Náhodný vektor

Definice: Náhodný vektor je uspořádaná n-tice $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)'$, kde X_i jsou náhodné veličiny na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Jeho distribuční funkci definujeme vztahem:

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1 \wedge X_2 \le x_2 \wedge \dots \wedge X_n \le x_n).$$

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je neklesající, zprava spojitá vzhledem ke každé jednotlivé proměnné a dále

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; \lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; \lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_{i-1} \to \infty \\ x_{i+1} \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_i(x_i).$$

$F_i(x_i)$ se nazývá **marginální distribuční funkce** náhodné veličiny X_i a $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se nazývá **simultánní (sdružená) distribuční funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Diskrétní náhodný vektor

Definice: Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)'$ se nazývá diskrétní, právě když existuje funkce $\pi(x_1, \dots, x_n)$, která je kladná na nejvýše spočetné množině $N \subseteq \mathbb{R}^n$, nulová na množině $\mathbb{R}^n - N$, je normovaná

$$\sum_{x1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \pi(x_1, \dots, x_n) = 1$$

a platí pro ni:

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{t \le x_1} \cdots \sum_{t \le x_n} \pi(t_1, \dots, t_n).$$

Funkce $\pi(x_1, \dots, x_n)$ se nazývá **pravděpodobnostní funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$. Dále platí:

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; \pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1 \wedge X_2 = x_2 \wedge \dots, X_n = x_n).$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} \cdots \sum_{x_{i-1} \in \mathbb{R}} \sum_{x_{i+1} \in \mathbb{R}} \cdots \sum_{x_n \in \mathbb{R}} \pi(x_1, \dots, x_n) = \pi_i(x_i)$$

$\pi_i(x_i)$ se nazývá **marginální pravděpodobnostní funkce** náhodné veličiny X_i a $\pi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se nazývá **simultánní (sdružená) pravděpodobnostní funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

1. V zásilce 10 výrobků je 8 kvalitních a 2 zmetky, z 8 kvalitních je pět 1. jakosti a tři 2. jakosti. Ze zásilky vybereme 2 výrobky (bez vracení). Náhodná veličina X značí počet kvalitních výrobků a

Y počet výrobků 1. jakosti. Určete sdruženou a marginální pravděpodobnostní ($\pi(x, y)$, $\pi_X(x)$, $\pi_Y(y)$) i distribuční funkci ($F(x, y)$, $F_X(x)$, $F_Y(y)$).

2. Nechť náhodný vektor $(X, Y)'$ má pravděpodobnostní funkci

$$\pi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{15}(x + y + 1) & \text{pro } x = 0, 1, 2; y = 0, 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Určete marginální pravděpodobnostní funkce, marginální distribuční funkce a sdruženou distribuční funkci.

3. Z urny obsahující 2 bílé a 2 černé koule vybíráme za sebou s vracením 2 koule. Definujeme náhodné veličiny X_1 a X_2 následovně

$$X_i = \begin{cases} 1 & i\text{-tá vytažená koule je bílá} \\ 0 & i\text{-tá vytažená koule je černá} \end{cases}$$

Určete distribuční funkci vektoru $(X_1, X_2)'$.

Spojitý náhodný vektor

Definice: Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots X_n)'$ se nazývá spojitý, právě když existuje po částech spojitá funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ s vlastností

$$\forall (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0,$$

která je normovaná

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

a platí pro ni:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n.$$

Funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá **hustota pravděpodobnosti** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$. Dále platí:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$$

ve všech bodech spojitosti funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}; \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{i-1}\, \mathrm{d}x_{i+1} \ldots \mathrm{d}x_n = f_i(x_i)$$

$f_i(x_i)$ se nazývá **marginální hustota** náhodné veličiny X_i a $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ se nazývá **simultánní (sdružená) hustota** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

4. Spojitý náhodný vektor $(X_1, X_2, X_3)'$ má hustotu
$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} k \cdot x_1 x_2 x_3^2 & \text{pro } 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, 0 < x_3 < 3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

   (a) Určete konstantu k.

(b) Vypočtěte $P(0 < X_1 < 1/2, 1/3 < X_2 < 2/3, 1 < X_3 < 2)$.

5. Dvojice součástek má dobu života popsanou hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x-\frac{y}{2}} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Jaká je pravděpodobnost toho, že druhá součástka přežije první?

6. Čemu se rovná hustota $f(x,y)$ pro $x \in (0,1)$ a $y \in (0,2)$, jestliže příslušná distribuční funkce je $F(x,y) = \frac{1}{4}x^2y^2$ pro $x \in (0,1)$ a $y \in (0,2)$.

7. Hustota pravděpodobností náhodného vektoru $(X,Y)'$ je dána

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}) & 0 < x < 2, 0 < y < 3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Určete obě marginální hustoty, sdruženou distribuční funkci a pravděpodobnost $P(0 < X \leq 1 \wedge 2 < Y \leq 3)$.