1 Aukce

Představte si, že vlastní starý obraz nebo pozemek neznámé hodnoty. Chcete jej prodat co možná nejrychleji a nejsnáze, ale také chcete dostat co možná nejvíce peněz. Když předmět nabídnete za nějakou cenu (jako jsou nabízeny věci v supermarketech apod.), tak se vám může snadno stát, že cenu přestřelíte a nikdo o onen předmět nebude mít zájem. Nebo naopak, cena bude příliš nízká a vy nevyděláte zdaleka tolik, kolik byste mohli. Zkrátka—jaký je optimální způsob prodeje?

Tuhle otázku lze studovat i z pohledu celé společnosti, nejen vlastníka předmětu. Jaký způsob prodeje je efektivní, tedy zaručuje, že předmět získá ten, co si ho nejvíce cení?

Jedním z potenciálních kandidátů jsou aukce. Budeme se zabývat zejména situacemi, kdy existuje jediný předmět, který jeho vlastník chce prodat, s cílem maximalizace svého zisku. Existují dva základní typy aukcí podle toho, jaká je hodnota daného předmětu pro hráče. Začneme s analýzou situace, ve které je každý hráč plně informován o tom, jakou má pro něj předmět hodnotu a ta nezávisí na tom, jak si jej cení ostatní hráči. Druhým typem aukcí, kdy hráč nezná přesně hodnotu předmětu a ta navíc závisí na hodnotě předmětu pro ostatní hráče, se budeme zabývat později.

1.1 Aukce s nezávislými hodnotami

Budeme předpokládat, že existují různí zájemci o tento předmět (alespoň 3), jejichž užitek závisí pouze na vlastnostech daného předmětu, nikoliv toho, jak si jej cení ostatní.[1] Předpokládejme, že jediné, co hráči pro získání předmětu mohou udělat je podat nabídku ke koupi (*bid*), což je určitá částka, tedy nezáporné reálné číslo.

1.1.1 Symetrický model

Pro chování hráčů je klíčové, kolik toho vědí o hodnotě předmětu pro ostatní hráče, pro sebe a o postupu, kterým je aukce vyhodnocena, tedy kdo předmět získá a kolik zaplatí. V tzv. standardních aukcích, které budeme primárně studovat, předmět získá vždy ten hráč, který podá nejvyšší nabídku. Dále budeme předpokládat, že každý hráč zná hodnotu předmětu pro sebe sama. Posledním předpokladem je, že tato hodnota X_i je náhodná proměnná rozdělená nezávisle na hodnotách předmětu pro ostatní hráče. Její distribuční funkce je F, které odpovídá spojitá hustota f na množině $[0, w]$. Lze uvažovat i $w \to \infty$, za dodatečného předpokladu $E[X_i] < \infty$. Všimněte si, že tedy pravděpodobnostní rozdělení hodnot je identické pro všechny hráče. Tato skutečnost, i distribuční funkce F jsou všeobecně známá fakta.

Definice 1.1.1 Aukce s nejvyšší cenu *(first price auction) je standardní aukce, ve které vydražitel získá předmět za cenu uvedenou ve své nabídce, tedy za nejvyšší cenu.* Aukce s druhou nejvyšší cenou *je standardní aukce, při které vydražitel platí druhou nejvyšší cenu.*[2]

Aukce s nejvyšší cenou odpovídá také tzv. holandské aukci, tedy aukci, při které je vyvolávací cena stanovena velmi vysoko a pomale klesá. Každý má možnost aukci kdykoliv zastavit, přičemž předmět získá za aktuální cenu. V anglické aukci cena naopak roste z velmi nízkých hodnot. My pro zjednodušení budeme definovat abstrahovat od konkrétních detailů a budeme definovat aukci jako hru v normální formě. Počet hráčů hry je počet dražitelů (způsob dražby je brán jako daný z vnějšku), jejich strategiemi jsou funkce z množiny možných hodnot (tedy $[0, w]$) do množiny nezáporných reálných čísel. Tyto strategie značíme β_i. Užitek daného hráče je $x_i - p_i$, kde x_i je hodnota předmětu X_i pokud je hráč i vítězem aukce a nebo 0. Částku, kterou hráč musí zaplatit označujeme p_i. Tato částka může být kladná i když daný hráč předmět nevyhrál, například může jít o náklady spojené s účasti v aukci, vstupní poplatky atd.

