Lineární statistické modely I

1 Úvod

Prednášky z predmetu *Lineární statistické modely I* nadväzujú na predmety *Pravděpodobnost a statistika I, II* a predpokladajú sa znalosti získané v týchto predmetoch. Odporúčaná literatúra k štúdiu je

Anděl, J., *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985.

Rao, C., R., *Lineární metódy statistické indukce a jejich aplikace*, ACADEMIA, Praha, 1978.

Zvára, K., *Regresní analýza*, ACADEMIA, Praha, 1989.

Niektoré poznatky si zopakujeme (považujeme ich za "vzorce").

Majme náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)'$, ktorý má distribučnú funkciu $F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n)$. Nech $T : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^1$ je merateľné zobrazenie, potom stredná hodnota

$$\mathcal{E}(T) = \mathcal{E}(T(X_1, ..., X_n)) = \int_{\mathcal{R}^n} T(x_1, ..., x_n) dF_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{(x_1,...,x_n)} T(x_1, ..., x_n) P_{(x_1,...,x_n)}, & \text{v prípade diskrétneho náhodného vektora,} \\ \int_{\mathcal{R}^n} T(x_1, ..., x_n) f_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n, & \text{v prípade spojitého náhodného vektora.} \end{cases}$$

Stredná hodnota

$$\mathcal{E}(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i dF_i(x_i),$$

disperzia (rozptyl)

$$\mathcal{D}(X_i) = \mathcal{E}[(X_i - \mathcal{E}(X_i))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mathcal{E}(X_i))^2 dF_i(x_i),$$

kovariancia

$$cov(X_i, X_j) = \mathcal{E}[(X_i - \mathcal{E}(X_i))(X_j - \mathcal{E}(X_j))] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mathcal{E}(X_i))(x_j - \mathcal{E}(X_j)) dF_{i,j}(x_i, x_j)$$

a korelácia

$$cor(X_i, X_j) = \varrho(X_i, X_j) = \frac{cov(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathcal{D}(X_i)\mathcal{D}(X_j)}}$$

ak $0 < \mathcal{D}(X_i) < \infty, \ 0 < \mathcal{D}(X_j) < \infty$.

Len na pripomenutie

$$F_i(x_i) = \lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_{i-1} \to \infty \\ x_{i+1} \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n), \quad f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_{i-1} dx_{i+1} ... dx_n.$$

Matica náhodných veličín (náhodná matica) $\mathbf{Z}_{n,m}$ je taká matica, ktorej prvky $\{\mathbf{Z}\}_{i,j} = Z_{i,j}$ sú náhodné veličiny. Jej stredná hodnota $\mathcal{E}(\mathbf{Z})$ je matica, ktorej $(i,j)-$ty prvok je $\mathcal{E}(Z_{i,j})$ (predpokladáme, že všetky stredné hodnoty existujú a sú konečné).

Veta 1.1: Nech $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ sú náhodné matice, nech existujú matice $\mathcal{E}(\mathbf{Z}_1), \mathcal{E}(\mathbf{Z}_2)$ a $\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ sú (nenáhodné) reálne matice vhodných rozmerov. Platí

$$\mathcal{E}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1\mathbf{Z}_1\mathbf{C}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{Z}_2\mathbf{C}_2) = \mathbf{A} + \mathbf{B}_1\mathcal{E}(\mathbf{Z}_1)\mathbf{C}_1 + \mathbf{B}_2\mathcal{E}(\mathbf{Z}_2)\mathbf{C}_2.$$

Dôkaz: Spravte ako cvičenie. Využite linearitu integrálu, teda platnosť vzťahov

$$\mathcal{E}(a + bX) = a + \mathcal{E}(X), \quad \mathcal{E}(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{E}(X_i)$$

pre ľubovoľé reálne $a, b, c_1, ..., c_n$ a náhodné premenné $X, X_1, ..., X_n$ (ktoré majú konečné stredné hodnoty) Q.E.D.

Ak $\mathbf{X}_{n,1}$ je náhodný vektor $(X_1, ..., X_n)'$, potom jeho stredná hodnota $\mathcal{E}(\mathbf{X}) = (\mathcal{E}(X_1), ..., \mathcal{E}(X_n))'$ (ak všetky stredné hodnoty existujú a sú konečné). Ak všetky $X_1, ..., X_n$ majú konečné disperzie, tak kovariančná matica vektora $\mathbf{X}$ je

$$cov(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(X_1) & cov(X_1, X_2) & ... & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \mathcal{D}(X_2) & ... & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & ... & \mathcal{D}(X_n) \end{pmatrix}.$$

Z Vety 1.1 ľahko dostávame

Lema 1.2:

$$\mathcal{E}(\mathbf{a}_{p,1} + \mathbf{B}_{p,n}\mathbf{X}) = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathcal{E}(\mathbf{X}).$$

Veta 1.3: (Vlastnosti kovariančnej matice $cov(\mathbf{X})$.) Nech $\mathbf{X}$ je náhodný vektor s konečnými druhými momentmi. Platí:

1. $cov(\mathbf{X}) = \mathcal{E}[(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))'] = \mathcal{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}') - \mathcal{E}(\mathbf{X})[\mathcal{E}(\mathbf{X})]'$,
2. $(cov(\mathbf{X}))' = cov(\mathbf{X})$,
3. $cov(\mathbf{a}_{m,1} + \mathbf{B}_{m,n}\mathbf{X}) = \mathbf{B}cov(\mathbf{X})\mathbf{B}'$, ak $\mathbf{a}$, $\mathbf{B}$ sú nenáhodný vektor resp. nenáhodná matica,
4. $cov(\mathbf{X})$ je pozitívne semidefinitná matica.

Dôkaz:

1. Spravte ako cvičenie.
2. Vyplýva z vlastnosti kovariancie $cov(X_i, X_j) = cov(X_j, X_i)$.
3. $cov(\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}) = \mathcal{E}\{(\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}))(\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}))'\} =$
   $= \mathcal{E}\left(\mathbf{B}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X})'\mathbf{B}'\right) = \mathbf{B}cov(\mathbf{X})\mathbf{B}'$.

4. Podľa predchádzajúceho bodu pre ľubovolné $\mathbf{c}_{n,1}$ platí pre disperziu náhodnej veličiny $Y = \mathbf{c}'\mathbf{X}$ nerovnosť $0 \leq \mathcal{D}(Y) = \mathcal{D}(\mathbf{c}'\mathbf{X}) = \mathbf{c}'cov(\mathbf{X})\mathbf{c}$. Využívame aj poznatok, že disperzia každej náhodnej veličiny je nezáporné číslo (ak disperzia existuje). Q.E.D.

Niektoré aplikácie predchádzajúcich tvrdení:

Majme náhodné premenné X_1, X_2 a poznáme ich kovariančnú maticu $cov(\mathbf{X})$. Potom disperzie a kovariancie medzi náhodnými premennými $Y_1 = c_1X_1 + c_2X_2,\ Y_2 = d_1X_1 + d_2X_2,\ Y_3 = e_1X_1 + e_2X_2$ ľahko dostaneme z kovariančnej matice náhodného vektora

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \mathbf{BX}, \quad \text{keďže} \quad cov(\mathbf{Y}) = \mathbf{B}cov(\mathbf{X})\mathbf{B}'.$$

Napríklad ak $Y_1 = X_1 - X_2,\ Y_2 = X_1 + X_2$, tak

$$cov(\mathbf{Y}) = cov\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D}(X_1) & cov(X_1, X_2) \\ cov(X_2, X_1) & \mathcal{D}(X_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{D}(X_1) - cov(X_2, X_1) & cov(X_1, X_2) - \mathcal{D}(X_2) \\ \mathcal{D}(X_1) + cov(X_2, X_1) & cov(X_1, X_2) + \mathcal{D}(X_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{D}(X_1) - 2cov(X_1, X_2) + \mathcal{D}(X_2) & \mathcal{D}(X_1) - \mathcal{D}(X_2) \\ \mathcal{D}(X_1) - \mathcal{D}(X_2) & \mathcal{D}(X_1) + 2cov(X_1, X_2) + \mathcal{D}(X_2) \end{pmatrix}.$$

Majme dva náhodné vektory $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)',\ \mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_m)'$. Nech existujú konečné kovariancie $cov(X_i, Y_j),\ i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., m$. Matica

$$cov(\mathbf{X,Y}) = \begin{pmatrix} cov(X_1, Y_1) & cov(X_1, Y_2) & ... & cov(X_1, Y_m) \\ cov(X_2, Y_1) & cov(X_2, Y_2) & ... & cov(X_2, Y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, Y_1) & cov(X_n, Y_2) & ... & cov(X_n, Y_m) \end{pmatrix}_{n,m}$$

je kovariančná matica vektorov $\mathbf{X},\ \mathbf{Y}$.

Veta 1.4: (Vlastnosti kovariančnej matice $cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.) Platí

1. $cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathcal{E}[(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathcal{E}(\mathbf{Y}))'] = \mathcal{E}(\mathbf{XY}') - \mathcal{E}(\mathbf{X})[\mathcal{E}(\mathbf{Y})]'$,

2. $cov(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = cov(\mathbf{X})$,

3. $cov(\mathbf{a}_{k,1} + \mathbf{B}_{k,n}\mathbf{X}, \mathbf{b}_{l,1} + \mathbf{C}_{l,m}\mathbf{Y}) = \mathbf{B}cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{C}'$, ak $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sú nenáhodné vektory resp. nenáhodné matice,

4. ak $m = n$, tak $cov(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = cov(\mathbf{X}) + cov(\mathbf{Y}) + cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + cov(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$,

5. $cov(\sum_{i=1}^{t} \mathbf{X}_i) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$,

6. $[cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]' = cov(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.

7. $\mathcal{E}Tr\mathbf{A}_{k,l}\mathbf{Z}_{l,k} = Tr\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{Z})$, ak $\mathbf{A}$ je nenáhodná a $\mathbf{Z}$ náhodná matica.

Dôkaz:

1. Spravte ako cvičenie.

2. Vyplýva z definície.

3. $cov(\mathbf{a} + \mathbf{BX}, \mathbf{b} + \mathbf{CY}) = \mathcal{E}\{(\mathbf{a} + \mathbf{BX} - \mathcal{E}(\mathbf{a} + \mathbf{BX}))(\mathbf{b} + \mathbf{CY} - \mathcal{E}(\mathbf{b} + \mathbf{CY}))'\} =$
$= \mathcal{E}\{[\mathbf{B}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))][\mathbf{C}(\mathbf{Y} - \mathcal{E}(\mathbf{Y}))]'\} = \mathcal{E}\{\mathbf{B}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathcal{E}(\mathbf{Y}))'\mathbf{C}'\} =$
$= \mathbf{B}\mathcal{E}\{(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathcal{E}(\mathbf{Y}))'\}\mathbf{C}' = \mathbf{B}cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{C}'$.

4. $cov(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = \mathcal{E}\{(\mathbf{X}+\mathbf{Y}-\mathcal{E}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}))(\mathbf{X}+\mathbf{Y}-\mathcal{E}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}))'\} =$
$= \mathcal{E}\{(\mathbf{X}-\mathcal{E}(\mathbf{X})+\mathbf{Y}-\mathcal{E}(\mathbf{Y}))(\mathbf{X}-\mathcal{E}(\mathbf{X})+\mathbf{Y}-\mathcal{E}(\mathbf{Y}))'\} =$
$= \mathcal{E}\{(\mathbf{X}-\mathcal{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X}-\mathcal{E}(\mathbf{X}))'+(\mathbf{Y}-\mathcal{E}(\mathbf{Y}))(\mathbf{X}-\mathcal{E}(\mathbf{X}))'+(\mathbf{X}-\mathcal{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y}-\mathcal{E}(\mathbf{Y}))'+(\mathbf{Y}-\mathcal{E}(\mathbf{Y}))(\mathbf{Y}-\mathcal{E}(\mathbf{Y}))'\} =$
$= cov(\mathbf{X}) + cov(\mathbf{Y},\mathbf{X}) + cov(\mathbf{X},\mathbf{Y}) + cov(\mathbf{Y})$.

5. Dokážte ako cvičenie.

6. $[cov(\mathbf{X},\mathbf{Y})]' = \{\mathcal{E}(\mathbf{X}\mathbf{Y}') - \mathcal{E}(\mathbf{X})[\mathcal{E}(\mathbf{Y})]'\}' = \mathcal{E}(\mathbf{Y}\mathbf{X}') - \mathcal{E}(\mathbf{Y})[\mathcal{E}(\mathbf{X})]' = cov(\mathbf{Y},\mathbf{X})$.

7. $\mathcal{E}Tr\mathbf{A}\mathbf{Z} = \mathcal{E}\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\{\mathbf{A}\}_{i,j}\{\mathbf{Z}\}_{j,i}\} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\{\mathbf{A}\}_{i,j}\mathcal{E}\{\mathbf{Z}\}_{j,i} = Tr\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{Z})$. Q.E.D.

Nech existujú všetky korelačné koeficienty

$$cor(X_i,Y_j) = \varrho(X_i,Y_j) = \varrho_{i,j} = \frac{cov(X_i,Y_j)}{\sqrt{\mathcal{D}(X_i)\mathcal{D}(Y_j)}}, \quad i=1,2,...,n, \; j=1,2,...,m.$$

Matica

$$cor(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = (\varrho_{i,j})_{\substack{i=1,2,\dots,n\\ j=1,2,\dots,m}} = \begin{pmatrix} cor(X_1,Y_1) & cor(X_1,Y_2) & ... & cor(X_1,Y_m) \\ cor(X_2,Y_1) & cor(X_2,Y_2) & ... & cor(X_2,Y_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cor(X_n,Y_1) & cor(X_n,Y_2) & ... & cor(X_n,Y_m) \end{pmatrix}_{n,m}$$

sa volá korelačná matica vektorov $\mathbf{X},\mathbf{Y}$. Špeciálne ak $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$, píšeme

$$cor(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & cor(X_1,X_2) & ... & cor(X_1,X_n) \\ cor(X_2,X_1) & 1 & ... & cor(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cor(X_n,X_1) & cor(X_n,X_2) & ... & 1 \end{pmatrix}$$

namiesto $cor(\mathbf{X},\mathbf{X})$. Niekedy sa kovariančná matica píše

$$cov(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & ... & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & ... & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & ... & \sigma_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & ... & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & ... & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & ... & \sigma_n^2 \end{pmatrix},$$

teda $\sigma_{i,i} = \sigma_i^2 = \mathcal{D}(X_i) = \sigma_{\mathbf{X},i}^2$. Pri označení

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \sigma_n \end{pmatrix} = diag(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$$

platí

$$cor(\mathbf{X}) = \mathbf{D}^{-1}cov(\mathbf{X})\mathbf{D}^{-1} \quad \text{a} \quad cov(\mathbf{X}) = \mathbf{D}cor(\mathbf{X})\mathbf{D},$$

lebo

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & ... & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & ... & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & ... & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1} & \dots & \frac{\sigma_{1,n}}{\sigma_1} \\ \frac{\sigma_{2,1}}{\sigma_2} & \sigma_2 & \dots & \frac{\sigma_{2,n}}{\sigma_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{n,1}}{\sigma_n} & \frac{\sigma_{n,2}}{\sigma_n} & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2} & \dots & \frac{\sigma_{1,n}}{\sigma_1\sigma_n} \\ \frac{\sigma_{2,1}}{\sigma_2\sigma_1} & 1 & \dots & \frac{\sigma_{2,n}}{\sigma_2\sigma_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{n,1}}{\sigma_n\sigma_1} & \frac{\sigma_{n,2}}{\sigma_n\sigma_2} & \dots & 1 \end{pmatrix} = cor(\mathbf{X}).$$

Analogicky

$$cor(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{\mathbf{X},1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{\mathbf{X},2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{\mathbf{X},n}} \end{pmatrix} cov(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{\mathbf{Y},1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{\mathbf{Y},2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{\mathbf{Y},m}} \end{pmatrix},$$

čiže

$$cor(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{D}_{\mathbf{X}}^{-1} cov(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \mathbf{D}_{\mathbf{Y}}^{-1} \quad \text{a} \quad cov(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{D}_{\mathbf{X}} cor(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \mathbf{D}_{\mathbf{Y}}.$$

Veta 1.5: Ak $\mathbf{A}_{n,n}$ je reálna matica (nemusí byť ani symetrická) a existuje matica $cov(\mathbf{X})$, tak

$$\mathcal{E}(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}) = [\mathcal{E}(\mathbf{X})]'\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{X}) + Tr\mathbf{A}cov(\mathbf{X}).$$

Dôkaz: Pomocou Vety 1.4 dostávame

$$\mathcal{E}(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathcal{E}\{(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}) + \mathcal{E}(\mathbf{X}))'\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}) + \mathcal{E}(\mathbf{X}))\} =$$

$$= \mathcal{E}\{(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))'\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X})) + [\mathcal{E}(\mathbf{X})]'\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X})) + (\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))'\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{X}) + [\mathcal{E}(\mathbf{X})]'\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{X})\} =$$

$$= [\mathcal{E}(\mathbf{X})]'\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{X}) + \mathcal{E}\{(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))'\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))\} + \mathcal{E}\{[\mathcal{E}(\mathbf{X})]'\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))\} + \mathcal{E}\{(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))'\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{X})\} =$$

$$= [\mathcal{E}(\mathbf{X})]'\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{X}) + \mathcal{E}Tr(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))'\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X})) + [\mathcal{E}(\mathbf{X})]'\mathbf{A}\mathcal{E}[\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X})] + [\mathcal{E}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))]'\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{X}) =$$

$$= [\mathcal{E}(\mathbf{X})]'\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{X}) + \mathcal{E}Tr\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))' = [\mathcal{E}(\mathbf{X})]'\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{X}) + Tr\mathbf{A}\mathcal{E}\{(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathcal{E}(\mathbf{X}))'\} =$$

$$= \mathcal{E}(\mathbf{X}) + Tr\mathbf{A}cov(\mathbf{X}). \quad \text{Q.E.D.}$$

Náhodný výber rozsahu n je $n-$tica $X_1, X_2, ..., X_n$ náhodných veličín, ktoré sú nezávislé a rovnako rozdelené. Ak sú rozdelené ako náhodná veličina X, teda ak $X_i \sim X$, $i = 1, 2, ..., n$, tak povieme, že $X_1, X_2, ..., X_n$ je náhodný výber z rozdelenia, aké má náhodná veličina X, napr. z $N(\mu, \sigma^2)$.

Príklad 1.6: Nech $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)'$, $n \geq 2$, je náhodný výber z rozdelenia s konečným rozptylom (disperziou) σ^2. Označme

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \text{ (výberový rozptyl) a } \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ (výberový priemer).}$$

Ukážte, že $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)$ a určte $\mathcal{E}(S^2)$.

Riešenie:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j+\overline{X}^2)=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)+n\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}-n\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right)=\frac{1}{n-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}-\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{X}\right)=$$

$$=\mathbf{X}'\left\{\frac{1}{n-1}\mathbf{I}-\frac{1}{n(n-1)}\mathbf{E}\right\}\mathbf{X}=\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X},$$

pričom vektor (príslušného rozmeru), ktorého zložky sú samé jedničky budeme značiť $\mathbf{1}$ a štvorcovú maticu (príslušného rozmeru), ktorá má všetky prvky rovné jednej budeme značiť $\mathbf{E}$. Platí teda $\mathbf{E}=\mathbf{1}\mathbf{1}'$.

Keď na náhodný výber $X_1,X_2,...,X_n$ pozeráme ako na náhodný vektor $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_n)'$, tak jeho stredná hodnota a kovariančná matica sú

$$\mathcal{E}(\mathbf{X})=\begin{pmatrix}\mu\\ \mu\\ \vdots\\ \mu\end{pmatrix}=\mu\mathbf{1},\qquad cov(\mathbf{X})=\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0 & ... & 0\\ 0 & \sigma^2 & ... & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & ... & \sigma^2\end{pmatrix}=\sigma^2\mathbf{I},$$

$(\mathcal{E}(X_i)=\mu,\ \mathcal{D}(X_i)=\sigma^2)$. Podľa Vety 1.5 je

$$\mathcal{E}(S^2)=[\mathcal{E}(\mathbf{X})]'\mathbf{A}\mathcal{E}(\mathbf{X})+Tr\mathbf{A}cov(\mathbf{X})=\mu^2\mathbf{1}'\left\{\frac{1}{n-1}\mathbf{I}-\frac{1}{n(n-1)}\mathbf{E}\right\}\mathbf{1}+Tr\left[\left\{\frac{1}{n-1}\mathbf{I}-\frac{1}{n(n-1)}\mathbf{E}\right\}\sigma^2\mathbf{I}\right]=$$

$$=\mu^2\left\{\frac{1}{n-1}\mathbf{1}'\mathbf{1}-\frac{1}{n(n-1)}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{1}\right\}+Tr\left\{\sigma^2\left[\frac{1}{n-1}\mathbf{I}\right]\right\}-Tr\sigma^2\left[\frac{1}{n(n-1)}\mathbf{E}\right]=\sigma^2\frac{1}{n-1}n-\sigma^2\frac{1}{n-1}=\sigma^2.$$

2 Mnohorozmerné normálne rozdelenie

Ak má náhodná veličina X hustotu

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad x\in(-\infty,\infty),$$

kde $\mu\in\mathcal{R},\ \sigma^2>0$, tak X má *regulárne normálne rozdelenie* s parametrami μ a σ^2. Píšeme $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

Veta 2.1: Nech $X\sim N(0,1)$ a $\mu\in(-\infty,\infty),\ \alpha\neq 0$. Platí $U=\mu+\alpha X\sim N(\mu,\alpha^2)$.

Dôkaz: X má hustotu $f_X=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(i) ak $\alpha>0$, tak distribučná funkcia náhodnej veličiny $U=\mu+\alpha X$ je

$$F_U(x)=F_{\mu+\alpha X}(x)=P\{\mu+\alpha X<x\}=P\left\{X<\frac{x-\mu}{\alpha}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

(substitúcia $t=\frac{u-\mu}{\alpha},\ \ dt=\frac{du}{\alpha}$)

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\alpha^2}}du,$$

teda hustota U je v tomto prípade $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\alpha^2}}$.

(i) ak $\alpha < 0$, tak distribučná funkcia náhodnej veličiny $U = \mu + \alpha X$ je

$$F_U(x) = F_{\mu+\alpha X}(x) = P\{\mu + \alpha X < x\} = P\left\{X > \frac{x-\mu}{\alpha}\right\} = \int_{\frac{x-\mu}{\alpha}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

(substitúcia $t = \frac{u-\mu}{\alpha}$, $dt = \frac{du}{\alpha}$)

$$= \int_{x}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\alpha^2}}du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-\alpha)}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\alpha^2}}du,$$

teda hustota U je v tomto prípade $\frac{1}{\sqrt{2\pi}(-\alpha)}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\alpha^2}}$.

V obidvoch prípadoch je hustota U rovná $f_U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\alpha|}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\alpha^2}}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\alpha^2}}$, a teda $U \sim N(\mu, \alpha^2)$. Q.E.D.

