodobnost, že výrobek bude vyhovovat všem technickým požadavkům je 0,9. Popište rozdělení počtu nevyhovujících mezi třemi výrobky. (*binomické rozdělení*)

Spojitá náhodná veličina

Definice: Řekneme, že náhodná veličina X je (absolutně) **spojitá**, jestliže existuje nezáporná borelovská funkce f tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Funkce f se nazývá **hustota** náhodné veličiny X a je určena jednoznačně až na borelovské množiny míry 0 a platí:

(a) $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$

(b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

6. Spojitá náhodná veličina má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & jinak \end{cases}$$

(a) Určete konstantu a.

(b) Vypočtěte pravděpodobnost, že x je větší jak $\frac{1}{3}$ a menší nebo rovno jak $\frac{2}{3}$.

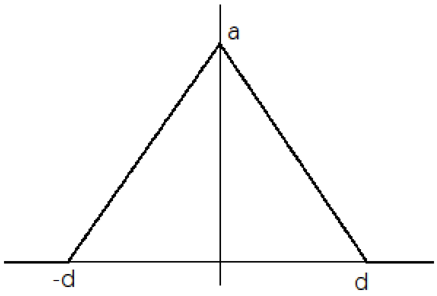
(c) Určete distribuční funkci.

7. Určete hodnotu $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & x \in (0; 2) \\ 0 & jinak \end{cases}$$

byla hustotou. Najděte distribuční funkci a zakreslete oba grafy.

8. Na obrázku je graf hustoty $f(x)$. Zapište $f(x)$ a určete distribuční funkci.



9. Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ ax^2 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq \end{cases}$$

byla distribuční funkcí.