Našim cílem je pro danou aukci najít Nashovu rovnováhu v daných strategiích. Všimněte si, že množina strategií je nespočetná, protože strategiemi jsou funkce z intervalu do podmnožiny reálných čísel. Vyřešit aukci s druhou nejvyšší cenou je překvapivě výrazně snadnější než aukci s nejvyšší cenou a proto jí začneme.

[1] Jde o tzv. *private value auctions*. Druhý typ aukcí se jmenuje *auctions with interdependent values*.

[2] Obě tyto aukce se běžně používají, zejména v tzv. obálkových metodách (*seal-bid*). Teoreticky možné jsou i další typy, jako například aukce s třetí nejvyšší cenou a „všichni platí“ aukce, které se nepoužívají a které probereme jen jako zajímavé kuriozity.

1.1.2 Aukce s druhou nejvyšší cenou

U aukcí s druhou nejvyšší cenou je výherní funkce každého hráče s hodnotou x

$$u_i(x) = \begin{cases} x_i - \max_{j\neq i} b_i & \text{pro } b_i > \max_{j\neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j\neq i} b_i \end{cases} \tag{1}$$

Pokud dojde ke shodně nejvyšších nabídek, pak budeme předpokládat, že předmět je rozdělen náhodně mezi hráče s nejvyšší nabídkou.

Věta 1.1.2 *Strategie $\beta^{II}(x) = x$ je slabě dominantní*[3] *při aukci s druhou nejvyšší cenou.*

Důkaz 1.1.3 *Musíme ukázat, že bez ohledu na to, co hrají ostatní hráči, si je hrát $\beta^{II}(x) = x$ optimální strategie pro libovolného hráče. Vzhledem k symetrii stačí řešit např. prvního hráče. Označme $p_1 = \max_{j\neq 1} b_j$ nejvyšší nabídku ostatních hráčů. Když první hráč hraje x_1, vyhraje pokud $x_1 > p_1$ a nevydraží jej pokud $x_1 < p_1$. Pokud by $x_1 = p_1$, je hráči jedno, jestli vyhraje nebo prohraje, protože v obou případech je jeho užitek 0. Potřebujeme ověřit, že hrát z_1 místo x_1 není lepší než hrát x_1 za žádných okolností. Vyřešíme případ $x_1 > z_1$, druhý se řeší analogicky. Pokud $x_1 > z_1 \geq p_1$, pak první hráč vyhraje stejnou částku a proto si nepolepší. Pokud $p_1 > x_1 > z_1$, pak první hráč prohraje v každém případě. Pokud $x_1 > p_1 > z_1$, pak by první hráč prohrál, zatímco při hře x_1 by vyhrál kladnou částku. Takže není nikdy lepší hrát méně než x_1.*

Příklad 1.1.4 *Spočtěte očekávanou platbu hráče $m^{II}(x)$, pro nějž předmět má hodnotu x, pokud všichni hrají rovnovážnou strategii.*

Řešení 1.1.5 *Formálně jde o součin pravděpodobnosti výhry a výše platby v případě výhry. Daný hráč vyhraje, pokud hodnota předmětu pro všechny ostatní hráče je nižší. Tedy aby maximální hodnota předmětu $N-1$ hráčů byla nejvýše x. Pravděpodobnost, že hodnota předmětu pro jednoho hráče menší než x, je $F(x)$. Protože hodnoty předmětu jsou nezávislé, pravděpodobnost, že všechny $N-1$ náhodné veličiny jsou menší než x je $F^{N-1}(x)$. Označme Y_1 náhodnou veličinu distribuovanou podle $F^{n-1}(x)$. Označíme očekávanou střední hodnotu $E[Y_1|Y_1 < x]$. Pak*

$$m^{II}(x) = F^{N-1}(x) \times E[Y_1|Y_1 < x].$$

Příklad 1.1.6 *(Lehký) Spočtěte hodnotu předchozího výrazu, pokud je hodnota rozdělená rovnoměrně na intervalu* $[0, 1]$