Charakteristická funkcia náhodnej veličiny $X \sim N(0, 1)$ je

$$\psi_X(t) = \mathcal{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(\cos tx)e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{párna (sudá) funkcia}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(\sin tx)e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{nepárna (lichá) funkcia}} dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2\int_0^{\infty}(\cos tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ 2\ \frac{\sqrt{\pi}}{2\frac{1}{\sqrt{2}}}\ e^{-\frac{t^2}{4\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Tu sme využili výsledok z analýzy

$$\int_0^{\infty}(\cos bx)e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}, \quad \text{ak } a > 0.$$

Teda $X \sim N(0, 1)$ má charakteristickú funkciu $\psi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Ak $U \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, tak $U = \mu + \sigma X$ (kde $X \sim N(0, 1)$) a preto

$$\psi_U(t) = \mathcal{E}\left(e^{it(\mu+\sigma X)}\right) = \mathcal{E}\left(e^{it\mu}e^{it\sigma X}\right) = e^{it\mu}\mathcal{E}\left(e^{i(t\sigma)X}\right) = e^{it\mu}\psi_X(t\sigma) = e^{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

(Poznamenávame len, že rovnakú charakteristickú funkciu (teda aj rovnaké rozdelenie pravdepodobnosti) má aj náhodná veličina $U = \mu - \sigma X$).

Nech $\sigma^2 > 0$. Náhodná veličina X má regulárne normálne $N(\mu, \sigma^2)$ rozdelenie, keď má hustotu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ a charakteristickú funkciu $e^{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$.

Nech $\sigma = 0$. Ak má náhodná veličina X charakteristickú funkciu $e^{i\mu t}$, tak to je diskrétna náhodná veličina, ktorá nadobúda (jedinú) hodnotu μ s pravdepodobnosťou 1 (čiže $P\{X = \mu\} = 1$). Povieme, že v tomto prípade má X singulárne normálne $N(\mu, 0)$ rozdelenie.

Dospeli sme k (všeobecnej) definícii normálneho rozdelenia

Definícia 2.2: Nech $\mu \in (-\infty, \infty)$, $\sigma^2 \geq 0$. Povieme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (teda, že X má jednorozmerné normálne rozdelenie s parametrami $\mu \in (-\infty, \infty)$, $\sigma^2 \geq 0$), ak má charakteristickú funkciu $\psi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$, $t \in (-\infty, \infty)$.

Dokážte ako príklad, že ak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tak $\mathcal{E}(X) = \mu$ a $\mathcal{D}(x) = \sigma^2$.

Definícia 2.3: Nech $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^n$ a $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{i,j})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}}$ je pozitívne semidefinitná symetrická matica. Povieme, že náhodný vektor $\mathbf{X}$ má $n-$rozmerné normálne rozdelenie, ak pre každý vektor $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^n$ je $\mathbf{c}'\mathbf{X} \sim N(\mathbf{c}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c})$. Píšeme $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Veta 2.4: Nech $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Potom $\mathcal{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ a $cov\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}$.

Dôkaz: Označme $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^n$ $j-$ty jednotkový vektor (čiže vektor, ktorý má na $j-$tom mieste 1, inde všade 0). Potom

$$X_j = \mathbf{e}_j'\mathbf{X} \sim N(\mathbf{e}_j'\boldsymbol{\mu} = \mu_j, \mathbf{e}_j'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{e}_j = \sigma_{j,j}),$$

teda

$$\mathcal{E}(X_j) = \mu_j, \quad \mathcal{D}(X_j) = \sigma_{j,j}.$$

Platí, že $\mathcal{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ a $\{\boldsymbol{\Sigma}\}_{i,i} = \mathcal{D}(X_i),\ i = 1, 2, ..., n$.

Uvažujme teraz vektor $\mathbf{c}_{j,k} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{c}_{j,k} = \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k,\ j \neq k$. Platí

$$\mathbf{c}_{j,k}'\mathbf{X} = X_j + X_k \sim N(\mathbf{c}_{j,k}'\boldsymbol{\mu} = \mu_j + \mu_k, \mathbf{c}_{j,k}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c}_{j,k} = \sigma_{j,j} + \sigma_{j,k} + \sigma_{k,j} + \sigma_{k,k}),$$

teda

$$\mathcal{D}(\mathbf{c}_{j,k}'\mathbf{X}) = \sigma_{j,j} + \sigma_{k,k} + 2\sigma_{j,k} \tag{1}$$

Podľa Vety 1.3, bod 3 ($\mathbf{a} = 0,\ \mathbf{B} = \mathbf{c}_{j,k}'$) a Vety 1.4, bod 5 je

$$\mathcal{D}(\mathbf{c}_{j,k}'\mathbf{X}) = \mathcal{D}(X_j + X_k) = \mathcal{D}(X_j) + \mathcal{D}(X_k) + cov(X_j, X_k) + cov(X_k, X_j) = \mathcal{D}(X_j) + \mathcal{D}(X_k) + 2cov(X_j, X_k). \tag{2}$$

Pretože $\mathcal{D}(X_j) = \sigma_{j,j},\ \mathcal{D}(X_k) = \sigma_{k,k}$, dostávame z (1) a (2) $\sigma_{j,k} = cov(X_j, X_k)$ a teda $\boldsymbol{\Sigma} = cov\mathbf{X}$. Q.E.D.

Veta 2.5: Nech $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Potom charakteristická funkcia $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}},\ \mathbf{t} \in \mathcal{R}^n$.

Dôkaz: Pre dané $\mathbf{t} \in \mathcal{R}^n$ je $\mathbf{t}'\mathbf{X} \sim N_1(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t})$ a

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathcal{E}\left(e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}\right) = \mathcal{E}\left(e^{i1(\mathbf{t}'\mathbf{X})}\right) = \psi_{\mathbf{t}'\mathbf{X}}(1) = e^{i1(\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu}) - \frac{1^2\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}}{2}} = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Veta 2.6: Nech $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^m$, $\mathbf{B}_{m,n}$ reálna (pevná) matica. Potom $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X} \sim N_m(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}')$.

Dôkaz: Pre dané $\mathbf{t} \in \mathcal{R}^m$ je

$$\psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = \mathcal{E}\left(e^{i\mathbf{t}'\mathbf{Y}}\right) = \mathcal{E}\left(e^{i\mathbf{t}'(\mathbf{a}+\mathbf{B}\mathbf{X})}\right) = e^{i\mathbf{t}'\mathbf{a}}\mathcal{E}\left(e^{i(\mathbf{t}'\mathbf{B})\mathbf{X}}\right) = e^{i\mathbf{t}'\mathbf{a}}\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}'\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\mathbf{a}}e^{i\mathbf{t}'\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}(\mathbf{t}'\mathbf{B})\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{B}'\mathbf{t})} =$$
$$= e^{i\mathbf{t}'(\mathbf{a}+\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\mathbf{t}'(\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}')\mathbf{t}},$$

čo je charateristická funkcia $m-$ rozmernej normálne rozdelenej náhodnej veličiny so strednou hodnotou $\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}$ a kovariančnou maticou $\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}'$, čiže $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X} \sim N_m(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}')$. Q.E.D.

Označme

$$\mathbf{X}_{n,1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \\ X_{k+1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n, \text{ čiže } \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^k, \ \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} X_{k+1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{n-k}. \tag{3}$$

Veta 2.7: Nech $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Potom $\mathbf{X}_1 \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$, kde

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathcal{E}(X_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{11} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,k} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \dots & \sigma_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k,1} & \sigma_{k,2} & \dots & \sigma_{k,k} \end{pmatrix}.$$

(Poznamenávame len, že $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$, teda $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$ je $k \times (n-k)$ matica, $\boldsymbol{\Sigma}_{21}$ je $(n-k) \times k$ matica a $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ je $(n-k) \times (n-k)$ matica.)

Dôkaz: $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{I}_{k,k} \vdots \mathbf{0}_{k,n-k})\mathbf{X} \Longrightarrow \mathbf{X}_1 \sim N_k\left((\mathbf{I} \vdots \mathbf{0})\boldsymbol{\mu}, (\mathbf{I} \vdots \mathbf{0})\boldsymbol{\Sigma} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right)$, čiže $\mathbf{X}_1 \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$. Q.E.D.

Poznámka: Môžeme za $\mathbf{X}_1$ vybrať ľubovoľnú $k-$ticu náhodných premenných z $X_1, ..., X_n$, marginálne rozdelenie náhodného vetora $\mathbf{X}_1$ je vždy normálne s "prirodzenými parametrami".

Veta 2.8: Nech $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ (podľa (3)), potom platí

$$\mathbf{X}_1 \text{ a } \mathbf{X}_2 \text{ sú nezávislé} \iff cov(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{0}_{k,n-k} \text{ (sú nekorelované).}$$

Dôkaz: Ak sú $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ sú nezávislé $\Longrightarrow$ X_i a X_j sú nezávislé pre všetky $i \in \{1, ..., k\}$, $j \in \{k+1, ..., n\}$, teda $cov(X_i, X_j) = 0$ pre všetky $i \in \{1, ..., k\}$, $j \in \{k+1, ..., n\}$, čiže $cov(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{0}$.

Naopak, ak $cov(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$, teda pre charakteristickú funkciu náhodného vektora $\mathbf{X}$ platí pre každé $\mathbf{t} = (\mathbf{t}'_1, \mathbf{t}'_2)'$, pričom $\mathbf{t}'_1 \in \mathcal{R}^k$, $\mathbf{t}'_1 \in \mathcal{R}^{n-k}$,

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}} = e^{i(\mathbf{t}'_1, \mathbf{t}'_2)' \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\mathbf{t}'_1, \mathbf{t}'_2)' \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix}} =$$

$$= e^{i\mathbf{t}'_1\boldsymbol{\mu}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}'_1\boldsymbol{\Sigma}_{11}\mathbf{t}_1} e^{i\mathbf{t}'_2\boldsymbol{\mu}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{t}'_2\boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{t}_2} = \psi_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1)\psi_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{t}_2)$$

(je súčinom charakteristických funkcií subvektorov $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$), teda (pozri Rényi, A., *Teória pravděpodobnosti*, ACADEMIA, Praha, 1972, str. 300) $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ sú nezávislé. Q.E.D.

Skôr ako sa dostaneme k faktorizácii kovariančnej matice, zopakujme si niekoľko poznatkov z algebry.

Nech $\mathbf{A}$ je symetrická $m \times m$ (štvorcová) reálna matica.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \overset{\text{ozn.}}{=} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

je charakteristická rovnica matice $\mathbf{A}$. Je to rovnica $m-$tého stupňa. Jej korene sú $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Voláme ich vlastné (alebo charakteristické) čísla matice $\mathbf{A}$. Ku každému vlastnému číslu existuje nenulový vlastný (alebo charakteristický) vektor $\mathbf{P}_i$, že platí $\mathbf{A}\mathbf{P}_i = \lambda_i\mathbf{P}_i$.

Platí:

I. Ak $h(\mathbf{A}) = r$ (hodnosť matice $\mathbf{A}$), tak nula je $(m-r)-$násobným koreňom rovnice $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$.

II. Všetky vlastné čísla sú reálne a aj všetky vlastné vektory sú reálne. Môžeme vlastné čísla teda prečíslovať tak, aby $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_m$.

III. $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j$ prislúchajúce $\lambda_i \neq \lambda_j$ sú navzájom ortogonálne. Bez újmy na všeobecnosti môžeme zvoliť $\mathbf{P}'_i\mathbf{P}_j = 1$ (ortonormálne).

IV. Ak $\mathbf{A}$ je pozitívne definitná, tak $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_m > 0$. Ak $\mathbf{A}$ je pozitívne semidefinitná a $h(\mathbf{A}) = r$, tak $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = ... = \lambda_m = 0$.

V. Existuje ortogonálna matica $\mathbf{P}_{m,m}$ ($\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{I}$), že $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}$. Matica $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_1 \vdots \mathbf{P}_2 \vdots ... \vdots \mathbf{P}_m)$ a $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_m \end{pmatrix}$. Teda $\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}'$.

Rovniciam

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}' = \lambda_1 \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1' + ... + \lambda_m \mathbf{P}_m\mathbf{P}_m'$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1' + ... + \mathbf{P}_m\mathbf{P}_m'$$

hovoríme spektrálny rozklad matice $\mathbf{A}$ (bližšie pozri napr. v Rao, C., R., *Lineární metódy statistické indukce a jejich aplikace*, ACADEMIA, Praha, 1978).

Nech má náhodný vektor $\mathbf{X}_{n,1}$ kovariančnú maticu $cov(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma}$. Ak $h(\boldsymbol{\Sigma}) = r \geq 1$, tak z predchádzajúceho $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}'$, kde

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_r & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

čiže

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\mathbf{P}_1 \vdots \mathbf{P}_2 \vdots ... \vdots \mathbf{P}_m) \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & ... & \sqrt{\lambda_r} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & ... & \sqrt{\lambda_r} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1' \\ \mathbf{P}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{P}_m \end{pmatrix} =$$

$$= (\sqrt{\lambda_1}\mathbf{P}_1 \vdots \sqrt{\lambda_2}\mathbf{P}_2 \vdots ... \vdots \sqrt{\lambda_r}\mathbf{P}_r) \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}\mathbf{P}_1' \\ \sqrt{\lambda_2}\mathbf{P}_2' \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_r}\mathbf{P}_r' \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{n,r}\mathbf{B}_{r,n}'$$

a platí $h(\mathbf{B}_{n,r}) = r$. Rozklad kovariančnej matice $\boldsymbol{\Sigma}_{n,n} = \mathbf{B}_{n,r}\mathbf{B}_{r,n}'$, pričom $h(\mathbf{B}_{n,r}) = r$, sa volá faktorizácia kovariančnej matice.

Veta 2.9: Nech $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $h(\boldsymbol{\Sigma}) = r \geq 1$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}_{n,r}\mathbf{B}'$, $h(\mathbf{B}) = r$. Nech $\mathbf{U} = (U_1, ..., U_r)' \sim N_r(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{r,r})$. Potom $\mathbf{X}$ a $\boldsymbol{\mu}+\mathbf{B}\mathbf{U}$ majú rovnaké rozdelenie pravdepodobnosti (z pravdepodobnostného hľadiska sú ekvivalentné, nerozoznáme ich).

Dôkaz: $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}\mathbf{B}'),\ \mathbf{U} \sim N_r(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Podľa Vety 2.6 $\boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{U} \sim N_n(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{0} = \boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}cov(\mathbf{U})\mathbf{B}' = \boldsymbol{\Sigma})$. Q.E.D.

Poznámka: Ak $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),\ h(\boldsymbol{\Sigma}) = r < n$, tak povieme, že $\mathbf{X}$ má singulárne normálne rozdelenie (nemá napr. hustotu na celom $\mathcal{R}^n$). Popíšeme ho pomocou vektora $\mathbf{U} = (U_1, ..., U_r)'$, kde $U_i \sim N(0,1)$ sú nezávislé (pomocou Vety 2.9).

Skôr ako si odvodíme hustotu mnohorozmerného normálneho rozdelenia, zopakujme si vetu o hustote transformovaného náhodného vektora.

Veta 2.10: (O hustote transformovaného náhodného vektora) Nech náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)'$ má hustotu $p(\mathbf{x})$ vzhľadom k Lebesgueovej miere v $\mathcal{R}^n$. Nech $\mathbf{t}:\ \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ je regulárne a prosté zobrazenie na otvorenej množine $G \subset \mathcal{R}^n$, pre ktorú $\int_G p(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$, t.j.

1. (prosté) $\quad \mathbf{x}_1 \in G,\ \mathbf{x}_2 \in G,\ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \implies \mathbf{t}(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{t}(\mathbf{x}_2)$,
2. (regulárne) $\quad G$ je otvorená podmnožina $\mathcal{R}^n$,
3. (regulárne) $\quad$ pre každé $\mathbf{x} \in G$ existuje spojitá $\frac{\partial t_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}, i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,
4. (regulárne) $\quad$ pre každé $\mathbf{x} \in G$ je Jakobián $D_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \overset{\text{ozn.}}{=} \det\left(\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{x}'}\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial t_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial t_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \neq 0.$

Označme $\boldsymbol{\tau}:\quad \mathbf{t}(G) \to G$ inverzné zobrazenie k $\boldsymbol{\tau}$ (teda $(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{t}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ pre všetky $\mathbf{x} \in G)$. Náhodný vektor $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{X})$ má hustotu vzhľadom k Lebesgueovej miere rovnú

$$q(\mathbf{y}) = \begin{cases} p[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y})]|D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})|, & \text{pre } \mathbf{y} \in \mathbf{t}(G), \\ 0 & \text{pre } \mathbf{y} \notin \mathbf{t}(G). \end{cases}$$

Dôkaz: nájdeme v Jarník, V., *Integrální počet I. II.* Praha, NČSAV, 1955-1956, alebo Anděl, J., *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985, str. 47.

Veta 2.11: Nech $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),\ h(\boldsymbol{\Sigma}) = n$. Potom existuje hustota vektora $\mathbf{Y}$ a rovná sa

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n.$$

Dôkaz: Kovariančnú maticu faktorizujeme a dostávame $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}_{n,n}\mathbf{B}',\ \ h(\mathbf{B}) = n$. Podľa Vety 2.9 $\mathbf{Y}$ sa dá písať ako $\boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{U},\ \ \mathbf{U} = (U_1, ..., U_n)' \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{n,n})$, a podľa Vety 2.8 sú $U_j \sim N_1(0,1),\ j = 1, 2, ..., n$ nezávislé. Majú hustotu $\varphi_{U_j}(u_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u_j^2}{2}},\ j = 1, 2, ..., n$. Hustota náhodného vektora $\mathbf{U}$ je

$$\psi_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = \varphi_{U_1}(u_1)...\varphi_{U_n}(u_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{u}}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n.$$

Náhodný vektor $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{U}$, teda $\mathbf{Y}$ je transformovaný vektor $\mathbf{U}$. Zobrazenie $\mathbf{t}:\ \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ dané predpisom $\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ je prosté a regulárne na celom $\mathcal{R}^n$ a $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{U})$.

Naozaj, ak $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2 \implies \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \neq \boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{u}_2$ (lebo $\mathbf{B}$ je regulárna matica).

$$\frac{\partial t_j(\mathbf{u})}{\partial u_i} = \frac{\partial(\mu_j + \{\mathbf{B}\}_{j1}u_1 + ... + \{\mathbf{B}\}_{jn}u_n)}{\partial u_i} = \{\mathbf{B}\}_{ji},\ i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

existuje a je spojté pre všetky $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n$.

$$\text{Jakobián} \quad D_{\mathbf{t}}(\mathbf{u}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1(\mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial t_1(\mathbf{u})}{\partial u_n} \\ \frac{\partial t_2(\mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial t_2(\mathbf{u})}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial t_n(\mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial t_n(\mathbf{u})}{\partial u_n} \end{pmatrix} = \det \mathbf{B} \neq 0 \quad \text{pre všetky } \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n.$$

Inverzné zbrazenie k $\mathbf{t}$ je $\boldsymbol{\tau}: \ \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ dané predpisom $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})$ (lebo $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{t}(\mathbf{u})) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{t}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{B}^{-1}([\boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\mathbf{u}] - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}$ pre všetky $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n$).

Náhodný vektor $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{U})$ má podľa Vety 2.10 hustotu rovnú

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \psi(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}))|D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y})]'[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y})]} |D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})'(\mathbf{B}^{-1})'\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})} |\det \mathbf{B}^{-1}| =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})},$$

lebo $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \boldsymbol{\Sigma} \Longrightarrow \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = (\mathbf{B}')^{-1}\mathbf{B}^{-1}$, ale $(\mathbf{B}')^{-1} = (\mathbf{B}^{-1})'$ (čo vyplýva z rovnosti $\mathbf{B}'(\mathbf{B}^{-1})' = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})' = \mathbf{I}$), teda

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = (\mathbf{B}^{-1})'\mathbf{B}^{-1}$$

a $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{B}'$, teda $(0 <) \det \boldsymbol{\Sigma} = \det \mathbf{B}\mathbf{B}' = (\det \mathbf{B})^2$, čiže $|\det \mathbf{B}| = \sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}$, z čoho dostávame $|\det \mathbf{B}^{-1}| = \frac{1}{|\det \mathbf{B}|} = \frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}}$. Q.E.D.

Dôsledok 2.12: V prípade $n = 2$ dostávame hustotu dvojrozmerného normálneho rozdelenia

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}\sqrt{\mathcal{D}(X_1)\mathcal{D}(X_2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\mathcal{D}(X_1)} - 2\varrho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)\mathcal{D}(X_2)}} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\mathcal{D}(X_2)}\right]},$$

lebo $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(X_1) & cov(X_1, X_2) \\ cov(X_2, X_1) & \mathcal{D}(X_2) \end{pmatrix}$ je pozitívne definitná práve vtedy ak $\mathcal{D}(X_1) > 0$, $\mathcal{D}(X_2) > 0$ a $\varrho^2 = \frac{cov^2(X_1,X_2)}{\mathcal{D}(X_1)\mathcal{D}(X_2)} \neq 1$ a v takomto prípade (podľa vzorca $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$) je

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}(X_1)\mathcal{D}(X_2) - cov^2(X_1, X_2)} \begin{pmatrix} \mathcal{D}(X_2) & -cov(X_1, X_2) \\ -cov(X_1, X_2) & \mathcal{D}(X_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-\varrho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathcal{D}(X_1)} & -\frac{\varrho}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)\mathcal{D}(X_2)}} \\ -\frac{\varrho}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)\mathcal{D}(X_2)}} & \frac{1}{\mathcal{D}(X_2)} \end{pmatrix}.$$

Poznámka 2.13: Ak má náhodný vektor $\mathbf{X}_{n,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}$, kde $\mathbf{X}_1 \in \mathcal{R}^k$, $\mathbf{X}_2 \in \mathcal{R}^{n-k}$, hustotu $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, tak podmienené rozdelenie $\mathbf{X}_1/\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2$ (v tomto absolútne spojitom prípade) má hustotu

$$\varphi(\mathbf{x}_1/\mathbf{x}_2) = \frac{f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\int_{\mathcal{R}^k} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1}.$$

Lema 2.14: Nech $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$ je pozitívne definitná, tak

(i) $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ je pozitívne definitná matica,

(ii) $\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$ je pozitívne definitná matica.

Dôkaz:

(i) $\boldsymbol{\Sigma}$ je pozitívne definitná, teda $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$ $\mathbf{y}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ a $\mathbf{y}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Z toho vyplýva, že $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^{n-k}$ $(\mathbf{0}', \mathbf{x}')\boldsymbol{\Sigma} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{x} \geq 0$ a $(\mathbf{0}', \mathbf{x}')\boldsymbol{\Sigma} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}_{22}\mathbf{x} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ je regulárna (lebo $\det \mathbf{L} = 1$), teda

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & \mathbf{I} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

je pozitívne definitná, teda

$$0 < \det \boldsymbol{\Sigma} = \det(\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{L}') = \det(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}) \det(\boldsymbol{\Sigma}_{22}) \tag{4}$$

a preto $\det(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}) > 0$ a $\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} = (\mathbf{I} \vdots - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} \end{pmatrix}$ je pozitívne defintná matica. Q.E.D.

Lema 2.15: Platí

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad (\mathbf{L}')^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = (\mathbf{L}^{-1})'.$$

Dôkaz: je jednoduchý, spravte ho ako cvičenie.

