Aukce

Jan Mysliveček

Přf Muni

3.října 2008

Aukce

- Jak optimálně prodat předmět o neznámé hodnotě?

Aukce

- Jak optimálně prodat předmět o neznámé hodnotě?
- Jediný předmět
- Jediný prodávající
- Mnoho zájemců
- Běžně používaný způsob prodeje (ropná pole, umělecké předměty)
- Mnoho druhů aukcí

Aukce

- Jak optimálně prodat předmět o neznámé hodnotě?
- Jediný předmět
- Jediný prodávající
- Mnoho zájemců
- Běžně používaný způsob prodeje (ropná pole, umělecké předměty)
- Mnoho druhů aukcí
- Jak „hrají“ racionální hráči?
- Jak se liší příjem (zisk) vlastníka aukce při různých aukcích?

Aukce s nezávislými hodnotami

- Hodnoty předmětu pro hráče jsou navzájem nezávislé

Aukce s nezávislými hodnotami

- Hodnoty předmětu pro hráče jsou navzájem nezávislé
- Každý hráč zná svoji hodnotu předmětu

Aukce s nezávislými hodnotami

- Hodnoty předmětu pro hráče jsou navzájem nezávislé
- Každý hráč zná svoji hodnotu předmětu
- Zná distribuci náhodné proměnné, jejíž realizace určuje hodnotu pro ostatní hráče

Aukce s nezávislými hodnotami

- Hodnoty předmětu pro hráče jsou navzájem nezávislé
- Každý hráč zná svoji hodnotu předmětu
- Zná distribuci náhodné proměnné, jejíž realizace určuje hodnotu pro ostatní hráče
- Každý hráč podá vlastní nabídku

Aukce s nezávislými hodnotami

- Hodnoty předmětu pro hráče jsou navzájem nezávislé
- Každý hráč zná svoji hodnotu předmětu
- Zná distribuci náhodné proměnné, jejíž realizace určuje hodnotu pro ostatní hráče
- Každý hráč podá vlastní nabídku

Aukce s nezávislými hodnotami

- Hodnoty předmětu pro hráče jsou navzájem nezávislé
- Každý hráč zná svoji hodnotu předmětu
- Zná distribuci náhodné proměnné, jejíž realizace určuje hodnotu pro ostatní hráče
- Každý hráč podá vlastní nabídku

Základní typy aukcí

- Standardní aukce: vítězem je hráč s nejvyšší nabídkou

Aukce s nezávislými hodnotami

- Hodnoty předmětu pro hráče jsou navzájem nezávislé
- Každý hráč zná svoji hodnotu předmětu
- Zná distribuci náhodné proměnné, jejíž realizace určuje hodnotu pro ostatní hráče
- Každý hráč podá vlastní nabídku

Základní typy aukcí

- Standardní aukce: vítězem je hráč s nejvyšší nabídkou
- Aukce s nejvyšší cenou: vítěz platí tolik, kolik on nabídl

Aukce s nezávislými hodnotami

- Hodnoty předmětu pro hráče jsou navzájem nezávislé
- Každý hráč zná svoji hodnotu předmětu
- Zná distribuci náhodné proměnné, jejíž realizace určuje hodnotu pro ostatní hráče
- Každý hráč podá vlastní nabídku

Základní typy aukcí

- Standardní aukce: vítězem je hráč s nejvyšší nabídkou
- Aukce s nejvyšší cenou: vítěz platí tolik, kolik on nabídl
- Aukce s druhou nejvyšší cenou: vítěz platí druhou nejvyšší nabídku

Aukce s nezávislými hodnotami

- Hodnoty předmětu pro hráče jsou navzájem nezávislé
- Každý hráč zná svoji hodnotu předmětu
- Zná distribuci náhodné proměnné, jejíž realizace určuje hodnotu pro ostatní hráče
- Každý hráč podá vlastní nabídku

Základní typy aukcí

- Standardní aukce: vítězem je hráč s nejvyšší nabídkou
- Aukce s nejvyšší cenou: vítěz platí tolik, kolik on nabídl
- Aukce s druhou nejvyšší cenou: vítěz platí druhou nejvyšší nabídku
- *All-pay* aukce: každý platí svoji nabídku

Aukce s druhou nejvyšší cenou

Obecné předpoklady

- n hráčů
- $F : [0, \omega] \to [0, 1]$ distribuční funkce hodnot předmětu, f hustota
- X_i náhodná veličina, x_i její realizace označující hodnotu předmětu
- Rizikově neutrální hráči (užitek je střední hodnota výhry)
- Hráči znají vlastní hodnotu (x_i) a distribuci F