1.1.3 Aukce s nejvyšší cenou

V případě aukce s nejvyšší cenou je situace složitější. Hráč, který vyhraje, má motivaci nabídnout co možná nejméně tak, aby stále vyhrál. Optimální strategií je tedy odhadnout, kolik vsadí ostatní hráči a vsadit tolik.

Užitek hráče s hodnotou x je

$$u_i(x) = \begin{cases} x_i - b_i & \text{pro } b_i > \max_{j\neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j\neq i} b_i \end{cases} \tag{2}$$

Omezíme se na analýzu symetrických rovnováh, tedy ty rovnováhy, ve kterých všichni hrají stejnou strategii $\beta(x)$. Pro žádného hráče není optimální nabízet více než $\beta(\omega)$. Podobně platí, že hráč s hodnotou 0 nepodá kladnou nabídku, protože v případě výhry by prohrál, a tedy $\beta(0) = 0$.

Předpokládejme, že všichni hráči používají strategii β, která je symetrická, rostoucí a diferencovatelná, až na prvního hráče. Musíme ověřit, i pro prvního hráče je optimální zvoli strategii β. Nechť b je optimální nabídka prvního hráče pro hodnotu předmětu x. První hráč vyhraje pokud je jeho nabídka větší než nabídka ostatních hráčů, tedy $b > \max_{j\neq 1} \beta(X_i)$. Protože β je rostoucí, platí, že $\max_{j\neq 1} \beta(X_i) = \beta(\max_{j\neq 1} X_i)$. Označme $Y_1 = \max_{j\neq 1} X_i$ a $G(y) = F^n(y)$ její distribuční funkci. První hráč vyhraje jen tehdy, když $b > \beta(Y_1)$, tedy když $Y_1 < \beta^{-1}(b)$ a jeho výhra je v tom případě $x - b$. Očekávaná výhra prvního hráče je tedy

$$G(\beta^{-1}(b)) \times (x - b).$$

[3]Slabě dominantní strategie daného hráče je taková jeho strategie, že neexistuje kombinace strategií ostatních hráčů taková, že existuje jiná strategie tohoto hráče, která vede k vyššímu užitku. Jinak řečeno, neexistuje situace, při které by daný hráč hrál raději něco jiného. Lze definovat i striktně dominantní strategii jako takovou, která je vždy striktně lepší než všechny ostatní strategie.

Strategie prvního hráče musí být taková, že maximalizuje očekávanou hodnotu výhry. Budeme uvažovat interní řešení maximalizačního problému, ve kterém musí být tedy derivace očekávané střední hodnoty výhry nulová.

$$\frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))}(x-b) - G(\beta^{-1}(b)) = 0$$

Jakmile máme podmínky prvního řádu, můžeme použít podmínku symetrické rovnováhy $b = \beta(x)$:

$$\frac{g(x)}{\beta'(x)}(x-b) - G(x) = 0$$

To lze upravit na

$$\frac{d}{dx}\left(G(x)\beta(x)\right) = xg(x)$$

Integrací dostaneme

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x yg(y)dy,$$

s využitím počáteční podmínek $\beta(0) = 0$. Výraz, který jsme dostali je očekávaná hodnota největší sázky ostatních hráčů za podmínky, že je menší než x, tedy $E[Y_1|Y_1 < x]$. Lze ukázat, že platí

$$\frac{1}{G(x)}\int_0^x yg(y)dy = x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)}dy$$

Protože druhý výraz na pravé straně rovnice je kladný, každý hráč sází méně, než kolik je jeho hodnota x.