Lema 2.16: Nech $\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{R}^k$, $\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\mu}_2 \in \mathcal{R}^{n-k}$. Platí

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{x}_1 - [\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)])'(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})^{-1}(\mathbf{x}_1 - [\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)])+$$

$$+ (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2).$$

Dôkaz: Počítajme

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{x}_1' - \boldsymbol{\mu}_1', \mathbf{x}_2' - \boldsymbol{\mu}_2')\mathbf{L}' \underbrace{(\mathbf{L}')^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{L})^{-1}}_{(\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{L}')^{-1}} \mathbf{L} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \\ \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} =$$

$$(\mathbf{x}_1' - \boldsymbol{\mu}_1', \mathbf{x}_2' - \boldsymbol{\mu}_2') \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 \\ \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} =$$

$$(\mathbf{x}_1' - \boldsymbol{\mu}_1' - (\mathbf{x}_2' - \boldsymbol{\mu}_2')\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}, \mathbf{x}_2' - \boldsymbol{\mu}_2') \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \\ \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\mathbf{x}_1 - [\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)])'(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})^{-1}(\mathbf{x}_1 - [\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)])+$$

$$+ (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2). \quad \text{Q.E.D.}$$

Využijúc (4) a Lemu 2.16 ľahko dostaneme

Dôsledok 2.17: Nech $\mathbf{X}_{n,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}\right)$ (označenie podľa (3) a Vety 2.7), potom hustota $\mathbf{X}$ je

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} =$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - [\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)])'(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})^{-1}(\mathbf{x}_1 - [\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)])} \times$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-k}{2}}\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}_{22}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)} = \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f_2(\mathbf{x}_2).$$

Podmienené rozdelenie $\mathbf{X}_1/\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2$ má podľa Poznámky 2.13 hustotu

$$\varphi(\mathbf{x}_1/\mathbf{x}_2) = \frac{f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\int_{\mathcal{R}^k} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1} = \frac{\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f_2(\mathbf{x}_2)}{\int_{\mathcal{R}^k} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) f_2(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1} = \frac{\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\int_{\mathcal{R}^k} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1}.$$

Vidíme, že pri pevnom $\mathbf{x}_2$ je $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ hustotou náhodného vektora $\boldsymbol{\xi} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})$ a teda $\int_{\mathcal{R}^k} \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 = 1$, čiže hustota $\varphi(\mathbf{x}_1/\mathbf{x}_2)$ podmiemeného rozdelenia $\mathbf{X}_1/\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2$ je $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Dokázali sme, že

$$\mathbf{X}_1/\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2 \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}). \tag{5}$$

Dôležitý je špeciálny prípad $n = 2$. Ak $\mathbf{X}_{2,1}$ má regulárne dvojrozmerné normálne rozdelenie, teda $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{D}(X_1) & \varrho\sqrt{\mathcal{D}(X_1)\mathcal{D}(X_2)} \\ \varrho\sqrt{\mathcal{D}(X_1)\mathcal{D}(X_2)} & \mathcal{D}(X_2) \end{pmatrix}\right)$, tak

$$X_1/X_2 = x_2 \sim N_1\left(\mu_1 + \varrho\sqrt{\frac{\mathcal{D}(X_1)}{\mathcal{D}(X_2)}}(x_2 - \mu_2), \mathcal{D}(X_1)(1 - \varrho^2)\right). \tag{6}$$

3 Rozdelenie kvadratických foriem

Definícia 3.1: Náhodná veličina X má Gama rozdelenie s parametrami $a, b,\ a > 0,\ b > 0$ (označme $X \sim \Gamma(a, b)$), ak má hustotu

$$h(x) = \begin{cases} \frac{a^b}{\Gamma(b)}\, e^{-ax}x^{b-1}, & \text{ak } x > 0, \\ 0, & \text{ak } x \leq 0. \end{cases}$$

Ponamenávame len, že pre funkciu gama platí $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx,\ a > 0,\ \ \Gamma(n) = (n-1)!$ pre n prirodzené číslo, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},\ \ a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ pre každé kladné číslo a. S funkciou gama je úzko spätá funkcia beta (označujeme $B(a, b),\ a > 0, b > 0$), $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. Medzi funkciami gama beta platí vzťah $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Definícia 3.2: Náhodná veličina Y má χ^2_n rozdelenie (chíkvadrát rozdelenie s n stupňami voľnosti), ak má $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ rozdelenie. Teda Y má hustotu

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\ e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}, & \text{ak } y > 0, \\ 0, & \text{ak } y \leq 0. \end{cases}$$

Veta 3.3: Nech $X_1, X_2, ..., X_n$ sú nezávislé $N(0,1)$ rozdelené náhodné veličiny. Náhodná veličina

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$$

má χ^2_n rozdelenie.

Dôkaz: (indukciou) Pre $n = 1$, nech $X_1 \sim N(0,1)$ a $x > 0$, tak distribučná funkcia

$$F_{X_1^2}(x) = P\{X_1^2 < x\} = P\{-\sqrt{x} \leq X_1 < \sqrt{x}\} - P\{\sqrt{x} = X_1\} = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

teda hustota

$$f_{X_1^2}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} (\sqrt{x})' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(-\sqrt{x})^2}{2}} (-\sqrt{x})' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\ e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$

a $f_{X_1^2}(x) = 0$ pre $x \leq 0$.

Nech teraz $X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ má pre $x > 0$ hustotu $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\ e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}$. Potom

$$f_{X_1^2+X_2^2+...+X_{n+1}^2}(x) = \int_0^\infty f_{X_1^2+X_2^2+...+X_n^2}(x-u) f_{X_{n+1}^2}(u) du =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\ e^{-\frac{x-u}{2}} (x-u)^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\ e^{-\frac{u}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \int_0^x (x-u)^{\frac{n}{2}-1} u^{-\frac{1}{2}} du = \quad (\text{substitúcia} \quad \frac{u}{x} = w, \quad du = xdw)$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} x^{-\frac{1}{2}} x}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-w)^{\frac{n}{2}-1} w^{\frac{1}{2}-1} dw = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n+1}{2}-1}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n+1}{2}-1}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\ e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n+1}{2}-1}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Poznámka 3.4: Veta 3.3 je alternatívnou definíciou χ^2_n rozdelenia.

Veta 3.5: Nech $Y \sim \chi^2_r$, $Z \sim \chi^2_s$ sú nezávislé náhodné veličiny. Potom $Y + Z \sim \chi^2_{r+s}$.

Dôkaz: $Y = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_r^2$, $Z = X_{r+1}^2 + X_{r+2}^2 + ... + X_{r+s}^2$, pričom všetky $X_1, X_2, ..., X_{r+s}$ sú nezávslé a $N(0,1)$ rozdelené. Preto $Y + Z = X_1^2 + ... + X_{r+s}^2 \sim \chi^2_{r+s}$. Q.E.D.

Teraz si niečo zopakujeme z teórie zovšeobecnených inverzií matíc. Najprv si dokážeme vetu, ktorú budeme často používať.

Veta 3.6: Pre každú maticu $\mathbf{D}_{k,l}$ platí $\mathcal{M}(\mathbf{D}) = \mathcal{M}(\mathbf{DD}')$, kde $\mathcal{M}(\mathbf{D}) = \{\mathbf{Du} :\ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^l\}$ je vektorový priestor generovaný stĺpcami matice $\mathbf{D}$ (podpriestor priestora $\mathcal{R}^k$).

Dôkaz: Označme $[\mathcal{M}(\mathbf{D})]^\perp$ ortogonálny doplnok priestora $\mathcal{M}(\mathbf{D})$ v (celom) priestore $\mathcal{R}^k$. Platí $\mathcal{M}(\mathbf{D}) = \mathcal{M}(\mathbf{DD}') \iff [\mathcal{M}(\mathbf{D})]^\perp = [\mathcal{M}(\mathbf{DD}')]^\perp$. Budeme dokazovať rovnosť priestorov $[\mathcal{M}(\mathbf{D})]^\perp$ a $[\mathcal{M}(\mathbf{DD}')]^\perp$.

Ak $\mathbf{z} \in [\mathcal{M}(\mathbf{DD}')]^{\perp} \Longrightarrow \mathbf{z}'\mathbf{DD}' = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{z}'\mathbf{DD}'\mathbf{z} = 0 \Longrightarrow (\mathbf{D}'\mathbf{z})(\mathbf{D}'\mathbf{z})' = 0 \Longrightarrow \mathbf{D}'\mathbf{z} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{z}'\mathbf{D} = \mathbf{0} \Longrightarrow$ $\mathbf{z} \in [\mathcal{M}(\mathbf{D})]^{\perp}$, teda $[\mathcal{M}(\mathbf{DD}')]^{\perp} \subset [\mathcal{M}(\mathbf{D})]^{\perp}$.

Ak $\mathbf{z} \in [\mathcal{M}(\mathbf{D})]^{\perp} \Longrightarrow \mathbf{z}'\mathbf{D} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{z}'\mathbf{DD}' = \mathbf{O} \Longrightarrow \mathbf{z} \in [\mathcal{M}(\mathbf{DD}')]^{\perp}$, teda $[\mathcal{M}(\mathbf{D})]^{\perp} \subset [\mathcal{M}(\mathbf{DD}')]^{\perp}$

Dostávame, že $[\mathcal{M}(\mathbf{D})]^{\perp} = [\mathcal{M}(\mathbf{DD}')]^{\perp}$. Q.E.D.

Definicia 3.7: Majme maticu $\mathbf{A}_{m,n}$. Maticu $\mathbf{A}^{-}$ typu rozmerov $n \times m$ nazývame g-inverziou (zovšeobecnenou inverziou, pseudoinverziou) matice $\mathbf{A}$, ak platí $\mathbf{AA}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Veta 3.8: Pseudoinverzná matica k matici $\mathbf{A}_{m,n}$ vždy existuje. Nemusí byť jediná.

Dôkaz: (i) Ak $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, tak ľubovoľná matica typu $n \times m$ je $\mathbf{A}^{-}$.

(ii) Ak $h(\mathbf{A}) = r \geq 1$, $r \leq \min\{m, n\}$, tak $\mathbf{A}$ má r lineárne nezávislých stĺpcov. Vezmime tieto nezávislé stĺpce (v ľubovoľnom poradí) a dostaneme maticu $\mathbf{B}_{m,r}$. Každý stĺpec matice $\mathbf{A}$, teda $\{\mathbf{A}\}_{.i}$, $i = 1, 2, ..., n$ dostaneme ako lineárnu kombináciu stĺpcov matice $\mathbf{B}$, teda $\{\mathbf{A}\}_{.i} = \mathbf{Bc}_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Maticu $(\mathbf{c}_1 \vdots \mathbf{c}_2 \vdots \dots \vdots \mathbf{c}_n)_{r,n}$ označme $\mathbf{C}$. Teda $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, pričom $h(\mathbf{B}) = r$. Pretože $h(\mathbf{A}) = r \leq \min\{h(\mathbf{B}), h(\mathbf{C})\} \leq h(\mathbf{C})$ a naopak $h(\mathbf{C}_{r,n}) \leq \min\{r, n\}$, dostávame $h(\mathbf{C}) = r$. Práve opísaný rozklad matice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}_{m,n} = \mathbf{B}_{m,r}\mathbf{C}_{r,n}, \quad h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{C}) = r \tag{7}$$

budeme často používať. Matica $\mathbf{B}'\mathbf{B}$ je rozmerov $r \times r$, pričom podľa Vety 3.6 je $\mathcal{M}(\mathbf{B}'\mathbf{B}) = \mathcal{M}(\mathbf{B}')$, teda aj $h(\mathbf{B}'\mathbf{B}) = h(\mathbf{B}') = h(\mathbf{B}) = r$. Matica $\mathbf{B}'\mathbf{B}$ je regulárna. Existuje inverzná matica $(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}$. Úplne analogicky dostaneme, že existuje matica $(\mathbf{CC}')^{-1}$. Preto existuje aj matica $\mathbf{C}'(\mathbf{CC}')^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'$ (typu $n \times m$) a platí

$$\mathbf{AC}'(\mathbf{CC}')^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{A} = \mathbf{BCC}'(\mathbf{CC}')^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{BC} = \mathbf{BC} = \mathbf{A},$$

čiže $\mathbf{C}'(\mathbf{CC}')^{-1}(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}' = \mathbf{A}^{-}$. Q.E.D.

Veta 3.9: Ak $h(\mathbf{A}_{n,r}) = r \geq 1$, tak $\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{I}_r$ pre ľubovoľnú $\mathbf{A}^{-}$.

Dôkaz: Pre ľubovoľnú $\mathbf{A}^{-}$ je $\mathbf{AA}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$, teda pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^r$ platí $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pretože $h(\mathbf{A}) = r$, sú stĺpce matice $\mathbf{A}$ lineárne nezávislé a z toho dostávame

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^r \quad \mathbf{A}[(\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}] = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^r \quad (\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

čiže $\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, alebo $\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Q.E.D.

Veta 3.10: Ak $h(\mathbf{A}_{n,r}) = r \geq 1$, tak $\mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-} = \mathbf{I}_r$ pre ľubovoľnú $(\mathbf{A}')^{-}$.

Dôkaz: Pre ľubovoľnú $(\mathbf{A}')^{-}$ je $\mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-}\mathbf{A}' = \mathbf{A}'$, teda pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^r$ platí $\mathbf{x}'(\mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-} - \mathbf{I})\mathbf{A}' = \mathbf{0}$. Pretože $h(\mathbf{A}') = r$, sú riadky matice $\mathbf{A}'$ lineárne nezávislé a z toho dostávame

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^r \quad \mathbf{x}'[\mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-} - \mathbf{I})]\mathbf{A}' = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathcal{R}^r \quad \mathbf{x}'(\mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-} - \mathbf{I}) = \mathbf{0},$$

čiže $\mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, alebo $\mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-} = \mathbf{I}$. Q.E.D.

Veta 3.11: Ak $h(\mathbf{A}_{n,r}) = r \geq 1$, tak $\mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^{-}\mathbf{A} = \mathbf{I}_r$ pre ľubovoľnú $(\mathbf{AA}')^{-}$.

Dôkaz: Pre ľubovoľnú $(\mathbf{AA}')^{-}$ platí

$$\mathbf{AA}'(\mathbf{AA}')^{-}\mathbf{AA}' = \mathbf{AA}',$$

teda

$$\mathbf{A}^{-}\mathbf{AA}'(\mathbf{AA}')^{-}\mathbf{AA}'(\mathbf{A}')^{-} = \mathbf{A}^{-}\mathbf{AA}'(\mathbf{A}')^{-}.$$

Využijeme Vetu 3.9 a Vetu 3.10 a dostávame $\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-}\mathbf{A} = \mathbf{I}_r$. Q.E.D.

Veta 3.12: Ak $\mathbf{A}_{k,k}$ je idempotentná (teda $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$), tak $h(\mathbf{A}) = Tr\mathbf{A}$.

Dôkaz: (i) Ak $h(\mathbf{A}) = 0$, tak $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ a tvrdenie je zrejmé.

(ii) Ak $h(\mathbf{A}) = r \geq 1$, tak podľa rozkladu (7) $\mathbf{A}_{k,k} = \mathbf{B}_{k,r}\mathbf{C}_{r,k}$, pričom $h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{C}) = r$. Pretože $\mathbf{A}$ je idempotentná, postupne platí

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{BCBC} = \mathbf{BC}$$

$$\mathbf{B}^{-}\mathbf{BCBCC}^{-} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{BCC}^{-}$$

a podľa Vety 3.9 a Vety 3.10

$$\mathbf{CB} = \mathbf{I}_r.$$

Dostávame $Tr\mathbf{A} = Tr\mathbf{BC} = Tr\mathbf{CB} = Tr\mathbf{I}_r = r = h(\mathbf{A})$. Q.E.D.

Teraz sa vráťme k rozdeleniam kvadratických foriem.

Veta 3.13: Nech $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $h(\boldsymbol{\Sigma}) = r \geq 1$ a nech $\boldsymbol{\Sigma}^{-}$ je ľubovoľná g-inverzia matice $\boldsymbol{\Sigma}$. Platí

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_r.$$

Dôkaz: Faktorizujeme kovariančnú maticu a dostaneme $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}_{n,r}\mathbf{B}'$, pričom $h(B) = r$. Ak $\mathbf{U} \sim N_r(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ tak podľa Vety 2.9 $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{BU} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, teda

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{BU})'\boldsymbol{\Sigma}^{-}\mathbf{BU} = \mathbf{U}'\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^{-}\mathbf{BU} = \mathbf{U}'\mathbf{U} \sim \chi^2_r$$

podľa Vety 3.3 a Vety 3.11. Q.E.D.

Veta 3.14: Nech $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ a $\mathbf{A}_{n,n}$ je symerická pozitívne semidefinitná matica, $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$ (idempotentná). Potom

$$Y = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_{Tr\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}}.$$

Dôkaz: Pretože $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \neq \mathbf{0}$, je $h(\mathbf{A}) = r \geq 1$ a existuje matica $\mathbf{B}_{n,r}$ s hodnosťou $h(\mathbf{B}) = r$, že $\mathbf{A} = \mathbf{BB}'$ (faktorizácia matice $\mathbf{A}$). Teda

$$Y = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{BB}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{B}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}))'(\mathbf{B}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})) = \boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\xi},$$

kde $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{B}'\mathbf{X} - \mathbf{B}'\boldsymbol{\mu} \sim N_r(\mathbf{0}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})$. Pretože $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$ je idempotentná, pomocou Vety 3.9 dostávame

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$$

$$\mathbf{BB}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{BB}'\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{BB}'\boldsymbol{\Sigma}$$

$$\mathbf{B}^{-}\mathbf{BB}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{BB}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-}\mathbf{BB}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{BB}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} = \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B},$$

čiže matica $\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}$ je idempotentná a teda $(\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})^{-} = \mathbf{I}_r$ (jedna jej g-inverzia). Je zrejmé, že $h(\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}) = Tr\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B} = Tr\mathbf{BB}'\boldsymbol{\Sigma} = Tr\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \geq 1$ (lebo $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \neq \mathbf{0}$). Aplikujeme Vetu 3.13 na náhodný vektor $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{B}'\mathbf{X} - \mathbf{B}'\boldsymbol{\mu}$ a dostávame

$$(\mathbf{B}'\mathbf{X} - \mathbf{B}'\boldsymbol{\mu} - \mathbf{0})'(\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})^{-}(\mathbf{B}'\mathbf{X} - \mathbf{B}'\boldsymbol{\mu} - \mathbf{0}) \sim \chi^2_{h(\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B})}$$

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{B}\mathbf{I}_r\mathbf{B}'(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_{Tr\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}}$$

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_{Tr\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Veta 3.15: Nech $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ a $\mathbf{A}_{n,n},\ \mathbf{B}_{m,n}$ reálne matice taká, že $\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}$ je symetrická a pozitívne semidefinitná. Potom náhodný vektor $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ a náhodná veličina $V = (\mathbf{X}-\mathbf{a})'\mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{a})$ sú nezávislé pre ľubovoľné vektory $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^m$ a $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$.

Dôkaz: Ak $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, tak V je nezávislá s (ľubovoľným) $\mathbf{Y}$.

Ak $\mathbf{A} \neq \mathbf{0},\ h(\mathbf{A}) = r \geq 1$, tak faktorizujeme $\mathbf{A} = \mathbf{C}_{n,r}\mathbf{C}',\ \ h(\mathbf{C}) = r$. Náhodný vektor

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}'\mathbf{X} \\ \mathbf{B}\mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}' \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \mathbf{X} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mathbf{C}' \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{\mu}, \begin{pmatrix} \mathbf{C}' \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{C} \vdots \mathbf{B}') = \begin{pmatrix} \mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C} & \mathbf{C}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}' \\ \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C} & \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}' \end{pmatrix} \right).$$

Z predpokladu $\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ postupne dostávame

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}\mathbf{C}' = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}\mathbf{C}'(\mathbf{C}')^- = \mathbf{0}$$

a podľa Vety 3.10 $\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Pretože $cov(\mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{C}'\mathbf{X}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C} = \mathbf{0}$ a $\begin{pmatrix} \mathbf{C}'\mathbf{X} \\ \mathbf{B}\mathbf{X} \end{pmatrix}$ je normálne rozdelený, sú vektory $\mathbf{B}\mathbf{X}$ a $\mathbf{C}'\mathbf{X}$ nezávislé. Čiže aj pre ľubovoľná vektory $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^m$ a $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$ sú $\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{X}$ a $\mathbf{C}'(\mathbf{X}-\mathbf{a})$ nezávislé, ale aj (ich funkcie) $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ a $(\mathbf{C}'(\mathbf{X}-\mathbf{a}))'(\mathbf{C}'(\mathbf{X}-\mathbf{a})) = (\mathbf{X}-\mathbf{a})'\mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{a}) = V$. Q.E.D.

Veta 3.16: Nech $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ a $\mathbf{A}_{n,n},\ \mathbf{B}_{n,n}$ sú reálne symetrické pozitívne semidefinitné matice také, že $\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Potom náhodné veličiny $Y_1 = (\mathbf{X}-\mathbf{a})'\mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{a})$ a $Y_2 = (\mathbf{X}-\mathbf{b})'\mathbf{B}(\mathbf{X}-\mathbf{b})$ sú nezávislé pre ľubovoľné vektory $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$.

Dôkaz: Stačí uvažovať prípad $h(\mathbf{A}) = r \geq 1,\ h(\mathbf{B}) = s \geq 1$. Faktorizujeme $\mathbf{A}$ aj $\mathbf{B}$, teda $\mathbf{A} = \mathbf{C}_{n,r}\mathbf{C}',\ \ h(\mathbf{C}) = r$ a $\mathbf{B} = \mathbf{G}_{n,s}\mathbf{G}',\ \ h(\mathbf{G}) = s$. Z predpokladu $\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ dostávame $\mathbf{G}\mathbf{G}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}\mathbf{C}' = \mathbf{0}$ a $\mathbf{G}^-\mathbf{G}\mathbf{G}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}\mathbf{C}'(\mathbf{C}')^- = \mathbf{0}$, čiže (použijúc Vetu 3.9 a Vetu 3.10) $\mathbf{G}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Teda $\mathbf{G}'(\mathbf{X}-\mathbf{a})$ a $\mathbf{C}'(\mathbf{X}-\mathbf{a})$ sú pre ľubovoľné vektory $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$ nekorelované a v tomto prípade (normality) aj nezávislé. Ale potom aj ich funkcie $(\mathbf{C}'(\mathbf{X}-\mathbf{a}))'(\mathbf{C}'(\mathbf{X}-\mathbf{a})) = (\mathbf{X}-\mathbf{a})'\mathbf{C}\mathbf{C}'(\mathbf{X}-\mathbf{a}) = (\mathbf{X}-\mathbf{a})'\mathbf{A}(\mathbf{X}-\mathbf{a}) = Y_1$ a $(\mathbf{G}'(\mathbf{X}-\mathbf{b}))'(\mathbf{G}'(\mathbf{X}-\mathbf{b})) = (\mathbf{X}-\mathbf{b})'\mathbf{G}\mathbf{G}'(\mathbf{X}-\mathbf{b}) = (\mathbf{X}-\mathbf{b})'\mathbf{B}(\mathbf{X}-\mathbf{b}) = Y_2$ sú pre ľubovoľné vektory $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$ nezávislé. Q.E.D.

Teraz uveďme jednu veľmi dôležitú aplikáciu predchádzajúcich viet v štatistike.

Veta 3.17: Nech $X_1, X_2, ..., X_n$ je náhodný výber z $N(\mu, \sigma^2)$. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ je výberový priemer a $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ je výberový rozptyl. Potom platí

(i) $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$,

(ii) pre $\sigma^2 > 0,\ n \geq 2$ je $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2_{n-1}$,

(iii) pre $n \geq 2$ sú $\overline{X}$ a S^2 nezávislé.

