Stochasticky nezávislé náhodné veličiny

Věta: Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé, právě když pro každé $x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$$

resp. $\pi(x_1, \ldots, x_n) = \pi_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \pi_n(x_n)$ (v diskrétním případě), resp. $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$ (ve spojitém případě).

1. Spojitý náhodný vektor (X_1, X_2) má hustotu

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 24x_1^2 x_2(1 - x_1) & \text{pro } 0 \leq x_1 < 1, 0 \leq x_2 < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

   Dokažte, že náhodné veličiny X_1 a X_2 jsou stochasticky nezávislé.

2. Podnik vyrábí ocelové objímky. Kontrola na výstupu třídí výrobky podle dvou kritérií – podle odchylky od předepsaného vnitřního průměru do čtyř skupin ($X = 1, 2, 3, 4$) a podle odchylky od předepsané délky také do čtyř skupin ($Y = 2, 4, 6, 8$). Sdružená pravděpodobnostní funkce je dána tabulkou:

$X \backslash Y$	2	4	6	8
1	0.01	0.03	0.04	0.02
2	0.02	0.24	0.10	0.04
3	0.04	0.15	0.08	0.03
4	0.04	0.06	0.08	0,02

   Určete marginální pravděpodobnostní funkce $\pi_X(x), \pi_Y(y)$, podmíněné pravděpobosnostní funkce $\pi(x|Y = 8), \pi(y|X = 1)$, hodnoty sdružené distribuční funkce $F(3, 4), F(1, 3)$, hodnotu podmíněné distribuční funkce $F(X = 3|Y = 8)$. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?

3. Náhodný vektor $(X_1, X_2)'$ s rovnoměrně spojitým rozdělením na oblasti G, kde

   (a) $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 < 1 \wedge 0 \leq x_2 < 1\}$,

   (b) $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 < 1 \wedge 0 \leq x_2 < 1 - x_1\}$.

   Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X_1 a X_2 stochasticky nezávislé.