1.1.4 Výnos aukce

Zatím jsme se na aukce dívali z pohledu hráčů, kteří kupují daný předmět. Zkusme se teď podívat na výnos různých typů aukcí z pohledu organizátora aukce—vlastníka předmětu. V principu nás zajímá, zda je některý typ aukce pro něj výhodnější, tedy vede k vyššímu výnosu. Dá se ukázat, že odpověď je negativní, neboť všechny standardní aukce vedou ke stejnému výnosu.[4]

Věta 1.1.7 *Předpokládejme, že hodnota předmětu je identicky a nezávisle distribuovaná a všichni hráči jsou rizikově neutrální.*[5] *V každém symetrické a rostoucí rovnováze, ve které hráč s nulovou hodnotou platí v průměru nula, je výnos každé standardní aukce pro vlastníka předmětu stejný.*

Důkaz 1.1.8 *Označme rovnovážnou strategii $\beta(x)$ a $m^A(x)$ průměrnou platbu. Předpoklad věty je, že $m^A(x) = 0$. Protože β tvoří rovnováhu, musí pro každého hráče, tedy třeba i hráče 1 být optimální zvolit strategii β, když ostatní hráči volí rovněž β. Ve standardní aukci předmět dostane ten hráč, který zadal nejvyšší nabídku. Uvažme strategii prvního hráče, při které vsadí $\beta(z)$ místo*[6] *rovnovážné strategie $\beta(x)$. Očekávaná výhra je*

$$\Pi^A(z,x) = G(z)x - m^A(z),$$

kde $G(z)$ je distribuce nejvyšší hodnoty ostatních hráčů, tedy $G(z) = F(z)^{N-1}$.

Všimněte si, že očekávaná platba nezávisí na vlastní hodnotě x, ale na nabídkách ostatních hráčů, a tedy na hodnotách ostatních hráčů. V rovnováze musí platit podmínky prvniho řádů

$$\frac{\partial}{\partial z}\Pi^A(z,x) = g(z)x - \frac{d}{dz}m^A(z) = 0$$

V rovnováze musí platit $z = x$, a to pro všechna x:

$$\frac{d}{dx}m^A(x) = g(y)y$$

[4] Stále uvažujeme tzv. *private value auctions.*

[5] To znamená, že pokud mají ohodnotit strategii, ve které je výhra náhodnou veličinou, tak používají střední hodnotu výhry.

[6] Aby byl důkaz kompletní, musíme dále ověřit, že není výhodné vsadit hodnoty, kterých $\beta(\cdot)$ nedosahuje. Protože uvažujeme spojité strategie β, $\beta(0) = 0$, museli bychom ověřit, že není výhodné vsadit $t > \beta(\omega)$. To je ovšem triviální—vždy je (neostře) výhodnější vsadit $\beta(\omega)$ než něco vyššího, protože ostatní hráči více nevsadí.

Integrací od 0 *do* x *dostaneme*

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy = \int_0^x yg(y)dy = G(x) \times E[Y_1|E_1 < x],$$

protože $m^A(0) = 0$. *Výraz na pravé straně nezávisí na typu aukce, a očekávané platby všech hráčů na typu aukce tak také nezávisí.*

Příklad 1.1.9 *(Lehký) Jaká je očekávaná platba hráče a očekávaný příjem vlastníka předmětu, při rovnoměrném rozdělení ($F(x) = x$).*

Řešení 1.1.10 *Ukažte, že* $m^A(x) = \frac{N-1}{N}x^N$.

Příklad 1.1.11 *(Těžký) Vyřešte aukci, ve které každý hráč musí zaplatit každou svoji nabídku, bez ohledu na to, zda předmět získá. Nápověda: použijte předchozí větu.*

Příklad 1.1.12 *(Těžký) Vyřešte aukci, ve které vyhrávající hráč zaplatí třetí nejvyšší nabídku.*

1.2 Aukce se společnými hodnotami

V řadě situací hodnota předmětu pro daného hráče není předem známa. Například u ropných polí existují pouze odhady množství ropy, které lze vytěžit. Navíc mnohdy o hodnotě předmětu mají relevantní informace i ostatní hráči, nebo hodnota pro prvního hráče přímo závisí na hodnotě pro ostatní hráče. Například hodnota uměleckého předmětu nemusí záviset jen na jeho vzhledu (estetických aspektech), ale na možnosti jej případně znovu prodat, tedy na ochotě ostatních hráčů jej koupit. U ropných polí mohou ostatní hráči mít relevantní informace o pravděpodobném množství ropy apod.