Aukce s druhou nejvyšší cenou

Obecné předpoklady

- n hráčů
- $F : [0, \omega] \to [0, 1]$ distribuční funkce hodnot předmětu, f hustota
- X_i náhodná veličina, x_i její realizace označující hodnotu předmětu
- Rizikově neutrální hráči (užitek je střední hodnota výhry)
- Hráči znají vlastní hodnotu (x_i) a distribuci F

Specifické předpoklady a označení

- Nabídky jsou podávány současně, v zalepených obálkách
- Vítězem je hráč s nejvyšší nabídkou (loterie pokud více)
- Cena je rovna druhé nejvyšší nabídce
- Hledáme symetrické Nashovy rovnováhy s rostoucími strategiemi $\beta(x)$
- Označme $Y_1 = max_{j \neq i} X_j$ nejvyšší nabídku ostatních hráčů.
- Jak je Y_1 rozdělena?

Model

- Užitek hráče i s hodnotou x a nabídkou b_i

$$u_i(x) = \begin{cases} x - \max_{j \neq i} b_i & \text{pro } b_i > \max_{j \neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j \neq i} b_i \end{cases} \tag{1}$$

  kde b_i je nabídka i-tého hráče.
- Jaká je optimální strategie každého hráče?
- Pokud podává hráč i nejvyšší nabídku, pak je cena určena druhou nejvyšší nabídkou
- Dokažte, že strategie $\beta^{II}(x) = x$ je slabě dominantní

Model

- Užitek hráče i s hodnotou x a nabídkou b_i

$$u_i(x) = \begin{cases} x - \max_{j \neq i} b_i & \text{pro } b_i > \max_{j \neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j \neq i} b_i \end{cases} \qquad (1)$$

  kde b_i je nabídka i-tého hráče.
- Jaká je optimální strategie každého hráče?
- Pokud podává hráč i nejvyšší nabídku, pak je cena určena druhou nejvyšší nabídkou
- Dokažte, že strategie $\beta^{II}(x) = x$ je slabě dominantní
- Pro vítěze—nejde si polepšit?
- Pro prohrávajícího—nejde si polepšit?

Model

- Užitek hráče i s hodnotou x a nabídkou b_i

$$u_i(x) = \begin{cases} x - \max_{j\neq i} b_i & \text{pro } b_i > \max_{j\neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j\neq i} b_i \end{cases} \tag{1}$$

  kde b_i je nabídka i-tého hráče.
- Jaká je optimální strategie každého hráče?
- Pokud podává hráč i nejvyšší nabídku, pak je cena určena druhou nejvyšší nabídkou
- Dokažte, že strategie $\beta^{II}(x) = x$ je slabě dominantní
- Pro vítěze—nejde si polepšit?
- Pro prohrávajícího—nejde si polepšit?
- Spočtěte očekávaný příjem dražitele

Model

- Užitek hráče i s hodnotou x a nabídkou b_i

$$u_i(x) = \begin{cases} x - \max_{j \neq i} b_i & \text{pro } b_i > \max_{j \neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j \neq i} b_i \end{cases} \tag{1}$$

  kde b_i je nabídka i-tého hráče.
- Jaká je optimální strategie každého hráče?
- Pokud podává hráč i nejvyšší nabídku, pak je cena určena druhou nejvyšší nabídkou
- Dokažte, že strategie $\beta^{II}(x) = x$ je slabě dominantní
- Pro vítěze—nejde si polepšit?
- Pro prohrávajícího—nejde si polepšit?
- Spočtěte očekávaný příjem dražitele
- Očekávaná platba hráče s hodnotou x je

$$m^{II}(x) = F^{N-1}(x) \times E[Y_1 | Y_1 < x]$$

- Očekávaný příjem pak je $n \times E[m^{II}(x)]$

Aukce s nejvyšší cenou

- Užitek hráče i s hodnotou x a sázkou b_i je

$$u_i(x) = \begin{cases} x_{-} b_i & \text{pro } b_i > \max_{j \neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j \neq i} b_i \end{cases} \tag{2}$$

Aukce s nejvyšší cenou

- Užitek hráče i s hodnotou x a sázkou b_i je

$$u_i(x) = \begin{cases} x_- b_i & \text{pro } b_i > \max_{j \neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j \neq i} b_i \end{cases} \tag{2}$$

- Hrát $\beta(x) = x$ je evidentně nevýhodné

Aukce s nejvyšší cenou

- Užitek hráče i s hodnotou x a sázkou b_i je

$$u_i(x) = \begin{cases} x_- b_i & \text{pro } b_i > \max_{j \neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j \neq i} b_i \end{cases} \tag{2}$$

- Hrát $\beta(x) = x$ je evidentně nevýhodné
- Předpokládejme, že všichni hráči kromě 1 hrají rostoucí a spojitě diferencovatelnou strategii $\beta(\cdot)$
- Pro jaké β je optimální pro prvního hráče hrát rovněž β?