Dôkaz: Podľa Príkladu 1.6 keď označíme $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)'$, tak platí $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{1}\mu, \sigma^2\mathbf{I}_{n,n})$, kde $\mathbf{1}$ je $n-$rozmerný vektor, ktorého každá zložka je rovná 1. Potom ale

$$\overline{X} = (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, ..., \tfrac{1}{n})\mathbf{X} = \tfrac{1}{n}\mathbf{1}'\mathbf{X} \tag{8}$$

a podľa Príkladu 1.6 pre $n \geq 2$ je

$$S^2 = \mathbf{X}'\left\{\frac{1}{n-1}\mathbf{I} - \frac{1}{n(n-1)}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right\}\mathbf{X} = \mathbf{X}'\left\{\frac{1}{n-1}\mathbf{I} - \frac{1}{n(n-1)}\mathbf{E}\right\}\mathbf{X} \tag{9}$$

($n \times n$ matica $\mathbf{E}$ má všetky prvky rovné 1).

(i) Podľa Vety 2.6 dostávame $\overline{X} \sim N_1\Big((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})\mathbf{1}\mu = \mu, (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})\sigma^2\mathbf{I}\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{n}\Big)$.

(ii) Z (9) dostávame pre $n \geq 2$ $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 = \mathbf{X}'\left\{\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I} - \frac{1}{n\sigma^2}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right\}\mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$, pričom $\mathbf{A}\mathbf{1} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{1} - \frac{1}{n\sigma^2}\mathbf{1}n = \mathbf{0}$. Preto

$$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 = (\mathbf{X} - \mathbf{1}\mu)'\left\{\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I} - \frac{1}{n\sigma^2}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right\}(\mathbf{X} - \mathbf{1}\mu).$$

Ukážeme, že $\mathbf{A}$ spĺňa predpoklady Vety 3.14.

Platí $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ ($\mathbf{A}$ je symetrická), pre každý vektor $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$ je $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{y}'(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}')\mathbf{y} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{y}'(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}')'(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}')\mathbf{y} \geq 0$ ($\mathbf{A}$ je pozitívne semidefintná), $\mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I} \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I} = \left\{\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right\}\left\{\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right\} = \left\{\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right\} = \mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I}$. Pretože $Tr\mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I} = Tr\left\{\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right\} = n - \frac{1}{n}Tr\mathbf{1}\mathbf{1}' = n - 1$, priamo z Vety 3.14 dostávame,že $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

(iii) Pretože $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{A} = \frac{1}{n}\mathbf{1}'\left\{\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'\right\} = \frac{1}{n}\mathbf{1}' - \frac{1}{n^2}\mathbf{1}'\mathbf{1}\mathbf{1}' = \mathbf{0}$, podľa Vety 3.15 sú $\overline{X}$ a S^2 nezávislé. Q.E.D.

4 Teoretické základy lineárnej regresie a korelácie

$Y, X_1, X_2, ...X_k$ nech sú náhodné veličiny na tom istom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s konečnými druhými momentami. Našim cieľom je predikovať Y pomocou $\mathbf{X}$. Predikciou rozumieme (vhodnú) náhodnú veličinu $\hat{Y} = g(X_1, ..., X_n)$, kde $g: \quad \mathcal{R}^k \to \mathcal{R}^1$ je merateľné zobrazenie. My sa budeme zaoberať lineárnuou predikciou

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + ... + \beta_k X_k = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X},$$

teda ak $g(x_1, ..., x_k) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i$. Kvalitu predikcie budme posudzovať *strednou kvadratickou chybou*

$$\mathcal{E}(Y - \hat{Y})^2.$$

Veta 4.1: Nech $Y, X_1, X_2, ...X_k$ sú náhodné veličiny na tom istom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s konečnými druhými momentami a kovariančná matica náhodného vektora $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)'$ je pozitívne definitná. Pre lineárnu predikciu $\hat{Y} = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}$ platí

$$\mathcal{E}(Y - \hat{Y})^2 = \mathcal{E}(Y - \beta_0 - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X})^2 \geq \mathcal{D}(Y) - cov(Y, \mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X}, Y).$$

Rovnosť sa dosiahne práve ak

$$\beta_0 = \mathcal{E}(Y) - \boldsymbol{\beta}'\mathcal{E}(\mathbf{X}) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\beta} = [cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X}, Y). \tag{10}$$

Dôkaz: Pre ľubovoľnú náhodnú veličinu ξ s konečným druhým momentom platí $\mathcal{D}(\xi) = \mathcal{E}(\xi^2) - \mathcal{E}^2(\xi)$, preto

$$\mathcal{E}(Y - \hat{Y})^2 = \mathcal{D}(Y - \hat{Y}) + \mathcal{E}^2(Y - \hat{Y}) \geq \mathcal{D}(Y - \hat{Y})$$

(rovnosť nastane práve ak $\mathcal{E}(Y - \hat{Y}) = 0$, teda práve ak $\beta_0 = \mathcal{E}(Y) - \boldsymbol{\beta}'\mathcal{E}(\mathbf{X})$)

$$= \mathcal{D}(Y - \beta_0 - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}) = \mathcal{D}(Y - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}) = \mathcal{D}\left((1 \vdots -\boldsymbol{\beta}')\begin{pmatrix} Y \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}\right) = (1 \vdots -\boldsymbol{\beta}')\begin{pmatrix} \mathcal{D}(Y) & cov(Y, \mathbf{X}) \\ cov(\mathbf{X}, Y) & cov(\mathbf{X}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(\mathcal{D}(Y)-\boldsymbol{\beta}'cov(\mathbf{X},Y) \vdots cov(Y,\mathbf{X})-\boldsymbol{\beta}'cov(\mathbf{X})\Big)\begin{pmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \mathcal{D}(Y)-\boldsymbol{\beta}'cov(\mathbf{X},Y)-cov(Y,\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}'cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} =$$

$$= \mathcal{D}(Y) - [\boldsymbol{\beta} - (cov(\mathbf{X}))^{-1}cov(\mathbf{X},Y)]'cov(\mathbf{X})[\boldsymbol{\beta} - (cov(\mathbf{X}))^{-1}cov(\mathbf{X},Y)] - cov(Y,\mathbf{X})(cov(\mathbf{X}))^{-1}cov(\mathbf{X},Y) \geq$$

(rovnosť nastane práve ak $\boldsymbol{\beta} = [cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X},Y)$)

$$\geq \mathcal{D}(Y) - cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X},Y). \qquad \text{Q.E.D.}$$

Poznámka 4.2: Optimálna lineárna predikcia, t.j. lineárna predikcia s minimálnu strednekvadratickou chybou je

$$\hat{Y} = \mathcal{E}(Y) - \boldsymbol{\beta}'\mathcal{E}(\mathbf{X}) + cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}\mathbf{X}.$$

Pre túto predikciu platí

$$\sigma^2_{Y,\mathbf{X}} = \mathcal{E}\Big(Y - \big(\mathcal{E}(Y) - \boldsymbol{\beta}'\mathcal{E}(\mathbf{X}) + cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}\mathbf{X}\big)\Big)^2 = \mathcal{D}(Y) - cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X},Y) =$$

$$= \mathcal{D}(Y) - \boldsymbol{\beta}'cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}. \tag{11}$$

$\sigma^2_{Y,\mathbf{X}}$ sa volá *reziduálny rozptyl.* Funkcia

$$\hat{Y} = \mathcal{E}(Y) - \boldsymbol{\beta}'\mathcal{E}(\mathbf{X}) + cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}\mathbf{X}$$

sa volá *lineárna regresná funkcia.*

V prípade $k = 1$ je

$$\hat{Y} = \mathcal{E}(Y) - \frac{cov(X,Y)}{\mathcal{D}(X)}\mathcal{E}(X) + \frac{cov(X,Y)}{\mathcal{D}(X)}X = \mathcal{E}(Y) + \varrho_{X,Y}\sqrt{\frac{\mathcal{D}(Y)}{\mathcal{D}(X)}}(X - \mathcal{E}(X)).$$

Regresná priamka preto je

$$\hat{y} = \mathcal{E}(Y) + \varrho_{X,Y}\sqrt{\frac{\mathcal{D}(Y)}{\mathcal{D}(X)}}(x - \mathcal{E}(X))$$

(x je realizácia X a $\hat{y}$ je realizácia $\hat{Y}$). Obyčajne teoretické (skutočné) hodnoty $\mathcal{E}(X), \mathcal{E}(Y), \mathcal{D}(X), \mathcal{D}(Y), \varrho_{X,Y}$ nepoznáme, ale použijeme ich odhady $\widehat{\mathcal{E}(X)} = \overline{X}$, $\widehat{\mathcal{E}(Y)} = \overline{Y}$, $\widehat{\mathcal{D}(X)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$, $\widehat{\mathcal{D}(Y)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2$, $\widehat{\varrho_{X,Y}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2 \sum_{j=1}^n (Y_j-\overline{Y})^2}}$.

Veta 4.3: Platí

$$0 \leq \sigma^2_{Y,\mathbf{X}} \leq \mathcal{D}(Y).$$

Dôkaz: Obidve nerovnosti sú zrejmé zo vzťahu (11), prvá nerovnosť vyplýva z toho, že $\sigma^2_{Y,\mathbf{X}}$ je stredná hodnota nezápornej náhodnej veličiny. Q.E.D.

Poznámka 4.4: Ak sú Y a $\mathbf{X}$ nekorelované, tak $cov(Y,\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, teda z (11) je $\sigma^2_{Y,\mathbf{X}} = \mathcal{D}(Y)$. Z (11) vyplýva, že vždy je $\sigma^2_{Y,\mathbf{X}} \leq \mathcal{D}(Y)$, lebo $[cov(\mathbf{X})]^{-1}$ je pozitívne definitná matica (ľahko sa o tom presvedčíme).

Definícia 4.5: Nech $cov(\mathbf{X})$ je regulárna matica. *Koeficientom mnohonásobnej korelácie* medzi Y a $\mathbf{X}$ nazývame korelačný koeficient $\varrho(Y,\hat{Y})$ a značíme $\varrho_{Y,\mathbf{X}}$, pričom $\hat{Y}$ je optimálne lineárna predikcia, teda $\hat{Y} = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}$, kde $\beta_0 = \mathcal{E}(Y) - \boldsymbol{\beta}'\mathcal{E}(\mathbf{X})$ a $\boldsymbol{\beta} = [cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X},Y)$. Ak $\mathcal{D}(Y) = 0$ alebo $\mathcal{D}(\hat{Y}) = 0$, tak položíme $\varrho_{Y,\mathbf{X}} = 0$.

Poznámka 4.6: $\mathcal{D}(\hat{Y}) = 0 \iff \boldsymbol{\beta}'cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} = 0 \iff \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

Veta 4.7: Platí

(i) $\varrho_{Y,\mathbf{X}} \geq 0$.

Ak $0 < \mathcal{D}(Y) < \infty$, tak

(ii) $\varrho^2_{Y,\mathbf{X}} = \frac{\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}{\mathcal{D}(Y)}$,

(iii) $\varrho^2_{Y,\mathbf{X}} = cor(Y,\mathbf{X})[cor(\mathbf{X})]^{-1}cor(\mathbf{X},Y)$,

(iv) $\varrho^2_{Y,\mathbf{X}} = 1 - \frac{\sigma^2_{Y,\mathbf{X}}}{\mathcal{D}(Y)}$.

Dôkaz: (i) Ak je $\mathcal{D}(Y) = 0$ & $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ alebo $\mathcal{D}(Y) = 0$ & $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, tak priamo z definície $\varrho(Y,\hat{Y}) = 0$. Ak $\mathcal{D}(Y) > 0$ & $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, tak podľa Poznámky 4.6 je $\mathcal{D}(\hat{Y}) = 0$ a opäť z definície je $\varrho(Y,\hat{Y}) = 0$. Preto stačí uvažovať $\mathcal{D}(Y) > 0$, $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. V tomto prípade

$$\varrho_{Y,\mathbf{X}} = \varrho(Y,\hat{Y}) = \frac{cov(Y,\beta_0 + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X})}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)\mathcal{D}(\beta_0 + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X})}} = \frac{cov(Y,\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X})}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}} = \frac{cov\Big((1\vdots\mathbf{0}')\begin{pmatrix} Y \\ \mathbf{X}\end{pmatrix}, (0\vdots\boldsymbol{\beta}')\begin{pmatrix} Y \\ \mathbf{X}\end{pmatrix}\Big)}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}} =$$

$$= \frac{(1\vdots\mathbf{0}')\begin{pmatrix} \mathcal{D}(Y) & cov(Y,\mathbf{X}) \\ cov(\mathbf{X},Y) & cov(\mathbf{X})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}} = \frac{\Big(\mathcal{D}(Y)\vdots cov(Y,\mathbf{X})\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}} =$$

$$= \frac{cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X},Y)}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}} = \frac{\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}} > 0.$$

(ii) Ak $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, tak podľa Poznámky 4.6 je $\mathcal{D}(\hat{Y}) = 0$ a z definície je $\varrho_{Y,\mathbf{X}} = 0$, ale takisto $\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} = 0$, teda (ii) platí. Ak $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, tak (využijúc odvodzovanie v (i)) dostávame

$$\varrho^2_{Y,\mathbf{X}} = \varrho^2(Y,\hat{Y}) = \frac{cov^2(Y,\beta_0 + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X})}{\mathcal{D}(Y)\mathcal{D}(\beta_0 + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X})} = \frac{\{cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X},Y)\}^2}{\mathcal{D}(Y)\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}} =$$

$$= \frac{\{cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X},Y)\}^2}{\mathcal{D}(Y)\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}} = \frac{[\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}]^2}{\mathcal{D}(Y)\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}{\mathcal{D}(Y)}.$$

(iii) Ak $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, tak $cov(\mathbf{X},Y) = \mathbf{0}$ ale aj $cor(\mathbf{X},Y) = \mathbf{0}$, teda $cor(Y,\mathbf{X})[cor(\mathbf{X})]^{-1}cor(\mathbf{X},Y) = 0$. Na druhej strane v tomto prípade podľa Poznámky 4.6 je $\mathcal{D}(\hat{Y}) = 0$, teda $\varrho^2_{Y,\mathbf{X}} = 0$. Ak $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, tak podľa (ii)

$$\varrho^2_{Y,\mathbf{X}} = \frac{\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}{\mathcal{D}(Y)} = \frac{cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X},Y)}{\mathcal{D}(Y)} = \frac{cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X},Y)}{\mathcal{D}(Y)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}}\Big(cov(Y,X_1)\vdots \ldots \vdots cov(Y,X_k)\Big)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}}\end{pmatrix}^{-1} \times\right.$$

$$\left.[cov(\mathbf{X})]^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}}\end{pmatrix}^{-1}\right]\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} cov(X_1,Y) \\ cov(X_2,Y) \\ \vdots \\ cov(X_k,Y)\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}} =$$

$$= cor(Y,\mathbf{X})[cor(\mathbf{X})]^{-1}cor(\mathbf{X},Y)$$

(využijúc známy fakt, že pre regulárne matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ platí $(\mathbf{ABA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$).

(iii) Podľa (11) pre reziduálny rozptyl platí

$$\sigma^2_{Y,\mathbf{X}} = \mathcal{D}(Y) - cov(Y, \mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X}, Y),$$

čiže

$$\sigma^2_{Y,\mathbf{X}} = \mathcal{D}(Y) - \boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}.$$

Keď vydelíme túto rovnicu nenulovou hodnotou $\mathcal{D}(Y)$ dostaneme

$$\frac{\sigma^2_{Y,\mathbf{X}}}{\mathcal{D}(Y)} = 1 - \frac{\boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}{\mathcal{D}(Y)}$$

a pomocou (ii) konečne dostávame

$$\varrho^2_{Y,\mathbf{X}} = 1 - \frac{\sigma^2_{Y,\mathbf{X}}}{\mathcal{D}(Y)}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Poznámka 4.8: Obyčajne vyjadrujeme $\varrho^2_{Y,\mathbf{X}}$ pomocou prvkov korelačnej matice
$cor(Y, \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & cor(Y, \mathbf{X}) \\ cor(\mathbf{X}, Y) & cor(\mathbf{X}) \end{pmatrix}.$

Poznámka 4.9:

(i) Ak $Y, \mathbf{X}$ sú nekorelované, tak $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ a $\hat{Y} = \mathcal{E}(Y)$, čiže $\mathcal{D}(\hat{Y}) = 0$ a preto $\varrho^2_{Y,\mathbf{X}} = 0$, teda $\varrho_{Y,\mathbf{X}} = 0$.

(ii) Ak $\hat{Y}$ je optimálna lineárna predikcia, teda $\hat{Y} = \mathcal{E}(Y) - \boldsymbol{\beta}'\mathcal{E}(\mathbf{X}) + cov(Y, \mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}\mathbf{X}$ a $Y = \hat{Y}$, tak $\sigma^2_{Y,\mathbf{X}} = \mathcal{E}(Y - \hat{Y})^2 = 0$ a podľa Vety 4.7 (iv) je $\varrho^2_{Y,\mathbf{X}} = 1$, čiže aj $\varrho_{Y,\mathbf{X}} = 1$ (lebo podľa Vety 4.7 (i) je $\varrho_{Y,\mathbf{X}} \geq 0$).

(iii) $\varrho_{Y,\mathbf{X}}$ je ukazovateľ (miera) štatistickej väzby (stochastickej väzby) medzi Y a $\mathbf{X}$.

(iv) $100\varrho^2_{Y,\mathbf{X}}$ udáva v % variabilitu Y, ktorá sa dá vysvetliť variabilitou $\mathbf{X}$.

Veta 4.10: Nech $0 < \mathcal{D}(\mathcal{Y}) < \infty$. Potom platí

$$\varrho_{Y,\mathbf{X}} = \max_{\substack{d \in \mathcal{R}^1 \\ \mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in \mathcal{R}^k}} |\varrho(Y, d + \mathbf{b}'\mathbf{X})|,$$

teda $\varrho_{Y,\mathbf{X}}$ je maximálny korelačný koeficient (v absolútnej hodnote) medzi Y a ľubovoľnou lineárnou kombináciou $\mathbf{d}'\mathbf{X} + d$.

Dôkaz: Nech $d \in \mathcal{R}^1$, $\mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in \mathcal{R}^k$.

$$|\varrho(Y, d + \mathbf{b}'\mathbf{X})| = \left| \frac{cov(1Y, d + \mathbf{b}'\mathbf{X})}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)\mathbf{b}'cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}} \right| = \left| \frac{cov(1Y, \mathbf{b}'\mathbf{X})}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)\mathbf{b}'cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}} \right| = \left| \frac{1cov(Y, \mathbf{X})\mathbf{b}}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}\sqrt{\mathbf{b}'cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}} \right| =$$

$$= \left| \frac{cov(Y, \mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1}cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}\sqrt{\mathbf{b}'cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}} \right| = \left| \frac{\boldsymbol{\beta}'cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}\sqrt{\mathbf{b}'cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}} \right|.$$

Maticu $cov(\mathbf{X})$ faktorizujeme a píšeme $cov(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\mathbf{B}'$, teda

$$\left| \frac{\boldsymbol{\beta}'cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}\sqrt{\mathbf{b}'cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}\sqrt{\mathbf{b}'cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}} |(\mathbf{B}'\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{B}'\mathbf{b})| \leq$$

(použijeme Schwarzovu nerovnosť, podľa ktorej pre ľubovoľné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{R}^k$ platí $|\mathbf{u}'\mathbf{w}| \leq \sqrt{\mathbf{u}'\mathbf{u}}\sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{w}}$)

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}\sqrt{\mathbf{b}'cov(\mathbf{X})\mathbf{b}}} \sqrt{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{B}\mathbf{B}'\boldsymbol{\beta}}\sqrt{\mathbf{b}'\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{b}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\beta}'cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}}{\mathcal{D}(Y)}} = \sqrt{\varrho^2_{Y,\mathbf{X}}} = \varrho_{Y,\mathbf{X}}$$

(použili sme Vetu 4.7 (ii) a (i)).

Príklad 4.11: Vyjadrite $\varrho^2_{Z.(X,Y)}$ pomocou "obyčajných" korelačných koeficientov..

Riešenie: Podľa Vety 4.7 (iii) platí

$$\varrho^2_{Z.(X,Y)} = cor(Z, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix})[cor\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}]^{-1} cor(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, Z) = (\varrho_{Z,X}, \varrho_{Z,Y}) \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{X,Y} \\ \varrho_{Y,X} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varrho_{X,Z} \\ \varrho_{Y,Z} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-\varrho^2_{X,Y}} (\varrho_{Z,X}, \varrho_{Z,Y}) \begin{pmatrix} 1 & -\varrho_{X,Y} \\ -\varrho_{X,Y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_{X,Z} \\ \varrho_{Y,Z} \end{pmatrix} = \frac{\varrho^2_{Z,X} + \varrho^2_{Z,Y} - 2\varrho_{Z,X}\varrho_{Z,Y}\varrho_{X,Y}}{1-\varrho^2_{X,Y}}.$$

(Použili sme vzorec $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac-b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ a ak $\mathbf{X} = X$, tak $\varrho^2_{Y,\mathbf{X}} = \varrho^2_{Y,X}$.)

Teraz si zavedieme parciálny korelačný koeficient.

Nech $Y, Z, X_1, ..., X_k$ sú náhodné veličiny na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, majú konečné druhé momenty, $\mathcal{D}(Y) \neq 0$, $\mathcal{D}(Z) \neq 0$ a $cov(\mathbf{X})$ je regulárna. Cieľom je získať mieru štatistickej (stochastickej) väzby medzi Y a Z pri eliminácii vlyvu $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k)'$ ("očistenú závislosť"). V zhode s predchádzajúcim označením označme

$\hat{Y}$ najlepšiu lineárnu predikciu Y pomocou $\mathbf{X}$,

$\hat{Z}$ najlepšiu lineárnu predikciu Z pomocou $\mathbf{X}$,

teda $\hat{Y} = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}$, kde $\beta_0 = \mathcal{E}(Y) - \boldsymbol{\beta}'\mathcal{E}(\mathbf{X})$ a $\boldsymbol{\beta} = [cov(\mathbf{X})]^{-1} cov(\mathbf{X}, Y)$ a
teda $\hat{Z} = \alpha_0 + \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}$, kde $\alpha_0 = \mathcal{E}(Z) - \boldsymbol{\alpha}'\mathcal{E}(\mathbf{X})$ a $\boldsymbol{\alpha} = [cov(\mathbf{X})]^{-1} cov(\mathbf{X}, Z)$.

Náhodné veličiny $R_Y = Y - \hat{Y}$, $R_Z = Z - \hat{Z}$ voláme *rezíduá.*

Definícia Veta 4.11: Nech platia označenia a predpoklady z predchádzajúceho odstavca. Korelačný koeicient $\varrho(R_Y, R_Z)$ nazývame *parciálnym korelačným koeficientom* medzi Y a Z pri danom náhodnom vektore $\mathbf{X}$ (niekedy sa povie "pri eliminácii vplyvu náhodného vektora $\mathbf{X}$"). Značíme ho $\varrho_{Y,Z.\mathbf{X}}$ alebo $\varrho_{Y,Z.X_1,X_2,...,X_k}$. Ak $\mathcal{E}(Y-\hat{Y})^2 = \mathcal{D}(Y-\hat{Y}) = 0$ alebo $\mathcal{E}(Z-\hat{Z})^2 = \mathcal{D}(Z-\hat{Z}) = 0$ (teda ak $\varrho_{Y,\mathbf{X}} = 1$ alebo $\varrho_{Z,\mathbf{X}} = 1$), tak kladieme $\varrho_{Y,Z.\mathbf{X}} = 0$.