Následující teorie umožňuje studovat tyto typy aukcí. Umožňuje popsat situace, kdy hodnota předmětu je pro všechny stejná, ale každý o ní má jen neúplné informace. Ale také může popisovat situace, kdy hodnoty předmětu pro různé pro různé hráče, ale informace, kterou má druhý hráč je potenciálně relevantní pro hodnotu předmětu pro prvního hráče.

Průběh aukce samozřejmě záleží na tom, jakým způsobem se daný hráč může dozvědět o informacích, které mají ostatní hráči. To záleží na typu aukce. Pro aukce využívající zalepených obálek (*seal-bid auctions*) se vítězný hráč dozví nanejvýš to, zda vyhrál (a tedy jeho nabídka byla nejvyšší) a případně jaká byla druhá (třetí,...) nejvyšší nabídka podle ceny, kterou musí zaplatit. Tuto informaci se samozřejmě dozví ale až poté, co podá vlastní nabídku a aukce skončí. I přesto může jít o relevantní informaci, protože jí lze přizpůsobit způsob podávání nabídky.

Uvažme tento příklad. Ropné pole má hodnotu v pro všechny hráče, ale každý hráč se dozví $v + \varepsilon$, kde ε je normálně rozdělená náhodná veličina, se střední hodnotou 0. V rovnováze, ve které je nabídka rostoucí funkcí odhadu hodnoty (tedy $v+\varepsilon$), může snadno nastat situace, že vítěz aukce je ten „nejoptimističtější“ hráč, a může vsadit více, než kolik je hodnota předmětu. Tato situace se označuje za tzv. prokletí vítěze (*winner's curse*) a je empiricky běžně pozorovatelná.[7]

Náš přístup je teoretický a do značné míry „idealistický“, protože studujeme dokonale racionální hráče. Není tedy možné, aby hráči systematicky prohrávali. Racionální hráči musejí přizpůsobit vsázenou částku tomu, co by jejich případné vítězství říkalo o skutečné hodnotě předmětu. Tedy tomu, že pokud je jejich sázka nejvyšší, je nejvyšší i jejich vlastní informace o hodnotě předmětu. Tuto informaci je potřeba využít pro tvorbu odhadu o skutečné cenně předmětu.

1.2.1 Symetrický model

Označme X_i náhodnou proměnou, která může nabývat hodnot na intervalu $[0, \omega_i]$ a kterou budeme nazývat signál i-tého hráče. Označme V_i skutečnou hodnotu předmětu pro i-tého hráče. Označme očekávanou hodnotu předmětu pro i-tého hráče

$$v_i(x_1, \ldots, x_n) = E[V_i|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n],$$

v závislosti na signálu všech hráčů. Označme $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Tato struktura zahrnuje jak situaci z předchozí kapitoly ($v_i(X) = X_i$), tak aukce, ve kterých má dražený předmět pro všechny

[7] O prokletí vítěze se například hovořilo v souvislosti s prodejem licencí na frekvenční spektrum tzv. třetí generace mobilních služeb. V laboratorních experimentech lze prokletí vítěze rovněž demonstrovat velmi snadno.

stejnou hodnotu, navíc přesně určenou agregovanou informací všech hráč, $V = v(X_1, \ldots, X_n)$. Je obvyklé předpokládat, že informace každého hráče je nestranná (*unbiased*), tedy že jeho signál vede k očekávání rovným skutečné hodnotě předmětu $E[X_1|V = v] = v$.