Aukce s nejvyšší cenou

- Užitek hráče i s hodnotou x a sázkou b_i je

$$u_i(x) = \begin{cases} x_- b_i & \text{pro } b_i > \max_{j \neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j \neq i} b_i \end{cases} \quad (2)$$

- Hrát $\beta(x) = x$ je evidentně nevýhodné
- Předpokládejme, že všichni hráči kromě 1 hrají rostoucí a spojitě diferencovatelnou strategii $\beta(\cdot)$
- Pro jaké β je optimální pro prvního hráče hrát rovněž β?
- Nemá smysl hrát méně než $\beta(0)$ a více než $\beta(\omega)$

Aukce s nejvyšší cenou

- Užitek hráče i s hodnotou x a sázkou b_i je

$$u_i(x) = \begin{cases} x_- b_i & \text{pro } b_i > \max_{j \neq i} b_i \\ 0 & \text{pro } b_i < \max_{j \neq i} b_i \end{cases} \tag{2}$$

- Hrát $\beta(x) = x$ je evidentně nevýhodné
- Předpokládejme, že všichni hráči kromě 1 hrají rostoucí a spojitě diferencovatelnou strategii $\beta(\cdot)$
- Pro jaké β je optimální pro prvního hráče hrát rovněž β?
- Nemá smysl hrát méně než $\beta(0)$ a více než $\beta(\omega)$
- Optimální nabídka b: vítězná pokud

$$b > \max_{i \neq 1} \beta(X_i) = \beta(\max_{i \neq 1}(X_i)) = \beta(Y_1)$$

- Výhra je $x - b$, pravděpodobnost výhry $G(\beta^{-1}(b))$.
- Pro jaké $b(x)$ je tento výraz maximalizován?

Řešení aukce s nejvyšší cenou

- Podmínky prvního řádu

$$\frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))}(x-b)-G(\beta^{-1}(b))=0$$

Řešení aukce s nejvyšší cenou

- Podmínky prvního řádu

$$\frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))}(x-b) - G(\beta^{-1}(b)) = 0$$

- V symetrické rovnováze $b = \beta(x)$ dostaneme

$$\frac{d}{dx}(G(x)\beta(x)) = xg(x)$$

Řešení aukce s nejvyšší cenou

- Podmínky prvního řádu

$$\frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))}(x-b) - G(\beta^{-1}(b)) = 0$$

- V symetrické rovnováze $b = \beta(x)$ dostaneme

$$\frac{d}{dx}\left(G(x)\beta(x)\right) = xg(x)$$

- Řešení je

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x yg(y)dy = E[Y_1|Y_1 < x]$$

- Hráč 1 vsází očekávanou hodnotu předmětu pro ostatní hráčů za podmínky, že je nižší než x. (Proč?)

Příklad

- Ukažte, že sázka $\beta(x)$ je vždy menší než x

Příklad

- Ukažte, že sázka $\beta(x)$ je vždy menší než x
- Spočtěte očekávaný příjem prodejce
- Spočtěte optimální strategie β^I, β^{II} pro rovnoměrně rozdělené hodnoty ($f = 1$ na $[0, 1]$)

Výnosy standardních aukcí

Věta

Předpokládejme, že hodnota předmětu je identicky a nezávisle distribuovaná a všichni hráči jsou rizikově neutrální. V každém symetrické a rostoucí rovnováze, ve které hráč s nulovou hodnotou platí v průměru nula, každé standardní aukce, je výnos pro vlastníka předmětu stejný.

Výnosy standardních aukcí

Věta

Předpokládejme, že hodnota předmětu je identicky a nezávisle distribuovaná a všichni hráči jsou rizikově neutrální. V každém symetrické a rostoucí rovnováze, ve které hráč s nulovou hodnotou platí v průměru nula, každé standardní aukce, je výnos pro vlastníka předmětu stejný.

- Důkaz: Očekávaná platba m závisí na nabídce, nikoliv vlastní hodnotě předmětu

Výnosy standardních aukcí

Věta

Předpokládejme, že hodnota předmětu je identicky a nezávisle distribuovaná a všichni hráči jsou rizikově neutrální. V každém symetrické a rostoucí rovnováze, ve které hráč s nulovou hodnotou platí v průměru nula, každé standardní aukce, je výnos pro vlastníka předmětu stejný.