Veta 4.12: Ak $\mathcal{D}(Y-\hat{Y}) \neq 0$ a $\mathcal{D}(Z-\hat{Z}) \neq 0$, tak

$$\varrho_{Y,Z.\mathbf{X}} = \frac{\varrho_{Y,Z} - cor(Y,\mathbf{X})[cor(\mathbf{X})]^{-1} cor(\mathbf{X}, Z)}{\sqrt{(1-\varrho^2_{Y,\mathbf{X}})(1-\varrho^2_{Z,\mathbf{X}})}}. \tag{12}$$

Dôkaz: Platí

$$\varrho_{Y,Z.\mathbf{X}} = \frac{cov(Y-\hat{Y}, Z-\hat{Z})}{\sqrt{\mathcal{D}(Y-\hat{Y})\mathcal{D}(Z-\hat{Z})}}. \tag{13}$$

Počítajme

$$cov(Y-\hat{Y}, Z-\hat{Z}) = cov(Y - \beta_0 - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}, Z - \alpha_0 - \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}) = cov(Y - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}, Z - \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}) =$$

$$= cov\Big((1 \vdots 0 \vdots -\boldsymbol{\beta}') \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}, (0 \vdots 1 \vdots -\boldsymbol{\alpha}') \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}\Big) =$$

$$= (1 \vdots 0 \vdots -\boldsymbol{\beta}') \begin{pmatrix} \mathcal{D}(Y) & cov(Y,Z) & cov(Y,\mathbf{X}) \\ cov(Z,Y) & \mathcal{D}(Z) & cov(Z,\mathbf{X}) \\ cov(\mathbf{X},Y) & cov(\mathbf{X},Z) & cov(\mathbf{X}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(\mathcal{D}(Y) - \boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X}, Y) \vdots cov(Y,Z) - \boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X}, Z) \vdots cov(Y, \mathbf{X}) - \boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\Big) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} =$$

$$= cov(Y,Z) - \boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X}, Z) - cov(Y, \mathbf{X})\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\alpha} =$$

$$= cov(Y,Z) - cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1} cov(\mathbf{X}, Z) - cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1} cov(\mathbf{X}, Z) +$$

$$+ cov(Y,\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1} cov(\mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1} cov(\mathbf{X}, Z) =$$

$$= \sqrt{\mathcal{D}(Y)\mathcal{D}(Z)} \left\{ \varrho_{Y,Z} - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}} \Big(cov(Y, X_1) \vdots \dots \vdots cov(Y, X_k) \Big) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}} \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}} \end{pmatrix}^{-1} [cov(\mathbf{X})]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}} \end{pmatrix}^{-1} \right] \times$$

$$\left. \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cov(X_1, Z) \\ cov(X_2, Z) \\ \vdots \\ cov(X_k, Z) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(Z)}} \right\} =$$

$$= \sqrt{\mathcal{D}(Y)\mathcal{D}(Z)} \left\{ \varrho_{Y,Z} - cor(Y, \mathbf{X})[cor(\mathbf{X})]^{-1} cor(\mathbf{X}, Z) \right\} = cov(Y - \hat{Y}, Z - \hat{Z}). \tag{14}$$

Ďalej platí

$$\mathcal{D}(Y - \hat{Y}) = \mathcal{D}(Y - \beta_0 - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}) = \mathcal{D}(Y - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}) = \mathcal{D}\Bigg((1 \vdots - \boldsymbol{\beta}') \begin{pmatrix} Y \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} \Bigg) =$$

$$= (1 \vdots - \boldsymbol{\beta}') \begin{pmatrix} \mathcal{D}(Y) & cov(Y, \mathbf{X}) \\ cov(\mathbf{X}, Y) & cov(\mathbf{X}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(\mathcal{D}(Y) - \boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X}, Y) \vdots cov(Y, \mathbf{X}) - \boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X}) \Big) \begin{pmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \mathcal{D}(Y) - \boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X}, Y) - cov(Y, \mathbf{X})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' cov(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} =$$

$$= \mathcal{D}(Y) - cov(Y, \mathbf{X})[cov(\mathbf{X})]^{-1} cov(\mathbf{X}, Y) =$$

$$= \mathcal{D}(Y) \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}} \Big(cov(Y, X_1) \vdots \dots \vdots cov(Y, X_k) \Big) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}} \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}} \end{pmatrix}^{-1} [cov(\mathbf{X})]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}} \end{pmatrix}^{-1} \right] \times$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_1)}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_2)}} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(X_n)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cov(X_1, Y) \\ cov(X_2, Y) \\ \vdots \\ cov(X_k, Y) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(Y)}} \Bigg\} =$$

$$= \mathcal{D}(Y)\{1 - cor(Y, \mathbf{X})[cor(\mathbf{X})]^{-1} cor(\mathbf{X}, Y)) = \mathcal{D}(Y)(1 - \varrho^2_{Y,\mathbf{X}}) = \mathcal{D}(Y - \hat{Y}). \qquad (15)$$

(podľa Vety 4.7 (iii)) Úplne analogicky dostaneme

$$\mathcal{D}(Z - \hat{Z}) = \mathcal{D}(Z)(1 - \varrho^2_{Z,\mathbf{X}}). \qquad (16)$$

Dosadením (14), (15) a (16) do (13) ľahko dostaneme

$$\varrho_{Y,Z.\mathbf{X}} = \frac{\varrho_{Y,Z} - cor(Y, \mathbf{X})[cor(\mathbf{X})]^{-1} cor(\mathbf{X}, Z)}{\sqrt{(1 - \varrho^2_{Y,\mathbf{X}})(1 - \varrho^2_{Z,\mathbf{X}})}}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Poznámka 4.13: K výpčtu $\varrho_{Y,Z.\mathbf{X}}$ potrebujeme vedieť $\varrho_{Y,Z},\ \varrho_{Y,X_j},\ \varrho_{X_i,X_j},\ \varrho_{Z,X_j},\ i = 1, 2, ..., k,\ j = 1, 2, ..., k$.

Poznámka 4.14: Medzi $\varrho_{Y,Z.\mathbf{X}}$ a $\varrho_{Y,Z}$ nie je žiaden (všeobecný) vzťah.

Príklad 4.15: Vyjadrite $\varrho_{Z.(X,Y)}$ pomocou "obyčajných" korelačných koeficientov.

Riešenie: Podľa (12) platí

$$\varrho_{Y,Z.X} = \frac{\varrho_{Y,Z} - \varrho_{Y,X}\varrho_{Z,X}}{\sqrt{(1 - \varrho^2_{Y,X})(1 - \varrho^2_{Z,X})}}.$$

5 Lineárny regresný model

Príklad 5.1: Merajme neznámu dĺžku stola β $n-$krát nezávisle s meradlami "rovnakej kvality", teda rovnakej (neznámej) štandardnej neistoty σ (smerodajná odchýlka meradla). Merania modelujeme náhodnými veličinami $Y_1, Y_2, ...Y_n$, $\mathcal{E}(Y_i) = \beta$ - meracie prístroje sú bez systematickej chyby. To znamená, skutočne namerané hodnoty (čísla) $y_1, y_2, ..., y_n$ sú realizáciami náhodných veličín $Y_1, Y_2, ...Y_n$. "Celé" meranie modelujeme observačným (pozorovaným) náhodným vektorom (vektorom meraní) $\mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_n)'$, ktorého stredná hodnota je $\mathcal{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{1}\beta$ a kovariančná matica je $\sigma^2\mathbf{I}$, teda modelujeme ho "trojicou" $(\mathbf{Y}, \mathbf{1}\beta, \sigma^2\mathbf{I})$.

Poznámka 5.2: V skutočnosti meráme tým istým meracím prístrojom, čo spôsobuje "závislosť" medzi meraniami. Štandardnú neistotu σ^2 meracieho prístroja môžeme poznať (napríklad z certifikátu prístroja), ale nemusíme poznať. Reálny prístroj nie je bez systematickej chyby. Náš jednoduchý model merania nie je úplne dokonalý (je to len určité priblíženie reality).

Príklad 5.3: (Anděl, J., *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985, str. 104.) Merajme medenú trubku (nominálnej dĺžky L_0 = 1000mm pri 20^0C) postupne pri 30^0C, 40^0C, 50^0C, 60^0C, 70^0C, 80^0C. Vysledky meraní sú

Δt (zmena teploty)	10^0C	20^0C	30^0C	40^0C	50^0C	60^0C
predĺženie ΔL [mm]	0,18	0,35	0,48	0,65	0,84	0,97

Zákon rozťažnosti (z fyziky) tvrdí, že $\Delta L = L_0\alpha\Delta t$, kde α je koeficient tepelnej rozťažnosti (pre daný materiál), teda

$$\begin{aligned} Y_1 &= L_0\alpha 10 + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= L_0\alpha 20 + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ Y_6 &= L_0\alpha 60 + \varepsilon_6, \end{aligned}$$

pričom predpokladáme, že $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ sú nezávislé, $\mathcal{E}(\varepsilon_i) = 0,\ \ i = 1, 2, ..., 6$ a $\mathcal{D}(\varepsilon_i) = \sigma^2,\ \ i = 1, 2, ..., 6$. Vektor observácií $\mathbf{Y}_{6,1}$ má strednú hodnotu $\begin{pmatrix} L_0 10 \\ L_0 20 \\ \vdots \\ L_0 60 \end{pmatrix} \alpha = \mathbf{X}\alpha$ ($\mathbf{X}$ je známa matica a α neznámy parameter, ktorého hodnota nás zaujíma). Kovariančná matica $cov(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{I}_{6,6}$. Teda "celé" meranie modelujeme "trojicou" $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}\alpha, \sigma^2\mathbf{I})$.

Príklad 5.4: (Anděl, J., *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985, str. 111.) U automobilu Trabant sa merala spotreba paliva (v litroch/100 km) v závislosti na jeho rýchlosti (pri stále zaradenom 4. rýchlostnom stupni, aby boli rovnaké podmienky jazdy). Rýchlosť považujeme za bezchybne určenú. Konkrétne namerané spotreby $y_1, ..., y_7$ považujeme za realizácie náhodných veličín $Y_1, ..., Y_7$, pričom spotreba je (podľa vyjadrenia odborníkov) kvadratickou funkciou rýchlosti. Merania spotreby modelujeme ako

$$Y_i = a + bx_i + cx_i^2 + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, ..., 7,$$

kde x_i je rýchlosť pri ktorej sa namerala spotreba y_i $-$ realizácia náhodnej veličiny Y_i. Keby sme merali bezchybne, spotreba pri rýchlosti x_i by bola vždy $a + bx_i + cx_i^2$. Náhodné veličiny ε_i sú náhodné chyby. O nich predpokladáme, že sú nezávislé, majú nulovú strednú hodnotu a rovnakú disperziu σ^2. Namerané hodnoty sú

rýchlosť (km/hod)	40	50	60	70	80	90	100
spotreba [l]	6,1	5,8	6,0	6,5	6,8	8,1	10,0

Observačný vektor (vektor meraní) $\mathbf{Y}_{7,1} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_7 \end{pmatrix}$ má strednú hodnotu $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_7 & x_7^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, pričom $\mathbf{X}$ je známa (pevná) matica a $\boldsymbol{\beta}$ je vektor neznámych parametrov, ktoré nás zaujímajú. Kovariančná matica observačného vektora je $cov(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{I}$, teda "celé" meranie zase modelujeme "trojicou" $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$.

Príklad 5.5: (Anděl, J., *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985, str. 113.) Majme dvojrozmernú náhodnú premennú $\mathbf{X} = (X, Y)'$, kde X $-$počet detí v rodine, Y $-$výdavky na stravu v rodine. Namerané hodnoty sú

počet detí	2	0	2	3	1	2
výdavky na stravu v tis.	4	3	4	6	4	5

Môžeme predpokladať (napríklad z "vynesenia" bodov (x_i, y_i)), že náhodná veličina $Y/X = x$ má strednú hodntu $\mathcal{E}(Y/X = x) = a + bx$. Teda hodnotu 4 tis. môžeme považovať za realizáciu náhodnej premennej $Y/X = 2$, atď. V takomto prípade môžeme napísať model merania ako

$$Y/X = x_i \quad = a + bx_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., 6,$$

kde nezávislé chyby $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_6$ majú nulové stredné hodnoty a (predpokladajme) rovnaké disperzie σ^2. Observačný vektor (vektor meraní) $\mathbf{Y}_{7,1} = \begin{pmatrix} Y_1 = Y/X = x_1 \\ Y_2 = Y/X = x_2 \\ \vdots \\ Y_7 = Y/X = x_7 \end{pmatrix}$ má strednú hodnotu $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$ $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, pričom zase $\mathbf{X}$ je známa (pevná) matica a $\boldsymbol{\beta}$ je vektor neznámych parametrov, ktoré nás zaujímajú. Kovariančná matica observačného vektora je $cov(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{I}$, teda "celé" meranie opäť modelujeme "trojicou" $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$.

Poznámka 5.6: Ak môžeme považovať v predchádzajúcom príklade náhodný vektor $(X, Y)'$ za normálne rozdelený, teda $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \mathbf{V}\right)$, $\mathbf{V}$ je regulárna, tak priamo z teórie vychádza $Y/X = x \sim N(a + bx, \sigma^2)$ (pozri (6) a odvoďte, že $a = \mu_Y - \mu_X \varrho\sqrt{\frac{\mathcal{D}(Y)}{\mathcal{D}(X)}}$, $b = \varrho\sqrt{\frac{\mathcal{D}(Y)}{\mathcal{D}(X)}}$, $\sigma^2 = \mathcal{D}(Y)(1 - \varrho^2)$).

Príklad 5.7: Majme body $A(\beta_1, \beta_2)$, $B(0,00; 0,00)$ $C(2365,22; 0,00)$, $D(3603,67; 823,35)$ v rovine. Meriame vzdialenosti AB, AC, AD a chceme zistiť (odhadnúť) súradnice β_1 a β_2 bodu A. Popíšte model merania.

Platí

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(\beta_1 - 0)^2 + (\beta_2 - 0)^2} \\ AC &= \sqrt{(\beta_1 - 2365,22)^2 + (\beta_2 - 0)^2} \\ AD &= \sqrt{(\beta_1 - 3603,67)^2 + (\beta_2 - 823,35)^2}. \end{aligned}$$

Odmeriame AB, teda realizujeme Y_1 a nameráme $y_1 = 1980,102$; odmeriame AC, teda realizujeme Y_2 a nameráme $y_2 = 2040,243$; a odmeriame AD, teda realizujeme Y_3 a nameráme $y_3 = 2598,897$. Z rovníc

$$\begin{aligned} 1980,102 &= \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \\ 2040,243 &= \sqrt{(\beta_1 - 2365,22)^2 + \beta_2^2} \end{aligned}$$

vypočítame "približné" hodnoty $\beta_1^0 = 1131,5$; $\beta_2^0 = 1625,0$. (Na výpočet približných hodnôt môžeme použiť ľubovoľné dve rovnice.) Teraz (nelineárne) vzdialenosti linearizujeme okolo približných hodnôt pomocou Taylorovej vety, t.j.

$$AB \approx \sqrt{(\beta_1^0)^2 + (\beta_2^0)^2} + \left.\frac{\partial(AB)}{\partial\beta_1}\right|_{\beta_1^0, \beta_2^0} \overbrace{(\beta_1 - \beta_1^0)}^{\Delta\beta_1} + \left.\frac{\partial(AB)}{\partial\beta_2}\right|_{\beta_1^0, \beta_2^0} \overbrace{(\beta_2 - \beta_2^0)}^{\Delta\beta_2} =$$

$$= 1980,131 + \frac{\beta_1^0 - 0}{\sqrt{(\beta_1^0)^2 + (\beta_2^0)^2}}\Delta\beta_1 + \frac{\beta_2^0 - 0}{\sqrt{(\beta_1^0)^2 + (\beta_2^0)^2}}\Delta\beta_2 =$$

$$= 1980,131 + \frac{1131,5}{1980,131}\Delta\beta_1 + \frac{1625}{1980,131}\Delta\beta_2 = 1980,131 + 0,571\Delta\beta_1 + 0,821\Delta\beta_2.$$

Podobne dostaneme

$$\begin{aligned} AC &\approx 2040,267 - 0,605\Delta\beta_1 + 0,796\Delta\beta_2 \\ AD &\approx 2598,897 - 0,951\Delta\beta_1 + 0,308\Delta\beta_2. \end{aligned}$$

Tentokrát máme 3 merania, a síce Y_1 −meranie AB, Y_2 −meranie AC, Y_3 −meranie AD. Náhodný vektor $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1980,131 \\ 2040,267 \\ 2598,897 \end{pmatrix}$ má strednú hodnotu $\begin{pmatrix} 0,571 & 0,821 \\ -0,605 & 0,796 \\ -0,951 & 0,308 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\delta}$ a kovariančnú maticu $\sigma^2\mathbf{I}$. Modelom "celého" merania je opäť $(\mathbf{W}, \mathbf{X}\boldsymbol{\delta}, \sigma^2\mathbf{I})$.

V každom z predchádzajúcich príkladov sme pri matematicko-štatistickom modelovaní reálnej situácie dostali náhodný vektor (meraní, pozorovaní), ktorého stredná hodnota bola $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, pričom $\mathbf{X}$ je známa matica a $\boldsymbol{\beta}$ vektor neznámych parametrov, ktoré nás zaujímali (chceli by sme ich "odhadnúť" (zistiť)). Kovariančná matica náhodného vektora meraní bola známa, alebo v tvare $\sigma^2\times$ známa matica. Takýto model sa nazýva *lineárny regresný model (LRM)*, alebo aj *lineárny model, regresný model, model lineárnej regresie.* Dospeli sme k nasledujúcej definícii.

Definícia 5.8: Povieme, že náhodný vektor $\mathbf{Y}$ sa riadi *lineárnym reresným modelom* s maticou plánu $\mathbf{X}$ (známa matica), vektorom chýb $\boldsymbol{\varepsilon}$, vektorom (neznámych) parametrov $\boldsymbol{\beta}$, ak

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

pričom
1. $\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$,
2. $cov(\mathbf{Y}) = cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{V}$, resp. $\sigma^2\mathbf{H}$

($\mathbf{V}$ resp. $\mathbf{H}$ sú známe pozitívne semidefinitné matice, skalárny faktor σ^2 kovariančnej matice môžeme, ale nemusíme poznať). Neexistuje funkčný vzťah medzi $\boldsymbol{\beta}$ a σ^2. Model značíme LRM $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V})$.

Ak $h(\mathbf{X}_{n,k}) = k < n$ a $\mathbf{V}$ je pozitívne definitná (regulárna) matica, tak model sa nazýva *regulárny regresný model* alebo *model plnej hodnosti.* Inak to je *model neúplnej hodnosti.*

V tejto celej prednáške (celý semester) budeme uvažovať LRM $(\mathbf{Y}_{n,1}, \mathbf{X}_{n,k}\boldsymbol{\beta}_{k,1}, \sigma^2\mathbf{I}_{n,n})$ plnej hodnosti. Úlohou, cieľom je odhadnúť (určiť) neznáme parametre $\boldsymbol{\beta}$ (strednej hodnoty) modelu. Odhadujeme ich *metódou najmenších štvorcov (metoda nejmenších čtverců-MNČ).* Sú to také $\hat{\beta}_1(\mathbf{Y}), ..., \hat{\beta}_k(\mathbf{Y})$, ktoré minimalizujú výraz

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{S}(\beta_1, ..., \beta_k) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j)^2 = ||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}||^2.$$

Teda MNČ odhad parametrov $\boldsymbol{\beta}$ v LRM $(\mathbf{Y}_{n,1}, \mathbf{X}_{n,k}\boldsymbol{\beta}_{k,1}, \sigma^2\mathbf{I}_{n,n})$ plnej hodnosti je

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{R}^k} \ \mathcal{S}(\boldsymbol{\beta})$$

a preto

$$\mathcal{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{R}^k} \ \mathcal{S}(\boldsymbol{\beta}) = \min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathcal{R}^k} ||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}||^2.$$

Veta 5.9: Nech $(\mathbf{Y}_{n,1}, \mathbf{X}_{n,k}\boldsymbol{\beta}_{k,1}, \sigma^2\mathbf{I}_{n,n})$ je LRM plnej hodnosti. Odhad $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ parametrov $\boldsymbol{\beta}$ metódou najmenších štvorcov je ekvivalentný riešeniu *normálnych rovníc* $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$, teda $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$.

Dôkaz: Podľa Vety 3.6 je $\mathcal{M}(\mathbf{X}') = \mathcal{M}(\mathbf{X}'\mathbf{X})$, teda $k = h(\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}') = h(\mathbf{X}'\mathbf{X})$. Pretože matica $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ je rozmeru $k \times k$ a aj hodnosť má rovnú k, je ro regulárna matica a existuje $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. Normálne rovnice majú jediné riešenie. Ak označíme riešenie normálnych rovníc $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, tak $\mathbf{X}'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}$ a pre ľubovoľné $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k$

$$\mathcal{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = ||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}||^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) =$$

$$= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) =$$

$$= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \underbrace{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{X}}_{\mathbf{0}'}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\underbrace{\mathbf{X}'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}_{\mathbf{0}} + (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\underbrace{\mathbf{X}'\mathbf{X}}_{p.d.matica}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \geq$$

$$\geq (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

teda

$$||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}||^2 = \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k} ||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}||^2.$$

Naopak, ak hľadáme minimum $\mathcal{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$, tak v tomto minime nutne $\dfrac{\partial \mathcal{S}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_m} = 0, \quad m = 1, 2, ..., k$. Pretože

$$\frac{\partial \mathcal{S}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_m} = \frac{\partial}{\partial \beta_m} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j)^2 \Big|_{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}} = \sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j)(-x_{im}) \Big|_{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}} = 0, \quad i = 1, 2, ..., k,$$

tak nutne

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\hat{\beta}_j)(x_{im}) = 0, \qquad m = 1, 2, ..., k,$$

čo môžeme písať

$$(Y_1 - \sum_{j=1}^{k} x_{1j}\hat{\beta}_j)(x_{1m}) + (Y_2 - \sum_{j=1}^{k} x_{2j}\hat{\beta}_j)(x_{2m}) + ... + (Y_n - \sum_{j=1}^{k} x_{nj}\hat{\beta}_j)(x_{nm}) = 0, \qquad m = 1, 2, ..., k,$$

alebo aj

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\{\mathbf{X}\}_{\bullet m} = 0, \qquad m = 1, 2, ..., k.,$$

Dostávame postupne

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{X} &= (0, 0, ..., 0)_{1,k} = \mathbf{0} \\
\mathbf{Y}'\mathbf{X} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{0} \\
\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}. \qquad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

Poznámka 5.10: MNČ odhad $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ parametrov $\boldsymbol{\beta}$ je odhadom lineárnym, lebo jeho zložky sú lineárne funkcie (observačného) náhodného vektora $\mathbf{Y}$, ktorý máme k dispozícii pre odhadnutie parametrov $\boldsymbol{\beta}$.