V případě, kdy informace X_i dostupná různých hráčům je nekorelovaná (je nezávislá), je sdružená hustota X součinem hustot $f_i(X_i)$. Pokud jsou ale informace korelované, tak tomu tak není—realizace vysoké hodnoty proměnné X_i ovlivňuje pravděpodobnost, že i X_j je vysoká či nízká. Přesněji budeme požadovat, aby náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ byly přidružené (*affiliated*).[8] Přidruženost má řadu důsledků. Označme $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ náhodnou veličinu rovnou nejvyšší, druhé nejvyšší, ..., nejnižší hodnotě z $X_2, \ldots, X_n$. Pokud je γ rostoucí funkce, pak pro přidružené náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ a každé $x' > x$ platí

$$E[\gamma(Y_1)|X_1 = x'] \geq E[\gamma(Y_1)|X_1 = x].$$

Tedy vyšší hodnota jedné proměnné znamená, že očekávaná hodnota nejvyšší hodnoty je vyšší.

Dále budeme předpokládat určitou symetrii v očekávání a v informacích hráčů. Například, pokud by všichni hráči měli stejne relevantní (přesné) informace, pak je pro očekávání prvního hráče nepodstatné, zda druhý hráč očekává x a třetí x' a nebo naopak. Formálně budeme předpokládat, že $v_i(X) = u(X_i, X_{-i})$, kde u je tatáž funkce pro všechny hráče, která je symetrická k posledním $n-1$ složkám. To znamená, že hráč i může přisuzovat větší hodnotu vlastní informaci, ale všechny informace ostatních hráčů považuje za stejně přesné. Budeme rovněž předpokládat, že hustota f na množině $[0, \omega]^n$ je symetrická a signály X_i jsou přidružené.

Definujme funkci

$$v(x, y) = E[V_1|X_1 = x, Y_1 = y]$$

očekávání hodnoty předmětu pro hráče se signálem x za předpokladu, že nejvyšší signál ostatních hráčů je y. Normalizujeme problém tak, že předpokládáme $u(0) = 0, v(0, 0)$.

Podobně jako v předchozí části budeme studovat aukce s první a druhou nejvyšší cenou. Aukce se zalepenými obálkami a vyvolávací aukce s rostoucí cenou se v principu liší, protože při veřejné aukci má hráč možnost získat přesnější aukci tím, že pozoruje kdy ostatní hráči končí s dražením. V nejjednodušší formě modelu anglické aukce předpokládáme, že každý hráč dává najevo, zda má o předmět zájem. Při rostoucí ceně se tak každý hráč dozví, kdy ostatní hráči přestali mít zájem. Tohle například může být realizovatelné pomoci zvednuté číselné tabulky. Jakmile hráč přestane mít zájem, již se do aukce nesmí vrátit.

Případ aukce se zalepenými obálkami a druhou nejvyšší cenou je opět nejjednodušší, a proto jí začneme.

1.2.2 Aukce s druhou nejvyšší cenou a zalepenými obálkami

V symetrické rovnováze aukce s druhou nejvyšší cenou je rovnovážnou strategií pro každého hráče vsadit očekávanou hodnotu předmětu za předpokladu, že nejvyšší signál ostatních hráčů je stejný jako signál daného hráče.

Věta 1.2.1 *V rovnováze platí $\beta^{II}(x) = v(x, x)$.*

Důkaz 1.2.2 *Předpokládejme, že hráči $j, j \geq 2$ hrají strategii β^{II}. První hráč se signálem x a nabídkou b očekává výhru*

$$\Pi(b, x) = \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x, y) - \beta(y))g(y|x)dy,$$

[8] Formální definice je tato: náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ rozdělené na intervalu $\mathcal{X} \subset \Re^n$, popsané hustotou f, jsou přidružené, pokud pro každé $x', x'' \in X$ platí

$$f(x' \vee x'')f(x' \wedge x'') \geq f(x')f(x''),$$
$$x' \vee x'' = (\max(x'_1, x''_1), \ldots, \max(x'_n, x''_n))$$
$$x' \wedge x'' = (\min(x'_1, x''_1), \ldots, \min(x'_n, x''_n))$$