- Důkaz: Očekávaná platba m závisí na nabídce, nikoliv vlastní hodnotě předmětu
- Integrací lze ukázat, že $m(x) = G(x) \times E[Y_1 | E_1 < x]$

Výnosy standardních aukcí

Věta

Předpokládejme, že hodnota předmětu je identicky a nezávisle distribuovaná a všichni hráči jsou rizikově neutrální. V každém symetrické a rostoucí rovnováze, ve které hráč s nulovou hodnotou platí v průměru nula, každé standardní aukce, je výnos pro vlastníka předmětu stejný.

- Důkaz: Očekávaná platba m závisí na nabídce, nikoliv vlastní hodnotě předmětu
- Integrací lze ukázat, že $m(x) = G(x) \times E[Y_1 | E_1 < x]$
- Výraz nezáleží na typu aukce.

Výnosy standardních aukcí

Věta

Předpokládejme, že hodnota předmětu je identicky a nezávisle distribuovaná a všichni hráči jsou rizikově neutrální. V každém symetrické a rostoucí rovnováze, ve které hráč s nulovou hodnotou platí v průměru nula, každé standardní aukce, je výnos pro vlastníka předmětu stejný.

- Důkaz: Očekávaná platba m závisí na nabídce, nikoliv vlastní hodnotě předmětu
- Integrací lze ukázat, že $m(x) = G(x) \times E[Y_1|E_1 < x]$
- Výraz nezáleží na typu aukce.
- Větu lze použít k výpočtu optimální strategie u neobvyklých typu aukcí (všichni platí, třetí nejvyšší cena).

Aukce se společnou hodnotou

- Každý hráč nemusí znát hodnotu přesně (může mít jen odhad)
- A jeho hodnota záleží na tom, jakou má předmět hodnotu pro ostatní
- Označme X_i signál i-tého hráče
- Náhodná veličina V_i, její realizace je očekávaná hodnota předmětu pro daného hráče

$$v_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E[V_i | X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n]$$

- Nestranný signál $E[X_i | V_i = v] = v$

- Budeme požadovat aby signály byly přidružené (affiliated)

Definice

Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ rozdělené na intervalu $\mathcal{X} \subset \Re^n$, popsané hustotou f, jsou přidružené, pokud pro každé $x', x'' \in X$ platí

$$f(x' \vee x'')f(x' \wedge x'') \geq f(x')f(x''),$$
$$x' \vee x'' = (\max(x'_1, x''_1), \ldots, \max(x'_n, x''_n))$$
$$x' \wedge x'' = (\min(x'_1, x''_1), \ldots, \min(x'_n, x''_n))$$

- U dvojitě spojitě diferencovatelné, všude kladné, hustoty je to ekvivalentní

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \ln f \geq 0$$

Přidruženost—důsledky

- Pro libovolnou rostoucí funkci γ a $x' > x$ platí

$$E[\gamma(Y_1)|X_1 = x'] \geq E[\gamma(Y_1)|X_1 = x].$$

- Vyšší signál pro i-tého hráče indikuje vyšší očekávání signálu pro ostatní hráče
- Definujeme

$$v(x,y) = E[V_1|X_1 = x, Y_1 = y]$$

- Předpokládáme existenci funkce u symetrické vzhledem k posledním $n-1$ složkám takovou, že

$$v_i(X) = u(X_i, X_{-i})$$

- Všichni ostatní hráči mají stejně kvalitní informaci z mého pohledu

Aukce s druhou nejvyšší cenou

- Ukážeme, že optimální strategie je $\beta(x) = v(x, x)$

Aukce s druhou nejvyšší cenou

- Ukážeme, že optimální strategie je $\beta(x) = v(x,x)$
- Zisk prvního hráče je

$$\Pi(b,x) = \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x,y) - \beta(y))g(y|x)dy,$$

Aukce s druhou nejvyšší cenou

- Ukážeme, že optimální strategie je $\beta(x) = v(x,x)$
- Zisk prvního hráče je

$$\Pi(b,x) = \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x,y) - \beta(y))g(y|x)dy,$$

- Protože $\beta(y) = v(y,y)$, a výraz $v(x,y) - v(y,y)$ je rostoucí v x. Maximum integrálu tedy nastáví pro $\beta^{-1}(b) = x$

Aukce s druhou nejvyšší cenou

- Ukážeme, že optimální strategie je $\beta(x) = v(x,x)$
- Zisk prvního hráče je

$$\Pi(b,x) = \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x,y) - \beta(y))g(y|x)dy,$$

- Protože $\beta(y) = v(y,y)$, a výraz $v(x,y) - v(y,y)$ je rostoucí v x. Maximum integrálu tedy nastáví pro $\beta^{-1}(b) = x$
- Obecně nejde o slabě dominantní strategii.