Poznámka 5.11: Pretože $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}\mathbf{Y} \iff \mathbf{X}'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \perp \mathcal{M}(\mathbf{X})$ t.j. $\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \perp \{\mathbf{X}\}_{\bullet i}, \quad i = 1, 2, ..., k$, dostávame, že

$$||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}||^2 = \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k} ||\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}||^2 \iff \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \perp \mathcal{M}(\mathbf{X}).$$

Geometricky je v $\mathcal{R}^n$ náhodný vektor $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ležiaci v $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ ortogonálnou projekciou observačného (náhodného) vektora $\mathbf{Y}$ na $\mathcal{M}(\mathbf{X})$, t.j. má od $\mathbf{Y}$ minimálnu vzdialenosť.

Odhad získaný metódou najmenších štvorcov je odhad získany optimalizačnou (numerickou) metódou. Vôbec sme pri jeho hľadaní neuvažovali o jeho pravdepodobnstných (štatistických) vlastnostiach. Vieme, že ak máme náhodný vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_n)'$, ktorého rozdelenie pravdepodobnsti závisí od (neznámych) parametra $\boldsymbol{\beta}_{k,1}$, tak odhad (bodový) tohto parametra je (ľubovoľné) merateľné zobrazenie $\mathbf{g}: \ \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^k$ (ktorého predpis nezávisí od $\boldsymbol{\beta}$) také, že náhodný vektor (niekedy sa používa názov *štatistika*) $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{g}(\mathbf{Y})$ v nejakom "rozumnom zmysle" aproximuje neznámy vektor paramerov $\boldsymbol{\beta}_{k,1}$.

Majme ľubovoľný (pevný) vektor $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^k$. $\gamma = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ je (lineárna) parametrická funkcia vektora $\boldsymbol{\beta}$. Ak máme m (pevných) vektorov $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, ..., \mathbf{c}_m \in \mathcal{R}^k$, tak

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1' \\ \mathbf{c}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m' \end{pmatrix}_{m,k} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma_1(\boldsymbol{\beta}) \\ \gamma_2(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ \gamma_m(\boldsymbol{\beta}) \end{pmatrix} \quad \text{je vektorová parametrická funkcia.}$$

Definícia 5.11: Povieme, že vektorová štatistika (náhodný vektor) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} T_1(\mathbf{Y}) \\ \vdots \\ T_m(\mathbf{Y}) \end{pmatrix}$ je *najlepší nevychýlený (nestranný) lineárny odhad - NNLO* vektorovej parametrickej funkcie $\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1'\boldsymbol{\beta} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m'\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} =$

$= \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta}$ ak

(i) $\mathbf{T} = \mathbf{L}_{m,n}\mathbf{Y}$, kde $\mathbf{L}$ je reálna matica (linearita odhadu),

(ii) $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{T}) = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\beta})$ pre každé $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k$ (nevychýlenosť odhadu),

(iii) ak $\mathbf{T}^\star$ je iný lineárny nevychýlený odhad parametrickej funkcie $\boldsymbol{\gamma}$, tak $cov(\mathbf{T}^\star) - cov(\mathbf{T})$ je pozitívne semidefintná matica (niekedy sa píše $cov(\mathbf{T}^\star) - cov(\mathbf{T}) \geq 0$).

Veta 5.12: Majme LRM $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ plnej hodnosti a $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ je MNČ odhad parametrov $\boldsymbol{\beta}$. Potom platí

(i) $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$ pre každé $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k$ (MNČ odhad je nevychýlený)

(ii) $cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

Dôkaz:

(i) $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathcal{E}_{\boldsymbol{\beta}}\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\right) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$ pre každé $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k$,

(ii) $cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = cov\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\right) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. Q.E.D.

Veta 5.13: V LRM $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_{n,k}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ plnej hodnosti je $\hat{\gamma} = \mathbf{C}'_{m,k}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ NNLO vektorovej parametrickej funkcie $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta}$, pričom $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ je MNČ odhad parametrov $\boldsymbol{\beta}$.

Dôkaz:

$$\mathbf{C}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{C}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

je lineárny odhad, pričom

$$\mathcal{E}\left(\mathbf{C}'\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \mathcal{E}\left(\mathbf{C}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\right) = \mathbf{C}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta} \quad \forall\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k,$$

teda je nevychýlený. Nech $\boldsymbol{\gamma}^\star = \mathbf{L}^\star\mathbf{Y}$ je ľubovoľný nevychýlený odhad vektorovej parametrickej funkcie $\boldsymbol{\gamma}$, tak

$$\mathcal{E}\left(\mathbf{L}^\star\mathbf{Y}\right) = \mathbf{L}^\star\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta} \quad \forall\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^k \iff \mathbf{L}^\star\mathbf{X} = \mathbf{C}'.$$

$$cov(\boldsymbol{\gamma}^\star) - cov(\hat{\gamma}) = \mathbf{L}^\star\sigma^2\mathbf{I}(\mathbf{L}^\star)' - \mathbf{C}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C} = \sigma^2\mathbf{L}^\star(\mathbf{L}^\star)' - \sigma^2\underbrace{\mathbf{C}'}_{\mathbf{L}^\star\mathbf{X}}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\underbrace{\mathbf{C}}_{\mathbf{X}'(\mathbf{L}^\star)'} =$$

$$= \sigma^2\left\{\mathbf{L}^\star(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{L}^\star)'\right\} \geq 0,$$

lebo $\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}$ je symetrická a idempotentná, teda pozitívne semidefinitná matica. Teda $\hat{\gamma} = \mathbf{C}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je NNLO vektorovej parametrickej funkcie $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta}$. Q.E.D.

Poznámka 5.14: Ak v predchádzajúcej vete $\mathbf{C}' = \mathbf{e}_i'$, tak $\hat{\beta}_i = \mathbf{e}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ je NNLO parametra β_i.

Definícia 5.15: *Reziduálny súčet štvorcov* je náhodná veličina

$$S_e(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}).$$

Je to miera kvality odhadu v danom LRM.

Veta 5.16: Platí

$$S_e = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

Dôkaz:

$$S_e = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}) =$$

$$= \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Veta 5.17: Štatistika

$$s^2 = \frac{1}{n-k}S_e = \frac{1}{n-k}\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}$$

je nevychýleným odhadom σ^2.

Dôkaz: Podľa Vety 1.5 dostávame

$$\mathcal{E}(s^2) = \mathcal{E}\left(\mathbf{Y}'\left[\frac{1}{n-k}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\right]\mathbf{Y}\right) =$$

$$= \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\left[\frac{1}{n-k}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\right]\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + Tr\left[\frac{1}{n-k}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\right]\sigma^2\mathbf{I} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-k}Tr(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') = \frac{\sigma^2}{n-k}(n - Tr\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}) = \sigma^2. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Poznámka 5.18: Náhodný vektor $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je "aproximáciou" bezchybných meraní, teda NNLO vektora stredných hodnôt $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, čiže $\hat{\mathbf{Y}} = \widehat{\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}}$. Niekedy sa mu hovorí vektor vyrovnaných hodnôt.

Definícia 5.19: Vektor $\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{r}$ voláme *vektor rezíduí* alebo *reziduálny vektor*. Jeho $i-$tu zložku (súradnicu) voláme *$i-$te rezíduum*.

Poznámka 5.20: Rezíduá sú jedným z prostriedkov diagnostikovania modelu, teda posúdenia vhodnosti modelovania nameraných údajov daným modelom. Keď si nakreslíme graf rezíduí, t.j. body (i, r_i) (tu r_i je hodnota (realizácia) $i-$teho rezídua), tak táto postupnosť nesmie vykazovať pri správnej voľbe modelu žiadnu systematičnosť .

Doteraz sme nič nepredpokladali o rozdelení pravdepodobnosti observačného (náhodného) vektora $\mathbf{Y}$. Pri ďalších štatistických inferenciách (odvodzovaniach) budeme predpokladať, že $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$, čo je to isté ako predpoklad $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$.

Veta 5.21: Majme LRM $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_{n,k}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ plnej hodnosti a $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$. Potom platí

(i) $\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_k(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$,

(ii) $\dfrac{n-k}{\sigma^2}s^2 = \dfrac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$,

(iii) $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a s^2 sú nezávislé.

Dôkaz: (i) Z predpokladov platí $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$. Pretože $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$, podľa Vety 2.6 je $\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_k(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$.

(ii) Náhodná veličina
$\dfrac{n-k}{\sigma^2}s^2 = \mathbf{Y}'\left[\dfrac{1}{\sigma^2}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\right]\mathbf{Y} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\left[\dfrac{1}{\sigma^2}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\right](\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) =$
$= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{A}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ je kvadratickou formou náhodného vektora $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$ s maticou kvadratickej formy $\mathbf{A}$. Pretože platí, že $\mathbf{A} = \dfrac{1}{\sigma^2}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')$ je symetrická, pozitívne semidefinitná, $\mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I}$, podľa Vety 3.14 $\dfrac{n-k}{\sigma^2}s^2 \sim \chi^2_{Tr\mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I}}$. Ale $Tr\mathbf{A}\sigma^2\mathbf{I} = Tr(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') = n-k$, teda $\dfrac{n-k}{\sigma^2}s^2 \sim \chi^2_{n-k}$.

(iii) Platí, že $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{Y}$, $s^2 = \mathbf{Y}'\left[\dfrac{1}{n-k}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\right]\mathbf{Y}$, pričom $\dfrac{1}{n-k}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')$ je symetrická a pozitívne semidefinitná a $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$. Pretože $\mathbf{B}\sigma^2\mathbf{I}\left[\dfrac{1}{n-k}(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\right] = \dfrac{\sigma^2}{n-k}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') = \mathbf{0}$, podľa Vety 3.15 sú $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a s^2 nezávislé. Q.E.D.

Nech $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^k$ je daný vektor, teda majme parametrickú funkciu $\gamma = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$.

Veta 5.22: Majme LRM $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_{n,k}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ plnej hodnosti, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$ a $\gamma = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ (funkciu parametrov). Nech $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je MNČ odhad vektora $\boldsymbol{\beta}$. Potom

$$T = \frac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \sim t_{n-k}, \quad \text{ak } \mathbf{c} \neq \mathbf{0}.$$

Dôkaz: Pretože $\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c})$, je $\dfrac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{\sigma\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \sim N(0,1)$. Podľa Vety 5.21 (ii) $\dfrac{n-k}{\sigma^2}s^2 = \dfrac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$ a podľa Vety 5.21 (iii) sú $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a s^2 sú nezávislé, teda aj $\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (ako fukcia $\hat{\boldsymbol{\beta}}$) a s^2 sú nezávislé. Potom ale (priamo z definície Studentovho $t-$rozdelenia)

$$T = \frac{\dfrac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{\sigma\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2}}{n-k}}} = \frac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \sim t_{n-k}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Z Vety 5.22 vyplýva, že pre dané $\alpha \in (0,1)$

$$P\left\{t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \leq t_{n-k}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right\} = 1 - \alpha, \tag{17}$$

kde $t_g(\beta)$ je $\beta-$kvantil Studentovho t rozdelenia s g stupňami voľnosti. Teda ak náhodná veličina $T \sim t_g$ (T má Studentovo t rozdelenie pravdepodobnosti s g stupňami voľnosti), tak $t_g(\beta)$ je také číslo, pre ktoré platí

$P\{T < t_g(\beta)\} = \beta$. Upozorňujeme len, že v niektorej literatúre (napr. v knižke Anděl, J., *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985) sa pracuje (na rozdiel od tohto textu) s kritickými hodnotami a nie s kvantilmi.

Zo vzťahu (17) úpravami dostaneme

$$P\left\{t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right)s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}} \leq \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} \leq t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}\right\} = 1-\alpha,$$

$$P\left\{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}} \leq \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}\right\} = 1-\alpha$$

(lebo pre kvantily Studentovho rozdelenia platí $t_g(\beta) = -t_g(1-\beta)$) a teda $100(1-\alpha)\%-$ný interval spoľahlivosti (konfidenčný interval) pre $\gamma = \mathbf{c}\boldsymbol{\beta}$ je

$$\left(\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}, \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}\right). \tag{18}$$

Vetu 5.22 použijeme pri testovaní hyptézy o hodnote lineárnej funkcie $\gamma = \mathbf{c}\boldsymbol{\beta}$.

Majme LRM $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_{n,k}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ plnej hodnosti, pričom $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$, ($\sigma^2$ nepoznáme), $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ (MNČ odhad). Ďalej majme danú $\gamma = \mathbf{c}\boldsymbol{\beta}$ (lineárna funkcia parametrov $\boldsymbol{\beta}$).

Test hypotézy

$$H_0: \ \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} = \gamma_0 \text{ (dané číslo)} \quad \lessgtr \quad H_1: \ \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} \neq \gamma_0 \tag{19}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T_0 = \frac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \gamma_0}{s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \sim t_{n-k} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{array}{lcll} \text{Ak} \ |T_0| & \geq & t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \ \text{zamietame,} \\ \text{ak} \ |T_0| & < & t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \ \text{nezamietame.} \end{array}$$

Podľa Vety 5.22 má tento test hladinu významnosti α.

Dôležité špeciálne prípady testu (19) sú testy o hodnote jednotlivých zložiek vektora parametrov. Pretože $\beta_j = \mathbf{e}_j'\boldsymbol{\beta}$, $j = 1, 2, ..., k$, ak v teste (19) za $\mathbf{c}$ vezmeme $\mathbf{e}_j$ a za γ_0 vezmeme β_j^0 (dané číslo), dostávame nasledujúci test.

Test hypotézy

$$H_0: \ \beta_j = \beta_j^0 \text{ (dané číslo)} \quad \lessgtr \quad H_1: \ \beta_j \neq \beta_0 \tag{20}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T_{0j} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j^0}{s\sqrt{\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{jj}}} \sim t_{n-k} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{array}{lcll} \text{Ak} \ |T_{0j}| & \geq & t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \ \text{zamietame na hladine významnosti } \alpha, \\ \text{ak} \ |T_{0j}| & < & t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \ \text{nezamietame na hladine významnosti } \alpha. \end{array}$$

Z (18) (pri voľbe $\mathbf{c} = \mathbf{e}_j$) okamžite dostávame, že $100(1-\alpha)\%-$ný interval spoľahlivosti (konfidenčný interval) pre β_j je

$$\left(\hat{\beta}_j - t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) s\sqrt{\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{jj}}, \hat{\beta}_j + t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) s\sqrt{\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{jj}}\right). \tag{21}$$

Ak $\beta_j = 0$, tak môžeme "vynechať" $j-$ty stĺpec matice plánu, teda dostaneme jednoduchší model (s menej parametrami). Vektor $\mathbf{Y}$ nezáleží od parametra β_j.

Teraz si odvodíme $(1-\alpha)-$*tolerančný interval* pre náhodnú veličinu (meranie) $Y_{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$, ktorá má (skutočnú) strednú hodnotu (bezchybnú hodnotu) $\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$, disperziu σ^2 a je nezávislá od $Y_1, ..., Y_n$.

$(1-\alpha)-$tolerančný interval pre $Y_{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon$ je náhodný interval $(D_{\mathbf{c}}, H_{\mathbf{c}})$, pre ktorý platí

$$P\{Y_c \in (D_{\mathbf{c}}, H_{\mathbf{c}})\} = 1-\alpha.$$

Náhodná veličina

$$\tilde{Y}_{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \varepsilon,$$

pričom MNČ odhad $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a náhodná chyba $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$ sú nezávislé, má strednú hodnotu $\mathcal{E}(\tilde{Y}_{\mathbf{c}}) = \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ a disperziu $\mathcal{D}(\tilde{Y}_{\mathbf{c}}) = \sigma^2\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c} + \sigma^2$, čiže

$$\tilde{Y}_{\mathbf{c}} \sim N\left(\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1)\right).$$

Podľa Vety 5.21 (iii) sú $s^2 = \frac{1}{n-k}\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y})$ a MNČ odhad $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ nezávislé a ε je nezávislá s $\mathbf{Y}$ (teda aj s funkciami $\mathbf{Y}$, čo sú s^2 aj $\hat{\boldsymbol{\beta}}$). Náhodná veličina $\dfrac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{\sigma\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}}$ má $N(0,1)$ rozdelenie, a je nezávislá s $\dfrac{n-k}{\sigma^2}s^2$, ktorá má χ^2_{n-k} rozdelenie. Potom ale

$$\frac{\dfrac{\tilde{Y}_{\mathbf{c}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{\sigma\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{n-k}{\sigma^2}s^2}{n-k}}} = \frac{\tilde{Y}_{\mathbf{c}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1}} = \frac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \varepsilon - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1}} \sim t_{n-k},$$

čiže

$$P\left\{-t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \le \frac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \varepsilon - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1}} \le t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} = 1-\alpha,$$

$$P\left\{-t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1} - \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} \le -\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} - \varepsilon \le t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1} - \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}}\right\} = 1-\alpha,$$

odkiaľ dostávame

$$P\left\{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1} \le \overbrace{\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon}^{Y_{\mathbf{c}}} \le \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1}\right\} = 1-\alpha.$$

Preto $(1-\alpha)-$tolerančný interval pre $Y_{\mathbf{c}}$, $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^k$ je

$$\left(\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1}, \mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{n-k}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}+1}\right). \tag{22}$$

Poznámka 5.23: Ak za $\mathbf{c}$ zvolíme $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik})' = \{\mathbf{X}'\}_{i\bullet}$, tak z (22) dostaneme $(1-\alpha)-$tolerančný interval pre nové (nezávisle zopakované) meranie Y_i.

Ak $m \in \{1, 2, ..., k-1\}$, rozdeľme $\boldsymbol{\beta}$ na 2 časti, a síce na $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} \beta_{m+1} \\ \beta_{m+2} \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$, pričom $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}$

a analogicky rozdeľme $\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{S} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}$.

Veta 5.24: Majme LRM $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_{n,k}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ plnej hodnosti, $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$. Potom

$$F = \frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)'\mathbf{S}_{22}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)}{(k-m)s^2} \sim F_{k-m,n-k}.$$

Dôkaz: Podľa Vety 5.21 sú $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a $\frac{n-k}{\sigma^2}s^2$ nezávislé, teda aj $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ a $\frac{n-k}{\sigma^2}s^2$ sú nezávislé, pričom $\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$. Pomocou tvrdenia Vety 2.6 a analogickým postupom ako v dôkaze Vety 2.7 ľahko ukážeme, že $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \sim N_{k-m}(\boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2\mathbf{S}_{22})$. Z toho vyplýva podľa Vety 3.13, že $(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)'\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{S}_{22}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2) \sim \chi^2_{k-m}$. (Upozorňujeme len, že podľa Dôkazu Vety 5.9 existuje $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ (samozrejme regulárna) a podľa Lemy 2.14 (i) je $\mathbf{S}_{22}$ tiež regulárna.) Preto

$$F = \frac{\frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)'\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{S}_{22}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)}{k-m}}{\frac{\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2}}{n-k}} = \frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)'\mathbf{S}_{22}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)}{(k-m)s^2} \sim F_{k-m,n-k}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Poznámka 5.25: Veta 5.24 platí aj pre $m = 0$, teda pre $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}$.

Test hypotézy

$$H_0: \ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_2^0 \text{ (daný vektor)} \quad \times \quad H_1: \ \boldsymbol{\beta}_2 \neq \boldsymbol{\beta}_2^0 \tag{23}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$F_0 = \frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2^0)'\mathbf{S}_{22}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2^0)}{(k-m)s^2} \sim F_{k-m,n-k} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Ak} & F_0 & \geq & s^2(k-m)F_{k-m,n-k}(1-\alpha) & \Longrightarrow H_0 \text{ zamietame,} \\ \text{ak} & F_0 & < & s^2(k-m)F_{k-m,n-k}(1-\alpha) & \Longrightarrow H_0 \text{ nezamietame,} \end{array}$$

pričom $F_{k-m,n-k}(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$ kvantil Fisherovho-Snedecorovho F rozdelenia s $k-m$ a $n-k$ stupňami voľnosti. Podľa Vety 5.24 má tento test hladinu významnosti α.

Poznámka 5.26: Z Vety 5.24 dostávame, že

$$P\left\{\frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)'\mathbf{S}_{22}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)}{(k-m)s^2} \leq F_{k-m,n-k}(1-\alpha)\right\} = 1-\alpha,$$

teda

$$P\left\{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2)'\mathbf{S}_{22}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \boldsymbol{\beta}_2) \leq s^2(k-m)F_{k-m,n-k}(1-\alpha)\right\} = 1-\alpha. \tag{24}$$

Vzťahom (24) je určená $(1-\alpha)100\%-$ná konfidenčná oblasť (oblasť spoľahlivosti, konfidenčný elipsoid), ktorý s pravdepodobnosťou $1-\alpha$ pokrýva (neznámy) vektor $\boldsymbol{\beta}_2$.

Poznámka 5.27: Nie je podstatné delenie $\boldsymbol{\beta}$ na $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{pmatrix}$, môžeme vziať $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}\beta_{i_1}\\ \beta_{i_2}\\ \vdots\\ \beta_{i_m}\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}\beta_{j_1}\\ \beta_{j_2}\\ \vdots\\ \beta_{j_{k-m}}\end{pmatrix}$, aby $\{1,2,...,k\} = \{i_1,i_2,...,i_m\} \cup \{j_1,j_2,...,j_{k-m}\}$.

Špeciálne regresné modely

a) Jednovýberový $t-$test.

Majme náhodný výber $Y_1,...,Y_n$ z $N(\mu,\sigma^2)$ rozdelenia, μ ani σ^2 nepoznáme. LRM je

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_n\end{pmatrix} = \mathbf{1}\mu + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}.$$

MNČ odhad $\hat{\mu} = (\mathbf{1}'\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'\mathbf{Y} = \overline{Y}$, $\quad s^2 = \frac{1}{n-1}\mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{1}(\mathbf{1}'\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}')\mathbf{Y} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (Y_i-\overline{Y})^2$ (dokážte ako cvičenie). Keď aplikujeme Vetu 5.22 a zvolíme $\mathbf{c}=1, \gamma_0=\mu_0$ (dané číslo), dostávame:

Test hypotézy

$$H_0:\ \mu=\mu_0 \text{ (dané číslo)} \quad \asymp \quad H_1:\ \mu\neq\mu_0 \tag{25}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T_0 = \frac{1\hat{\mu}-1\mu_0}{s\sqrt{1\ \frac{1}{n}\ 1}} = \frac{\overline{Y}-\mu_0}{s} \sim t_{n-1} \quad \text{(za platnosti } H_0).$$

$$\begin{array}{llll} \text{Ak} & |T_0| & \geq & t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \text{ zamietame,}\\ \text{ak} & |T_0| & < & t_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \text{ nezamietame.}\end{array}$$

Podľa Vety 5.22 má tento test hladinu významnosti α.

b) Dvojvýberový $t-$test.