V takovém případě rovněž říkáme, že hustota f je přidružená. Lze ukázat, že pokud je f je na $\mathcal{X}$ všude kladná a dvojitě diferencovatelná, pak f je přidružená právě tehdy, když

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \ln f \geq 0$$

.

kde $g(\cdot|x)$ je hustota Y_1 podmíněné na $X_1 = x$. Strategie ostatních hráčů je $\beta(y) = v(y, y)$. Z přidruženosti signálů vyplývá, že $v(x, y) - v(y, y)$ je rostoucí v x. Proto pro $x < y$ je výraz v integrálu kladný, zatímco pro $x > y$ je záporný. Celý integrál je tedy maximalizovaný pro $\beta^{-1}(b) = x$ a tedy optimální strategie prvního hráče je $\beta^{II}(x) = v(x, x)$.

Na rozdíl od situace s vlastní hodnotou z první části textu, strategie β^{II} není obecně slabě dominantní. Symetrická rovnováha je to ale jediná mezi rostoucími strategiemi.

Příklad 1.2.3 *Předpokládejte 3 hráče, společnou hodnotu předmětu V rozdělenou rovnoměrně na intervalu $[0, 1]$. Signály hráčů jsou distribuovány rovnoměrně na intervalu $[0, 2v]$, kde v je realizace náhodné veličiny V. Spočtěte optimální strategii β^{II}.*

1.2.3 Anglická aukce

Budeme uvažovat následující zjednodušení anglické aukce. Každý hráč vidí, při jaké ceně „odpadli" ostatní hráči a také i kolik jich již nemá o předmět zájem, s rostoucí cenou. Strategii jednoho hráče tvoří $n-1$-tice $\beta = (\beta^n, \beta^{n-1}, \dots, \beta^2)$ funkcí $\beta^k : [0, 1] \times \Re_+^{n-k} \to \Re_+$, kde $1 < k \leq n$. Funkce $\beta^k(x, p_{k+1}, \dots, p_n)$ určuje cenu, při které daný hráč přestane mít o předmět zájem za předpokladu, že stále aktivních hráčů je k, jeho signál je x a ceny, při kterých $n-k$ hráčů odpadlo jsou $p_{k+1} \leq \cdot \leq p_n$.

Označme

$$\beta^n(x) = u(x, \dots, x) \tag{3}$$

strategii hráče se signálem x v situaci, kdy všichni hráči jsou aktivní. Protože u je spojitá a rostoucí funkce, totéž platí i o β. Řekněme, že je to n-tý hráč opustí aukci jako první, při ceně p_n. Protože $\beta^n(\cdot)$ je spojitá a rostoucí funkce, existuje jediné x_N takové, že $\beta^n(x_n) = p_n$. Pokud některý hráč opustí aukci při ceně p_n, definujme strategii ostatních hráčů

$$\beta^{n-1}(x, p_n) = u(x, \dots, x, x_n)$$

Takto pokračujme

$$\beta^k(x, p_{k+1}, \dots, p_n) = u(x, \dots, x, x_{k+1}, \dots, x_n), \tag{4}$$

kde $\beta^{k+1}(x_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n) = p_{k+1}$. Všimněte si, že strategie definujeme pro všechny možné ceny p_i, ne jen ty, které nastávají v rovnováze. Ukážeme, že takto definované strategie tvoří symetrickou rovnováhu.

Představme si, že aukci opustili hráči $k+1, \dots, n$ a podle toho, při kterých cenách se tak stalo si mohou zůstávající hráči odvodit jej signály $x_{k+1}, \dots, x_n$. Intuitivně, když první hráč má signál x, a ostatní hráči hrají β^k, tak pokud vyhraje při ceně p, ostatní ještě aktivní hráči by museli najednou odstoupit z aukce. Pak jejich signály musejí být takové, že $\beta^k(y, p_{k+1}, \dots, p_n) = p$ a očekávaná hodnota předmětu $u(x, y, \dots, y, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Má tedy smysl pokračovat pro něj až do té doby, do kdy cena předmětu nedosáhne hodnoty, při které by měl nulový zisk, kdyby předmět vyhrál. Formální důkaz následuje po formulaci věty.