Aukce s druhou nejvyšší cenou

- Ukážeme, že optimální strategie je $\beta(x) = v(x,x)$
- Zisk prvního hráče je

$$\Pi(b,x) = \int_0^{\beta^{-1}(b)} (v(x,y) - \beta(y))g(y|x)dy,$$

- Protože $\beta(y) = v(y,y)$, a výraz $v(x,y) - v(y,y)$ je rostoucí v x. Maximum integrálu tedy nastáví pro $\beta^{-1}(b) = x$
- Obecně nejde o slabě dominantní strategii.
- Příklad: Tři hráči, V je společná hodnota předmětu rozdělená rovnoměrně na $[0,1]$. Signály hráčů jsou rozděleny na $[0,2v]$.

Anglická aukce

- Postupné zvyšování ceny, odpadávání dražitelů je viditelné
- Zdroj relevantních informací na rozdíl od aukcí s nezávislými hodnotami
- Označení: Strategie jednoho hráče je $(\beta^n, \beta^{n-1}, \ldots, \beta^2)$,

$$\beta^k : [0,1] \times \Re_+^{n-k} \rightarrow \Re_+$$

- Funkce β^i určuje cenu odpadnutí při i stále aktivních hráčích a cenách, při kterých odpadli ostatní hráči

Anglická aukce

- Postupné zvyšování ceny, odpadávání dražitelů je viditelné
- Zdroj relevantních informací na rozdíl od aukcí s nezávislými hodnotami
- Označení: Strategie jednoho hráče je $(\beta^n, \beta^{n-1}, \dots, \beta^2)$,

$$\beta^k : [0,1] \times \Re_+^{n-k} \rightarrow \Re_+$$

- Funkce β^i určuje cenu odpadnutí při i stále aktivních hráčích a cenách, při kterých odpadli ostatní hráči
- Definujeme

$$\beta^n(x) = u(x, \dots, x),$$

Anglická aukce

- Postupné zvyšování ceny, odpadávání dražitelů je viditelné
- Zdroj relevantních informací na rozdíl od aukcí s nezávislými hodnotami
- Označení: Strategie jednoho hráče je $(\beta^n, \beta^{n-1}, \dots, \beta^2)$,

$$\beta^k : [0,1] \times \Re_+^{n-k} \to \Re_+$$

- Funkce β^i určuje cenu odpadnutí při i stále aktivních hráčích a cenách, při kterých odpadli ostatní hráči
- Definujeme

$$\beta^n(x) = u(x, \dots, x),$$

- Existuje jeidné x_n takové, že $\beta^n(x_n = p_n$
- Definujme

$$\beta^{n-1}(x, p_n) = u(x, \dots, x, x_n)$$

- A tak dále až

$$\beta^k(x, p_{k+1}, \dots, p_n) = u(x, \dots, x, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

Aukce s nejvyšší cenou

- Očekávaný zisk při strategii ostatních hráčů $\beta(x)$, hodnotě x a nabídce z je

$$\Pi(z,x) = \int_0^z (v(x,y) - \beta(z)g(y|x)dy$$

Aukce s nejvyšší cenou

- Očekávaný zisk při strategii ostatních hráčů $\beta(x)$, hodnotě x a nabídce z je

$$\Pi(z,x) = \int_0^z (v(x,y) - \beta(z)g(y|x)dy$$

- Podmínky prvního řádu vedou na diferenciální rovnici

Aukce s nejvyšší cenou

- Očekávaný zisk při strategii ostatních hráčů $\beta(x)$, hodnotě x a nabídce z je

$$\Pi(z,x) = \int_0^z (v(x,y) - \beta(z)g(y|x)dy$$

- Podmínky prvního řádu vedou na diferenciální rovnici

$$\beta'(x) = (v(x,x) - \beta(x))\frac{g(x|x)}{G(x|x)}$$

Aukce s nejvyšší cenou

- Očekávaný zisk při strategii ostatních hráčů $\beta(x)$, hodnotě x a nabídce z je

$$\Pi(z,x) = \int_0^z (v(x,y) - \beta(z)g(y|x)dy$$

- Podmínky prvního řádu vedou na diferenciální rovnici

$$\beta'(x) = (v(x,x) - \beta(x))\frac{g(x|x)}{G(x|x)}$$

- Její řešení je

$$\beta^I(x) = \int_0^x v(y,y)dL(y|x),$$

$$L(y|x) = exp\left(-\int_y^x \frac{g(t|t)}{G(t|t)}dt\right)$$