Majme

náhodný výber $\mathbf{Y}_1 = (Y_{11},...,Y_{1n_1})'$ z $N(\mu_1,\sigma^2)$ rozdelenia a nezávislý s ním

náhodný výber $\mathbf{Y}_2 = (Y_{21},...,Y_{2n_2})'$ z $N(\mu_2,\sigma^2)$ rozdelenia. LRM je

$$\mathbf{Y}_{n_1+n_2,1} = \begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1}_{n_1,1} & \mathbf{0}_{n_1,1}\\ \mathbf{0}_{n_2,1} & \mathbf{1}_{n_2,1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}, \quad cov(\mathbf{Y}) = cov\left(\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}\right) = \sigma^2\mathbf{I}_{n_1+n_2,n_1+n_2}.$$

Matica plánu $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1,1} & \mathbf{0}_{n_1,1} \\ \mathbf{0}_{n_2,1} & \mathbf{1}_{n_2,1} \end{pmatrix}$. Presvedčte sa, že platí $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n_1} Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n_2} Y_{2i} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Y}_1 \\ \overline{Y}_2 \end{pmatrix}$, $s^2 = \dfrac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} Y_{1i}^2 - n_1 \overline{Y}_1^2 + \sum_{j=1}^{n_2} Y_{2j}^2 - n_2 \overline{Y}_2^2 \right)$. Keď aplikujeme Vetu 5.22 a zvolíme $\mathbf{c} = (1, -1)'$ a $\gamma_0 = 0$, dostávame:

Test hypotézy

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 \quad \lessgtr \quad H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2 \tag{26}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T_0 = \frac{\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2}{s \sqrt{(1,-1) \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}} = \frac{\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2}{s \sqrt{\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ak} \quad |T_0| \quad &\geq \quad t_{n_1+n_2-2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Longrightarrow H_0 \ \text{zamietame,} \\ \text{ak} \quad |T_0| \quad &< \quad t_{n_1+n_2-2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Longrightarrow H_0 \ \text{nezamietame.} \end{aligned}$$

Podľa Vety 5.22 má tento test hladinu významnosti α.

c) Zovšeobecnenie na k výberov

Majme

náhodný výber $\mathbf{Y}_1 = (Y_{11}, ..., Y_{1n_1})'$ z $N(\mu_1, \sigma^2)$ rozdelenia,
náhodný výber $\mathbf{Y}_2 = (Y_{21}, ..., Y_{2n_2})'$ z $N(\mu_2, \sigma^2)$ rozdelenia,
$\vdots$
náhodný výber $\mathbf{Y}_k = (Y_{k1}, ..., Y_{kn_k})'$ z $N(\mu_k, \sigma^2)$ rozdelenia.

Všetky výbery sú nezávislé. Testujeme $H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$. Je to úloha analýzy rozptylu, budeme sa ňou zaoberať v prednáške LSM 2.

d) Regresná priamka.

Majme nezávislé náhodné veličiny (merania) $Y_1, ..., Y_n$, pre ktoré platí

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \ n \geq 3.$$

(Bezchybné merania ležia na priamke $y = \beta_0 + \beta_1 x$, hodnoty $x_i, \ i = 1, 2, ..., n$ poznáme bezchybne (úplne presne)). LRM je

$$\mathbf{Y}_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,1} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad cov(\mathbf{Y}) = cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{n,n}.$$

Opäť sa presvedčte, že platí

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}, \qquad (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i Y_i \end{pmatrix},$$

preto

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i Y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \tag{27}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}. \tag{28}$$

Pretože platí (tiež sa presvedčte výpočtom)

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \overline{x} = \overline{Y}, \tag{29}$$

obyčajne sa najprv spočíta $\hat{\beta}_1$ a potom $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{x} = \frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^n Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i\}$. Ešte potrebujeme

$$s^2 = \frac{1}{n-2}(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}) = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i Y_i\right). \tag{30}$$

Keď aplikujeme Vetu 5.22 a zvolíme $\mathbf{c} = (0,1)', \gamma_0 = \mu_0$ (dané číslo), dostávame:

Test hypotézy

$$H_0:\ \beta_1 = 0 \text{ (dané číslo)} \quad \asymp \quad H_1:\ \beta_1 \neq 0 \tag{31}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T = \frac{\hat{\beta}_1}{s}\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2} \sim t_{n-2} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{array}{rcll} \text{Ak} \ |T| & \geq & t_{n-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \ \text{zamietame,} \\ \text{ak} \ |T| & < & t_{n-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \ \text{nezamietame.} \end{array}$$

Podľa Vety 5.22 má tento test hladinu významnosti α.
Overte výpočtom, že platí

$$(0,1)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{n}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2}. \tag{32}$$

Z (18) dostaneme $100(1-\alpha)\%-$ný interval spoľahlivosti pre β_1

$$\left(\hat{\beta}_1 - t_{n-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2}}, \hat{\beta}_1 + t_{n-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2}}\right). \tag{33}$$

Analgicky odvoďte test hypotézy

$$H_0:\ \beta_0 = 0 \text{ (dané číslo)} \quad \asymp \quad H_1:\ \beta_0 \neq 0. \tag{34}$$

Keď aplikujeme Vetu 5.22 a zvolíme $\mathbf{c} = (1,x)', \gamma_0$ (x dané reálne číslo, γ_0 je hyptetická hodnota $\beta_0 + \beta_1 x$), dostávame:

Test hypotézy

$$H_0:\ \beta_0+\beta_1 x=\gamma_0 \text{ (dané číslo)} \quad \lessgtr \quad H_1:\ \beta_0+\beta_1 x\neq\gamma_0 \tag{35}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T_0=\frac{\hat\beta_0+\hat\beta_1 x-\gamma_0}{s\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2-n\overline{x}^2}}}\sim t_{n-2}\quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{aligned}
&\text{Ak}\quad |T_0| \ \geq\ t_{n-2}\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big) \quad\Longrightarrow H_0 \ \text{zamietame},\\
&\text{ak}\quad |T_0| \ <\ t_{n-2}\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big) \quad\Longrightarrow H_0 \ \text{nezamietame}.
\end{aligned}$$

Podľa Vety 5.22 má tento test hladinu významnosti α.
Overte výpočtom, že platí

$$(1,x)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}=\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2-n\overline{x}^2}. \tag{36}$$

Z (18) dostaneme $100(1-\alpha)\%-$ný interval spoľahlivosti pre $\beta_0+\beta_1 x$

$$\left(\hat\beta_0+\hat\beta_1 x-t_{n-2}\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2-n\overline{x}^2}},\hat\beta_0+\hat\beta_1 x+t_{n-2}\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)s\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2-n\overline{x}^2}}\right). \tag{37}$$

Poznámka 5.28: Ak vynesieme (37) pre každé $x\in\mathcal{R}^1$, dostaneme $100(1-\alpha)\%-$*ný pás spoľahlivosti okolo regresnej priamky*, ktorý prekaždé x (zvlášť) pokrýva skutočnnú (bezchybnú) hodnotu $\beta_0+\beta_1 x$ s pravdepodobnosťou $1-\alpha$. Naužší je pre $x=\overline{x}$. Jeho šírka sa dá ovplyvniť výberom bodov $x_1,...,x_n$, t.j. dizajnom experimentu.

$100(1-\alpha)\%-$*ný pás spoľahlivosti pre celú regresnú priamku* je

$$\left(\hat\beta_0+\hat\beta_1 x-s\sqrt{2F_{2,n-2}(1-\alpha)\left(\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2-n\overline{x}^2}\right)},\right.$$

$$\left.\hat\beta_0+\hat\beta_1 x+s\sqrt{2F_{2,n-2}(1-\alpha)\left(\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2-n\overline{x}^2}\right)}\right). \tag{38}$$

Pokrýva s pravdepodobnosťou $1-\alpha$ celú priamku $\beta_0+\beta_1 x$ (celú teoretickú regresnú preiamku). Je širší ako pás spoľahlivosti okolo regresnej priamky. Odvodíme si ho neskôr. Pozri Obr. 2, str. 106 v knihe Anděl, J., *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985.

Poznámka 5.29: Ak vynesieme (22) pre $\mathbf{c} = (1, x)'$ pre každé $x \in \mathcal{R}^1$, dostaneme $100(1-\alpha)\%$–*ný tolerančný pás (pás spoľahlivosti pre jednotlivé merania)*, ktorý pre každé x (zvlášť) obsahuje meranie v bode x s pravdepodobnosťou $1-\alpha$:

$$\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x - t_{n-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) s\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2}},\right.$$

$$\left.\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + t_{n-2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) s\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2}}\right). \qquad (39)$$

e) Dvojica regresných priamok.

Majme skupinu náhodných veličín (meraní) $Y_1, ..., Y_n$, pre ktoré platí

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \ n \geq 3$$

a od nich nezávislú inú skupinu náhodných veličín (meraní) $Y_1^\star, ..., Y_{n^\star}^\star$, pre ktoré platí

$$Y_i^\star = \beta_0^\star + \beta_1^\star x_i^\star + \varepsilon_i^\star, \quad i = 1, 2, ..., n^\star, \ n^\star \geq 3$$

LRM pre prvú skupinu meraní je $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ a pre druhú skupinu meraní je $(\mathbf{Y}^\star, \mathbf{X}^\star\boldsymbol{\beta}^\star, \sigma^2\mathbf{I})$, ($\sigma^2$ je pre obe skupiny meraní rovnaká), teda

$$\mathbf{Y}_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,1} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad cov(\mathbf{Y}) = cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{n,n},$$

$$\mathbf{Y}^*_{n^\star,1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^\star \\ 1 & x_2^\star \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n^\star}^\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0^\star \\ \beta_1^\star \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}^\star_{n,1} = \mathbf{X}^\star \begin{pmatrix} \beta_0^\star \\ \beta_1^\star \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}^\star, \quad cov(\mathbf{Y}^\star) = cov(\boldsymbol{\varepsilon}^\star) = \sigma^2 \mathbf{I}_{n^\star,n^\star},$$

pričom $cov(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^\star) = \mathbf{0}$. Označme MNČ odhady v jednotlivých LRM $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a $\hat{\boldsymbol{\beta}}^\star$, ďalej (podľa (30))

$$s^2 = \frac{1}{n-2}(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}) = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i Y_i\right), \qquad (40)$$

$$s^{\star 2} = \frac{1}{n^\star-2}(\mathbf{Y}^{\star\prime}\mathbf{Y}^\star - (\hat{\boldsymbol{\beta}}^\star)'\mathbf{X}^{\star\prime}\mathbf{Y}^\star) = \frac{1}{n^\star-2}\left(\sum_{i=1}^{n^\star} Y_i^{\star 2} - \hat{\beta}_0^\star \sum_{i=1}^{n^\star} Y_i^\star - \hat{\beta}_1^\star \sum_{i=1}^{n^\star} x_i^\star Y_i^\star\right). \qquad (41)$$

Podľa Vety 5.21 je $\frac{n-2}{\sigma^2}s^2 \sim \chi^2_{n-2}$ a $\frac{n^\star-2}{\sigma^2}s^{\star 2} \sim \chi^2_{n^\star-2}$, sú nezávislé a preto (podľa Vety 3.5)

$$\frac{n-2}{\sigma^2}s^2 + \frac{n^\star-2}{\sigma^2}s^{\star 2} = \frac{1}{\sigma^2}\left[(n-2)s^2 + (n^\star-2)s^{\star 2}\right] \sim \chi^2_{n+n^\star-4}. \qquad (42)$$

Podľa Vety 5.21 (iii) $\frac{n-2}{\sigma^2}s^2 + \frac{n^\star-2}{\sigma^2}s^{\star 2}$ nezávisí od $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ani od $\hat{\boldsymbol{\beta}}^\star$ (ktoré sú tiež medzi sebou nezávislé) a (pomocou Vety 5.21) dostávame

$$\hat{\gamma} = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_1^\star \sim N(\beta_1 - \beta_1^\star, \sigma^2\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{22} + \sigma^2\{(\mathbf{X}^{\star\prime}\mathbf{X}^\star)^{-1}\}_{22}),$$

čiže

$$\frac{\hat\beta_1 - \hat\beta_1^\star - (\beta_1 - \beta_1^\star)}{\sqrt{\sigma^2[\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{22} + \{(\mathbf{X}^{\star\prime}\mathbf{X}^\star)^{-1}\}_{22}]}} = \frac{\hat\beta_1 - \hat\beta_1^\star - (\beta_1 - \beta_1^\star)}{\sqrt{\sigma^2\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n^\star}(x_i^\star)^2 - n^\star\overline{x^\star}^2}\right]}} \sim N(0,1). \quad (43)$$

Zo vzťahov (42) a (43) dostávame, že štatistika

$$T = \frac{\dfrac{\hat\beta_1 - \hat\beta_1^\star - (\beta_1 - \beta_1^\star)}{\sqrt{\sigma^2\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n^\star}(x_i^\star)^2 - n^\star\overline{x^\star}^2}\right]}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{\sigma^2}\left[(n-2)s^2 + (n^\star - 2)s^{\star 2}\right]}{n + n^\star - 4}}} =$$

$$= \frac{[\hat\beta_1 - \hat\beta_1^\star - (\beta_1 - \beta_1^\star)]\sqrt{n + n^\star - 4}}{\sqrt{(n-2)s^2 + (n^\star - 2)s^{\star 2}}\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n^\star}(x_i^\star)^2 - n^\star\overline{x^\star}^2}}} \sim t_{n+n^\star-4} \quad (44)$$

Test hypotézy

$$H_0:\ \beta_1 = \beta_1^\star \qquad \asymp \qquad H_1:\ \beta_1 \neq \beta_1^\star \quad (45)$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T_0 = \frac{\left(\hat\beta_1 - \hat\beta_1^\star\right)\sqrt{n + n^\star - 4}}{\sqrt{(n-2)s^2 + (n^\star - 2)s^{\star 2}}\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n^\star}(x_i^\star)^2 - n^\star\overline{x^\star}^2}}} \sim t_{n+n^\star-4} \quad \text{(za platnosti } H_0).$$

$$\begin{array}{llll} \text{Ak} & |T_0| & \geq & t_{n+n^\star-4}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \implies H_0 \ \text{zamietame,} \\ \text{ak} & |T_0| & < & t_{n+n^\star-4}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \implies H_0 \ \text{nezamietame.} \end{array}$$

Test má hladinu významnosti α.

Podľa Vety 5.21 (i) $\hat{\boldsymbol\beta} \sim N(\boldsymbol\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$ a $\hat{\boldsymbol\beta}^\star \sim N(\boldsymbol\beta^\star, \sigma^2(\mathbf{X}^{\star\prime}\mathbf{X}^\star)^{-1})$. Tieto odhady sú nezávislé a preto

$$\hat{\boldsymbol\beta} - \hat{\boldsymbol\beta}^\star \sim N(\boldsymbol\beta - \boldsymbol\beta^\star, \sigma^2[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}^{\star\prime}\mathbf{X}^\star)^{-1}])$$

(k dôkazu stačí napr. vhodne použiť Vetu 2.6). Podľa Vety 3.13 je

$$[\hat{\boldsymbol\beta} - \hat{\boldsymbol\beta}^\star - (\boldsymbol\beta - \boldsymbol\beta^\star)]'\frac{1}{\sigma^2}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}^{\star\prime}\mathbf{X}^\star)^{-1}]^{-1}[\hat{\boldsymbol\beta} - \hat{\boldsymbol\beta}^\star - (\boldsymbol\beta - \boldsymbol\beta^\star)] \sim \chi_2^2$$

a samozrejme je táto náhodná veličina nezávislá s

$$\frac{1}{\sigma^2}\left[(n-2)s^2 + (n^\star - 2)s^{\star 2}\right] \sim \chi^2_{n+n^\star-4}.$$

Ľahko dostávame, že štatistika

$$F = \frac{[\hat{\boldsymbol\beta} - \hat{\boldsymbol\beta}^\star - (\boldsymbol\beta - \boldsymbol\beta^\star)]'[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + (\mathbf{X}^{\star\prime}\mathbf{X}^\star)^{-1}]^{-1}[\hat{\boldsymbol\beta} - \hat{\boldsymbol\beta}^\star - (\boldsymbol\beta - \boldsymbol\beta^\star)]}{(n-2)s^2 + (n^\star - 2)s^{\star 2}}\ \frac{n + n^\star - 4}{2} \sim F_{2,n+n^\star-4}.$$

Test hypotézy (o totožnosti (celých) teoretických regresných priamok)

$$H_0:\ \begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_0^\star\\ \beta_1^\star\end{pmatrix}\quad \times\quad H_1:\ \begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\beta_0^\star\\ \beta_1^\star\end{pmatrix} \tag{46}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$F_0=\frac{(\hat{\boldsymbol\beta}-\hat{\boldsymbol\beta}^\star)'[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}+(\mathbf{X}^{\star\prime}\mathbf{X}^\star)^{-1}]^{-1}(\hat{\boldsymbol\beta}-\hat{\boldsymbol\beta}^\star)}{(n-2)s^2+(n^\star-2)s^{\star 2}}\,\frac{n+n^\star-4}{2}\sim F_{2,n+n^\star-4}.\quad \text{(za platnosti } H_0).$$

$$\begin{array}{lllll}\text{Ak} & F_0 & \geq & F_{2,n+n^\star-4}(1-\alpha) & \Longrightarrow H_0\ \text{zamietame,}\\ \text{ak} & F_0 & < & F_{2,n+n^\star-4}(1-\alpha) & \Longrightarrow H_0\ \text{nezamietame.}\end{array}$$

Test má hladinu významnosti α.

Nech v "nehviezdičkovom" LRM je disperzia náhodných chýb σ^2 a v "hviezdičkovanom" $\sigma^{\star 2}$. Podľa Vety 5.21 je $\dfrac{n-2}{\sigma^2}s^2\sim\chi^2_{n-2}$ a $\dfrac{n^\star-2}{\sigma^{\star 2}}s^{\star 2}\sim\chi^2_{n^\star-2}$. s^2 a $\sigma^{\star 2}$, sú nezávislé, preto

$$F=\frac{\frac{s^2}{\sigma^2}}{\frac{s^{\star 2}}{\sigma^{\star 2}}}\sim F_{n-2,n^\star-2}.$$

Test hypotézy

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma^{\star 2}\quad \times\quad H_1:\ \sigma^2\neq\sigma^{\star 2} \tag{47}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$F_0=\frac{s^2}{s^{\star 2}}\sim F_{n-2,n^\star-2}\quad \text{(za platnosti } H_0).$$

$$\begin{array}{lllll}\text{Ak} & F_0 & \geq & F_{n-2,n^\star-2}(1-\alpha) & \Longrightarrow H_0\ \text{zamietame,}\\ \text{ak} & F_0 & < & F_{n-2,n^\star-2}(1-\alpha) & \Longrightarrow H_0\ \text{nezamietame.}\end{array}$$

Test má hladinu významnosti α.

Poznámka 5.30: Obidva LRM ("nehviezdičkovaný" a "hviezdičkovaný") sa dajú modelovať jediným LRM, a síce

$$\begin{pmatrix}\mathbf{Y}\\ \mathbf{Y}^\star\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{n,1} & \mathbf{x} & \mathbf{0}_{n,1} & \mathbf{0}_{n,1}\\ \mathbf{0}_{n^\star,1} & \mathbf{0}_{n^\star,1} & \mathbf{1}_{n^\star,1} & \mathbf{x}^\star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_0^\star\\ \beta_1^\star\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol\varepsilon\\ \boldsymbol\varepsilon^\star\end{pmatrix},\qquad cov\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol\varepsilon\\ \boldsymbol\varepsilon^\star\end{pmatrix}\right)=\sigma^2\mathbf{I}_{n+n^\star,n+n^\star},$$

kde $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)'$ a $\mathbf{x}^\star=(x_1^\star,...,x_{n^\star}^\star)'$. Všetky testy uvedené v bode e) sa dajú odvodiť v tomto modeli.

f) Regresná parabola (kvadratická regresia).

Majme nezávislé náhodné veličiny (merania) $Y_1,...,Y_n$, pre ktoré platí

$$Y_i=\beta_0+\beta_1x_i+\beta_2x_i^2+\varepsilon_i,\quad i=1,2,...,n,\ n\geq 4.$$

(Bezchybné merania ležia na parabole $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, hodnoty $x_i,\ i = 1, 2, ..., n$ poznáme bezchybne (úplne presne)). LRM je

$$\mathbf{Y}_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,1} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad cov(\mathbf{Y}) = cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{n,n}.$$

Samozrejme $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ a $s^2 = \dfrac{1}{n-3}(\sum_{n=1}^n Y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i Y_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 Y_i)$.

Test hypotézy

$$H_0: \ \beta_2 = 0 \qquad \gtrless \qquad H_1: \ \beta_2 \neq 0 \tag{48}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T_2 = \frac{\hat{\beta}_2}{s\sqrt{\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{33}}} \sim t_{n-3} \qquad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

Test hypotézy

$$H_0: \ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \gtrless \qquad H_1: \ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$F_0 = \frac{1}{2s^2}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \begin{pmatrix} \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{22} & \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{23} \\ \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{32} & \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} \sim F_{2,n-3} \qquad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

V tomto prípade testujeme, či $Y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$ (teda, či Y_i nezávisia od x_i) oproti alternatíve, že závisia lineárne alebo kvadraticky.

g) Polynomická regresia.

Majme nezávislé náhodné veličiny (merania) $Y_1, ..., Y_n$, pre ktoré platí

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + ... + \beta_p x^p + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \ n \geq p + 2.$$

(Bezchybné merania ležia na polynome $p-$teho stupňa $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + ... + \beta_p x^p$, hodnoty $x_i,\ i = 1, 2, ..., n$ poznáme bezchybne (úplne presne)). LRM je

$$\mathbf{Y}_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,1} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad cov(\mathbf{Y}) = cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{n,n}.$$

Testy dostaneme analogicky ako v prípade regresnej priamky alebo paraboly.

h) Model s dvomi vysvetľujúcimi premennými.

Majme nezávislé náhodné veličiny (merania) $Y_1, ..., Y_n$, pre ktoré platí

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 z_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \ n \geq 4.$$

teda bezchybné merania lineárne závisia od dvoch (vysvetľujúcich) premenných x a z. Hodnoty x_i a z_i, $\quad i = 1, 2, ..., n$ poznáme úplne bezchybne. LRM je

$$\mathbf{Y}_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,1} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad cov(\mathbf{Y}) = cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{n,n}.$$

Odhady $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ a $s^2 = \dfrac{1}{n-3}(\sum_{n=1}^{n} Y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} z_i Y_i)$.

Test hypotézy

$$H_0: \ \beta_2 = 0 \quad \lessgtr \quad H_1: \ \beta_2 \neq 0 \tag{50}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T_2 = \frac{\hat{\beta}_2}{s\sqrt{\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{33}}} \sim t_{n-3} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

Test hypotézy

$$H_0: \ \beta_1 = 0 \quad \lessgtr \quad H_1: \ \beta_1 \neq 0 \tag{51}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T_1 = \frac{\hat{\beta}_1}{s\sqrt{\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{22}}} \sim t_{n-3} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

Test hypotézy

$$H_0: \ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lessgtr \quad H_1: \ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$F_0 = \frac{1}{2s^2}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \begin{pmatrix} \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{22} & \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{23} \\ \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{32} & \{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\}_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} \sim F_{2,n-3} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

6 Výberový korelačný koeficient

Majme náhodný výber $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ z dvojrozmerného rozdelenia s distribučnou funkciou $F(x, y; \boldsymbol{\theta})$.