Věta 1.2.4 *Strategie β definované rovnicemi (3) a (4) tvoří symetrickou rovnováhu anglické aukce.*

Důkaz 1.2.5 *Opět musíme uvážit, zda nějaký, a tedy například první, hráč má motivaci hrát strategii β za předpokladu, že ostatní hráči ji rovněž hrají. Označme jeho signál $X_1 = x$ a definujme náhodné veličiny $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ jako dříve. Označme $y_1, \dots, y_{n-1}$ realizované hodnoty těchto náhodných veličin. Rozlišíme dva případy podle toho, zda první hráč vyhraje a kdy ne. V prvním případě musí být $x > y_1$, a cena, kterou první hráč platí je tedy cena, při které hráč s druhým nejsilnějším signálem odstoupí z akce. Tou cenou musí být podle definice (4) právě $u(y_1, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Protože $x > y_1$, platí i*

$$u(x, y_1, y_2, \dots, y_n) > (y_1, y_1, y_2, \dots, y_n) > 0.$$

Protože první hráč vyhrává kladnou částku, kterou nastavením jiné ceny nemůže zvýšit, je pro něj výhodné také hrát β. V případě, že $x < y_1$, první hráč předmět nevyhraje. Pokud by v aukci chtěl zůstat, musel by zůstat alespoň do ceny $u(y_1, y_1, \dots, y_n)$, což by pro něj znamenalo ztrátu. Je pro něj optimální opět dodržovat strategii β.

Jakou roli hraje v definici strategie hustota f? Podrobný pohled napoví, že v případě, že cena je přesně určena signály hráčů, tedy u nezávisí na distribuci signálů, ale jen na jejich realizaci, pak žádnou. To má za důsledek, že i kdyby daný hráč znal všechny signály před hrou, pak by pro něj jeho současná strategie zůstala optimální. Takové situaci se říká, že strategie tvoří *ex-post* rovnováhu. Například rovnovážná strategie aukce s druhou nejvyšší cenou ex-post rovnováhu netvoří. Nikoliv proto, že by vítěz litoval ceny, kterou musí zaplatit (s tou nic udělat nemůže), ale protože že pro hráče s druhým nejsilnějším signálem by mohl existovat prostor pro navýšení nabídky, pokud by znal signály všech hráčů.

1.2.4 Aukce s nejvyšší cenou

Podobně jako v případě aukce s nezávislou (vlastní) hodnotou odvodíme diferenciální rovnici pro optimální strategii $\beta(x)$. Zisk hráče s hodnotou x nabízející z je

$$\begin{aligned} \Pi(z,x) &= \int_0^z (v(x,y)-\beta(z))g(y|x)dy &(5)\\ &= \int v(x,y)g(y|x)dy - \beta(z)G(z|x), &(6) \end{aligned}$$

kde $G(y|x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny Y_1 za podmínky $Y_1 < x$ a $g(y|x)$ je jí příslušející hustotou. Podmínky prvního řádu jsou

$$(v(x,z)-\beta(z))g(z|x) - \beta'(z)G(z,x) = 0.$$

V symetrické rovnováze musí platit $z = x$, takže

$$(v(x,x)-\beta(x))g(x|x) - \beta'(x)G(x,x) = 0,$$

což lze upravit

$$\beta'(x) = (v(x,x)-\beta(x))\frac{g(x|x)}{G(x|x)}$$

Podobně jako v první části i zde musíme zkontrolovat okrajové podmínky. Protože musí platit, že $v(x,x)-\beta(x) \geq 0$, z předpokladu $v(0,0) = 0$ vyplývá $\beta(0) = 0$, což je okrajová podmínka této diferenciální rovnice. Její řešení je

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x),$$

kde

$$L(y|x) = exp\left(-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt\right)$$

Příklad 1.2.6 *(Těžký) Odvoďte řešení předchozí diferenciální rovnice.*