Definícia 6.1: Nech $\overline{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\overline{Y} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ sú výberové priemery. Štatistiku

$$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

nazývame *výberovou kovarianciou,*

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2\right), \quad S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\overline{Y}^2\right)$$

sú *výberové rozptyly. Výberový korelačný koeficient* je

$$r_{XY} = r = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 \sum_{j=1}^n (Y_j - \overline{Y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n Y_j^2 - n\overline{Y}^2\right)}}.$$

Poznámka 6.2: Dá sa ukázať (pozri napr. Anděl, J., *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985, str.116), že ak máme náhodný výber rozsahu aspoň 2 z absolútne spojitého rozdelenia, tak r_{XY} je definovaný s pravdepodobnosťou 1.

Veta 6.3: Nech $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ je náhodný výber z regulárneho $N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{D}(X) & \varrho\sqrt{\mathcal{D}(X)\mathcal{D}(Y)} \\ \varrho\sqrt{\mathcal{D}(X)\mathcal{D}(Y)} & \mathcal{D}(Y) \end{pmatrix}\right)$ rozdelenia, $n > 2,\ 0 < \mathcal{D}(X) < \infty,\ 0 < \mathcal{D}(Y) < \infty$, $\varrho^2 \neq 1$. Ak $\varrho = 0$ tak

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} \sim t_{n-2}.$$

Dôkaz: Uvažujme podmienené rozdelenie $Y_i/X_i = x_i \overset{\text{ozn.}}{=} {}_{(x_i)}Y_i, \quad i = 1, 2, ..., n$.
Podľa (6) ${}_{(x_i)}Y_i \sim N\left(\mu_Y + \varrho\sqrt{\frac{\mathcal{D}(Y)}{\mathcal{D}(X)}}(x_i - \mu_X), \mathcal{D}(Y)(1-\varrho^2)\right)$. Ak označíme

$$\beta_0 = \mu_Y - \mu_X \varrho\sqrt{\frac{\mathcal{D}(Y)}{\mathcal{D}(X)}} \quad \text{a} \quad \beta_1 = \varrho\sqrt{\frac{\mathcal{D}(Y)}{\mathcal{D}(X)}},$$

tak dostávame, že ${}_{(x_i)}Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \mathcal{D}(Y)(1-\varrho^2)), \quad i = 1, 2, ..., n$, pričom ${}_{(x_1)}Y_1, {}_{(x_2)}Y_2, ..., {}_{(x_n)}Y_n$ sú nezávislé. Máme teda LRM

$$\begin{pmatrix} {}_{(x_1)}Y_1 \\ {}_{(x_2)}Y_2 \\ \vdots \\ {}_{(x_n)}Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + {}_{(\mathbf{x})}\varepsilon, \qquad {}_{(\mathbf{x})}\varepsilon \sim N_n(\mathbf{0}, \mathcal{D}(Y)(1-\varrho^2)\mathbf{I}_{n,n}).$$

V tomto LRM platí $\varrho = 0 \Longleftrightarrow \beta_1 = 0$. Z (28), (29) a (30) dostávame

$${}_{(\mathbf{x})}\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})({}_{(x_i)}Y_i - {}_{(\mathbf{x})}\overline{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}, \quad {}_{(\mathbf{x})}\hat{\beta}_0 = {}_{(\mathbf{x})}\overline{Y} - {}_{(\mathbf{x})}\hat{\beta}_1 \overline{x}, \quad {}_{(\mathbf{x})}\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {}_{(x_i)}Y_i,$$

$${}_{(\mathbf{x})}s^2 = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^n {}_{(x_i)}Y_i^2 - {}_{(\mathbf{x})}\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n {}_{(x_i)}Y_i - {}_{(\mathbf{x})}\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i\ {}_{(x_i)}Y_i\right).$$

Za platnosti $\varrho = 0$ (teda $\beta_1 = 0$)

$${}_{(\mathbf{x})}T = \frac{{}_{(\mathbf{x})}\hat{\beta}_1}{{}_{(\mathbf{x})}s}\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2} = \frac{{}_{(\mathbf{x})}\hat{\beta}_1}{{}_{(\mathbf{x})}s}\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\overline{x}^2} \sim t_{n-2} \tag{53}$$

(pozri (31) a nižšie).

Ešte upravme výraz pre ${}_{(\mathbf{x})}s^2$:

$$
{}_{(\mathbf{x})}s^2 = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} {}_{(x_i)}Y_i^2 -_{(\mathbf{x})} \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} {}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \ {}_{(x_i)}Y_i\right) =
$$

$$
= \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} {}_{(x_i)}Y_i^2 - \left({}_{(\mathbf{x})}\overline{Y} -_{(\mathbf{x})} \hat{\beta}_1 \overline{x}\right) \sum_{i=1}^{n} {}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \ {}_{(x_i)}Y_i\right) =
$$

$$
= \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} {}_{(x_i)}Y_i^2 - \left({}_{(\mathbf{x})}\overline{Y} -_{(\mathbf{x})} \hat{\beta}_1 \overline{x}\right) n_{(\mathbf{x})}\overline{Y} -_{(\mathbf{x})} \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \ {}_{(x_i)}Y_i\right) =
$$

$$
= \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} {}_{(x_i)}Y_i^2 - n_{(\mathbf{x})}\overline{Y}^2 +_{(\mathbf{x})} \hat{\beta}_1 \left[n\overline{x}_{(\mathbf{x})}\overline{Y} - \sum_{i=1}^{n} x_i \ {}_{(x_i)}Y_i\right]\right) =
$$

$$
= \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} \left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \ {}_{(x_i)}Y_i - n\overline{x}_{(\mathbf{x})}\overline{Y}\right]\right) =
$$

$$
= \frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} \left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)\right]\right) =
$$

$$
= \frac{1}{n-2} \ \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{j=1}^{n}\left({}_{(x_j)}Y_j -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.
$$

Dosadením do (53) dostávame

$$
{}_{(\mathbf{x})}T = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{n-2} \ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{j=1}^{n}\left({}_{(x_j)}Y_j -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} =
$$

$$
= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{j=1}^{n}\left({}_{(x_j)}Y_j -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)\right)^2}} \sqrt{n-2} =
$$

$$
= \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{j=1}^{n}\left({}_{(x_j)}Y_j -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left({}_{(x_i)}Y_i -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{j=1}^{n}\left({}_{(x_j)}Y_j -_{(\mathbf{x})} \overline{Y}\right)^2}\right]^2}} \sqrt{n-2} \sim t_{n-2}.
$$

Teda ${}_{(\mathbf{x})}T \sim t_{n-2}$ pre ľubovoľné $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)'$. To je ale to isté, ako tvrdenie $T = \dfrac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} \ \sim t_{n-2}$ (${}_{(\mathbf{x})}T$ je podmienené T za podmienky $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, ale nezáleží na podmienke, teda "nepodmienené" T má rovnaké rozdelenie ako podmienené ${}_{(\mathbf{x})}T$). Q.E.D.

Majme náhodný výber $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ z dvojrozmerného regulárneho normálneho rozdelenia. Pomocou Vety 6.3 testujeme hypotézu o nezávislosti X a Y.

Test hypotézy

$$H_0: \ \varrho = 0 \quad \asymp \quad H_1: \ \varrho \neq 0 \tag{54}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$T_0 = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} \ \sim t_{n-2} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{array}{llll} \text{Ak} & |T_0| & \geq & t_{n-2}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \ \text{zamietame,} \\ \text{ak} & |T_0| & < & t_{n-2}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \ \text{nezamietame.} \end{array}$$

Tento test má hladinu významnosti α.

Poznámka 6.4: Zobrazenie $z: \ (-1,1) \to \mathcal{R}: \ \ z(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ sa nazýva *Fisherova $Z-$transformácia.* Bez dôkazu si uvedieme nasledujúce tvrdenie:

Veta 6.5: Majme náhodný výber $\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ z dvojrozmerného regulárneho normálneho rozdelenia s korelačným koeficientom ϱ a výberovým korelačným koeficientom r. Platí

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} \approx N\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\varrho}{1-\varrho} + \frac{\varrho}{2(n-1)}, \frac{1}{n-3}\right).$$

Aproximácia je požiteľná pre $n \geq 10$ a ϱ nie blízke 1 alebo -1.

Veta 6.5 sa aplikuje v nasledujúcich prípadoch

a) Test hypotézy

$$H_0: \ \varrho = \varrho_0 \quad \asymp \quad H_1: \ \varrho \neq \varrho_0 \tag{55}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$U_0 = \frac{Z - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\varrho_0}{1-\varrho_0} - \dfrac{\varrho_0}{2(n-1)}}{\sqrt{\dfrac{1}{n-3}}} \ \sim N(0,1) \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{array}{llll} \text{Ak} & |U_0| & \geq & u(1-\frac{\alpha}{2}) & \Longrightarrow H_0 \ \text{zamietame,} \\ \text{ak} & |U_0| & < & u(1-\frac{\alpha}{2}) & \Longrightarrow H_0 \ \text{nezamietame,} \end{array}$$

pričom $u\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ je $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-$ kvantil $N(0,1)$ rozdelenia. Test má hladinu významnosti približne rovnú α. Pre veľké n je $Z \approx N\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\varrho}{1-\varrho}, \dfrac{1}{n-3}\right)$.

b) Majme dva nezávislé výbery, každý z dvojrozmerného regulárneho normálneho rozdelenia. Ich rozsahy n_1 a n_2 sú aspoň 30. Korelačný koeficient u prvého rozdelenia je ϱ_1, u druhého je ϱ_2. Výberové korelačné koeficienty sú $r_1, \ r_2$ a $Z_1 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+r_1}{1-r_1}, \ Z_2 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+r_2}{1-r_2}$.

Test hypotézy

$$H_0: \ \varrho_1 = \varrho_2 \quad \asymp \quad H_1: \ \varrho_1 \neq \varrho_2 \tag{56}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky

$$U_0 = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1-3} + \dfrac{1}{n_2-3}}} \ \sim N(0,1) \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{array}{llll} \text{Ak} & |U_0| \geq u(1-\frac{\alpha}{2}) & \Longrightarrow H_0 & \text{zamietame,} \\ \text{ak} & |U_0| < u(1-\frac{\alpha}{2}) & \Longrightarrow H_0 & \text{nezamietame,} \end{array}$$

Test má hladinu významnosti približne rovnú α.

Definícia 6.6: Majme náhodný výber

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} X_{1,1} \\ X_{1,2} \\ \vdots \\ X_{1,p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} X_{2,1} \\ X_{2,2} \\ \vdots \\ X_{2\,p} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} X_{n,1} \\ X_{n,2} \\ \vdots \\ X_{n,p} \end{pmatrix}$$

z $p-$rozmerného rozdelenia so strednou hodnotou $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_p)'$ a kovariančnou maticou $\mathbf{\Sigma}$.

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i$$

je *výberový priemer*,

$$\mathbf{S}_{\mathbf{X}} = \mathbf{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})'$$

je *výberová kovariančná matica* a

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}} = \mathbf{R} = (diag\mathbf{S})^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}(diag\mathbf{S})^{-\frac{1}{2}}$$

je *výberová korelačná matica*, pričom $(diag\mathbf{S})^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \{\mathbf{S}\}_{1,1}^{-\frac{1}{2}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \{\mathbf{S}\}_{2,2}^{-\frac{1}{2}} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & \{\mathbf{S}\}_{p,p}^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$.

Poznámka 6.7:

(i) Namiesto $\mathbf{S}$ sa niekedy používa $\mathbf{M} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})' = \frac{n-1}{n}\mathbf{S}$.

(ii) $\{\mathbf{S}\}_{j,k}$ je výberová kovariancia $i \neq j$, $\{\mathbf{S}\}_{j,k} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{i,j} - \overline{X}_j)(X_{i,k} - \overline{X}_k)$, $\overline{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i,j}$.

(iii) $\{\mathbf{S}\}_{j,j}$ je výberový rozptyl $\{\mathbf{S}\}_{j,j} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{i,j} - \overline{X}_j)^2$.

(iv) $\mathbf{D} = (\mathbf{X}_1 \vdots \mathbf{X}_2 \vdots ... \vdots \mathbf{X}_n)$ je *dátová matica (matica dát)* typu $p \times n$.

Veta 6.8: Nech $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n$ je náhodný výber z $p-$rozmerného rozdelenia so strednou hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a kovariančnou maticou $\mathbf{\Sigma}$. Potom

(i) $\overline{\mathbf{X}}$ je nestranný odhad $\boldsymbol{\mu}$;

(ii) $cov(\overline{\mathbf{X}}) = \frac{1}{n}\mathbf{\Sigma}$;

(iii) $\mathbf{S}$ je nestranný odhad $\mathbf{\Sigma}$.

Dôkaz: (i) $\mathcal{E}(\overline{\mathbf{X}}) = \mathcal{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}(\mathbf{X}_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$;

(ii) $cov(\overline{\mathbf{X}}) = \mathcal{E}\left((\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu})'\right) =$

$$= \mathcal{E}\left(\frac{1}{n}(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu} + ... + \mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu})\frac{1}{n}(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu} + \mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu} + ... + \mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu})'\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathcal{E}\left((\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu})' + (\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu})' + ... + (\mathbf{X}_n-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_n-\boldsymbol{\mu})'\right) =$$

(lebo $\mathcal{E}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_j-\boldsymbol{\mu})' = \mathbf{0}$ pre $i \neq j$)

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})' = \frac{1}{n^2}(n\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma}.$$

(iii) $\mathcal{E}\left((n-1)\mathbf{S}\right) = \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i-\overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i-\overline{\mathbf{X}})'\right) = \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu}-(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}))(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu}-(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}))'\right) =$

$$= \mathcal{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})' - \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})' - \sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})' + n(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})'\right\} =$$

$$= \mathcal{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})' - n(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})' - n(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})' + n(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})'\right\} =$$

(lebo $\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu}) = n(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})$)

$$= \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})'\right) - n\mathcal{E}\left((\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})'\right) = n\boldsymbol{\Sigma} - n\; cov(\overline{\mathbf{X}}) = (n-1)\boldsymbol{\Sigma}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Poznámka 6.9: Z Vety 6.8 vyplýva, že $\mathcal{E}\{\mathbf{S}\}_{i,j} = \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{i,j}$

Nech $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Z}_1\end{pmatrix}, ..., \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix}\mathbf{Y}_n\\ \mathbf{Z}_n\end{pmatrix}$, kde $\mathbf{Y}_i \in \mathcal{R}^k$, $\mathbf{Z}_i \in \mathcal{R}^{p-k}$, $i = 1, 2, ..., n$, je náhodný výber z $p-$rozmerného rozdelenia so strednou hodnotou $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}}\\ \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Z}}\end{pmatrix}$, pričom $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}} \in \mathcal{R}^k$, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Z}} \in \mathcal{R}^{p-k}$ a kovariančnou maticou $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y},\mathbf{Y}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z},\mathbf{Y}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z},\mathbf{Z}}\end{pmatrix}$, kde $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y},\mathbf{Y}}$ je $k \times k$ matica, $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}}$ je $k \times (p-k)$ matica, $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z},\mathbf{Y}}$ je $(p-k) \times k$ matica a $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z},\mathbf{Z}}$ je $(p-k) \times (p-k)$ matica.

Úplne rovnako rozdeľme výberovú kovariančnú maticu $\mathbf{S} = \begin{pmatrix}\mathbf{S}_{\mathbf{Y},\mathbf{Y}} & \mathbf{S}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}}\\ \mathbf{S}_{\mathbf{Z},\mathbf{Y}} & \mathbf{S}_{\mathbf{Z},\mathbf{Z}}\end{pmatrix}$ tak, že $\mathbf{S}_{\mathbf{Y},\mathbf{Y}}$ je $k \times k$ matica, $\mathbf{S}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}}$ je $k \times (p-k)$ matica, $\mathbf{S}_{\mathbf{Z},\mathbf{Y}}$ je $(p-k) \times k$ matica a $\mathbf{S}_{\mathbf{Z},\mathbf{Z}}$ je $(p-k) \times (p-k)$ matica a tiež výberovú korelačnú maticu $\mathbf{R} = \begin{pmatrix}\mathbf{R}_{\mathbf{Y},\mathbf{Y}} & \mathbf{R}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}}\\ \mathbf{R}_{\mathbf{Z},\mathbf{Y}} & \mathbf{R}_{\mathbf{Z},\mathbf{Z}}\end{pmatrix}$ tak, že $\mathbf{R}_{\mathbf{Y},\mathbf{Y}}$ je $k \times k$ matica, $\mathbf{R}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}}$ je $k \times (p-k)$ matica, $\mathbf{R}_{\mathbf{Z},\mathbf{Y}}$ je $(p-k) \times k$ matica a $\mathbf{R}_{\mathbf{Z},\mathbf{Z}}$ je $(p-k) \times (p-k)$ matica.

Maticu $\mathbf{S}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}}$ nazývame *výberová kovariančná matica náhodných výberov* $\mathbf{Y}_1, ..., \mathbf{Y}_n$ a $\mathbf{Z}_1, ..., \mathbf{Z}_n$. Platí

$$\mathbf{S}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{Y}_i-\overline{\mathbf{Y}})(\mathbf{Z}_i-\overline{\mathbf{Z}})'$$

a podľa Vety 6.8 (iii) je $\mathcal{E}(\mathbf{S}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}}) = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y},\mathbf{Z}}$.

Definícia 6.10: Ak $\begin{pmatrix}Y_1\\ \mathbf{X}_1\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}Y_n\\ \mathbf{X}_n\end{pmatrix}$, kde $\mathbf{Y}_i \in \mathcal{R}$, $\mathbf{X}_i \in \mathcal{R}^p$, $i = 1, 2, ..., n$, je náhodný výber z $(p+1)-$rozmerného rozdelenia s regulárnou výberovou korelačnou maticou $\mathbf{R}_{\mathbf{X},\mathbf{X}}$, tak *výberový koeficient mnohnásobnej korelácie* $r_{Y,\mathbf{X}}$ je definovaný ako také nezáporné číslo, pre ktoré platí

$$r_{Y,\mathbf{X}}^2 = \mathbf{R}_{Y,\mathbf{X}}\mathbf{R}_{\mathbf{X},\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{X},Y}.$$

Poznámka 6.11: Výberový koeficient mnohnásobnej korelácie $r_{Y,\mathbf{X}}$ je akýsi výberový "protajšok" teoretického koeficientu mnohonásobnej korelácie $\varrho_{Y,\mathbf{X}}$ (pozri Vetu 4.7 (i),(iii)).

Veta 6.12: Nech $\begin{pmatrix} Y_1 \\ \mathbf{X}_1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} Y_n \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}$, je náhodný výber z $(p+1)-$rozmerného regulárneho normálneho rozdelenia s koeficientom mnohonásobnej korelácie $\varrho_{Y,\mathbf{X}} = 0$. Ak $n > p+1$, tak štatistika

$$F = \frac{n-p-1}{p} \frac{r^2_{Y,\mathbf{X}}}{1 - r^2_{Y,\mathbf{X}}} \sim F_{p,n-p-1}.$$

Dôkaz: Pomcou vhodného LRM, pozri Anděl, J., *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985, str. 125.

Test hypotézy

$$H_0: \ \varrho_{Y,\mathbf{X}} = 0 \qquad \asymp \qquad H_1: \ \varrho_{Y,\mathbf{X}} \neq 0 \tag{57}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky (z Vety 6.12)

$$F_0 = \frac{n-p-1}{p} \frac{r^2_{Y,\mathbf{X}}}{1 - r^2_{Y,\mathbf{X}}} \sim F_{p,n-p-1} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{array}{lcll} \text{Ak} \quad F_0 & \geq & F_{p,n-p-1}(1-\alpha) & \Longrightarrow H_0 \ \text{zamietame,} \\ \text{ak} \quad F_0 & < & F_{p,n-p-1}(1-\alpha) & \Longrightarrow H_0 \ \text{nezamietame,} \end{array}$$

Test má hladinu významnosti rovnú α.

Definícia 6.13: Ak $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \\ \mathbf{X}_1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} Y_n \\ Z_n \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}$, kde $Y_i \in \mathcal{R}$, $Z_i \in \mathcal{R}$, $\mathbf{X}_i \in \mathcal{R}^p$, $i = 1, 2, ..., n$, je náhodný výber z $(p+2)-$rozmerného rozdelenia s regulárnou výberovou korelačnou maticou

$$\mathbf{R}_{\left(\begin{smallmatrix} Y \\ Z \\ \mathbf{X} \end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} 1 & r_{Y,Z} & \mathbf{R}_{Y,\mathbf{X}} \\ r_{Z,Y} & 1 & \mathbf{R}_{Z,\mathbf{X}} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{X},Y} & \mathbf{R}_{\mathbf{X},Z} & \mathbf{R}_{\mathbf{X},\mathbf{X}} \end{pmatrix},$$

tak *výberový koeficient parciálnej korelácie (výberový parciálny korelačný koeficient)* je

$$r_{Y,Z.\mathbf{X}} = \frac{r_{Y,Z} - \mathbf{R}_{Y,\mathbf{X}} \mathbf{R}^{-1}_{\mathbf{X},\mathbf{X}} \mathbf{R}_{\mathbf{X},Z}}{\sqrt{(1 - r^2_{Y,\mathbf{X}})(1 - r^2_{Z,\mathbf{X}})}},$$

kde $r^2_{Y,\mathbf{X}} = \mathbf{R}_{Y,\mathbf{X}} \mathbf{R}^{-1}_{\mathbf{X},\mathbf{X}} \mathbf{R}_{\mathbf{X},Y}$, $r^2_{Z,\mathbf{X}} = \mathbf{R}_{Z,\mathbf{X}} \mathbf{R}^{-1}_{\mathbf{X},\mathbf{X}} \mathbf{R}_{\mathbf{X},Z}$, pokiaľ menovateľ nie je rový nule.

Poznámka 6.14: Výberový koeficient parciálnej korelácie $r_{Y,Z,\mathbf{X}}$ je akýsi výberový "protajšok" teoretického parciálneho korelačného koeficientu $\varrho_{Y,Z.\mathbf{X}}$ (pozri Vetu 4.12).

Veta 6.15: Nech $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Z_1 \\ \mathbf{X}_1 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} Y_n \\ Z_n \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}$ je náhodný výber z $(p+2)-$rozmerného regulárneho normálneho rozdelenia, ktoré má parciálny korelačný koeficient $\varrho_{Y,Z.\mathbf{X}} = 0$. Ak $n > p+2$, tak štatistika

$$T = \frac{r_{Y,Z.\mathbf{X}}}{\sqrt{1 - r^2_{Y,Z.\mathbf{X}}}} \sqrt{n-p-2} \sim t_{n-p-2}.$$

Dôkaz: Pomcou vhodného LRM, pozri Anděl, J., *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1985, str. 128.

Test hypotézy

$$H_0: \ \varrho_{Y,Z.\mathbf{X}} = 0 \qquad \lessgtr \qquad H_1: \ \varrho_{Y,Z.\mathbf{X}} \neq 0 \tag{58}$$

realizujeme pomocou testovacej štatistiky (z Vety 6.15)

$$T_0 = \frac{r_{Y,Z.\mathbf{X}}}{\sqrt{1 - r^2_{Y,Z.\mathbf{X}}}} \sqrt{n-p-2} \quad \sim t_{n-p-2} \quad \text{(za platnosti } H_0\text{)}.$$

$$\begin{array}{lccl} \text{Ak} & |T_0| & \geq & t_{n-p-2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \text{ zamietame,} \\ \text{ak} & |T_0| & < & t_{n-p-2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) & \Longrightarrow H_0 \text{ nezamietame,} \end{array}$$

Test má hladinu významnosti rovnú α.