Teorie horizontální a vertikální diferenciace

Jan Mysliveček

Přf Muni

21.listopadu 2008

Technické informace

- Odpoledne v M4
- Přehledová přednáška 5.12—otázky do 28.11
- Písemka 11.12—začátek ve 12.00 (?)

Homogenní produkce

- Běžný předpoklad: dokonale homogenní produkce
- Naprostá většina výrobků není dokonale homogenních
- Základní dva aspekty kvality
- Horizontální—různé aspekty (chuť, barva, . . .)
- Při stejné ceně se prodávají různé druhy
- Vertikální—lepší a horší (rychlost, velikost, . . .)
- Při stejné ceně by se prodávala jen „lepší“ kvalita
- Ukážeme si řadu jednoduchých modelů

Lineární město, monopol

- Míra zákazníku 1: rovnoměrně rozdělení na $[0,1]$
- Parametr $y \in [0,1]$ charakterizuje preference
- Lze si představit, že na každém x existuje jeden zákazník
- Jak monopol volí kde otevřít pobočku?
- Hodnota ideálního výrobku je $\bar{s}$
- Výrobek ve vzdálenosti a má hodnotu $\bar{s} - t(a)$
- Lineární náklady $t(a) = ta$
- Konstantní mezní náklady $c < \bar{s}$
- Typ výrobku (umístění obchodu) $x \leq \frac{1}{2}$, cena p
- Poptávka $\bar{y} : p + t(\bar{y}) = \bar{s}$
- Nakupují lidé s parametry $[\max\{x - \bar{y}, 0\}, \min\{x + \bar{y}, 1\}]$

Lineární město, monopol

- Uvažme $x - \bar{y} \geq 0, x + \bar{y} \leq 1$.
- Optimální cena: $\max_p (p - c) 2\frac{\bar{s} - p}{t}, p = \frac{\bar{s} + c}{2}$
- Nechť například $x - \bar{y} < 0$. Pak $p = \frac{xt + s + c}{2}$
- N poboček pokrývající interval, pozice $(\frac{1}{2N}, \dots, \frac{1+2i}{2N}, \dots, \frac{2N-1}{2N})$
- Proto $t\frac{y}{2} + p^* = \bar{s} \implies p^* = \bar{s} - t\frac{y}{2}$
- Optimální počet obchodů $max_N \bar{s} - t\frac{1}{2N} - fN \implies N^{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{t}{2f}}$.
- Srovnání počet obchodů zvolený vládou?

Lineární město, dvě firmy, pevná pozice

- Míra zákazníku 1: rovnoměrně rozdělení na $[0,1]$
- Parametr $x \in [0,1]$ charakterizuje preference
- Lze si představit, že na každém x existuje jeden zákazník
- Dvě firmy, na pozicích 0 a 1.
- Hodnota ideálního výrobku je $\bar{s}$
- Výrobek ve vzdálenosti a má hodnotu $\bar{s} - t(a)$
- Mluvíme o přepravních nákladech $t(\cdot)$
- Lze je interpretovat i jako charakteristiku preferencí
- Uvažujeme symetrické přepravní náklady

Pevná pozice

- Firmy mají konstantní mezní náklady $c_1, c_2 > 0$.
- Současně stanovují ceny (p_1, p_2)
- Pokud všichni nakupují, pak indiferentní hráč

$$x : p_1 + t(x) = p_2 + t(1 - x) < \bar{s}$$

- Firma maximalizující zisk stanovuje cenu p_1 takto

$$\max(p_1 - c_1) \cdot x$$

- Uvažme lineární náklady $t(x) = x$, pak $x = \frac{p_1 - p_2 - t}{-2t}$
- Spočítejte pro kvadratické náklady
- Pak optimální ceny definuje

$$p_2 + t - 2p_1 + c_2 = 0 \qquad t - 2p_2 + p_1 + c_1 = 0$$

- Řešení je

$$p_1 = t + \frac{c_2 + 2c_1}{3}, p_2 = t + \frac{2c_2 + c_1}{3}$$

- Podmínky $x = \frac{1}{2} + \frac{c_2 - c_1}{2t}$

Obecná pozice

- Problém pro obecnou pozici $0 \leq a < b \leq 1$ a kvadratické náklady
- Mezní zákazník

$$p_1 + t(x-a)^2 = p_2 + t(b-x)^2, \rightarrow x = \frac{p_1 - p_2}{2t(a-b)} + \frac{a+b}{2}$$

- Poptávka je

$$D_1(p_1, p_2) = x = \frac{p_1 - p_2}{2t(a-b)} + \frac{a+b}{2}, D_2(p_1, p_2) = 1 - x$$

- Podmínky prvního řádu jsou

$$\frac{a+b}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t(a-b)} + \frac{p_1 - c_1}{2t(a-b)} = 0$$

$$1 - \frac{a+b}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(a-b)} + \frac{p_2 - c_2}{2t(a-b)} = 0$$

Volba pozice

- Řešení

$$p_1 = \frac{2c_1 + c_2}{3} + t(b-a)\frac{1}{3}(2+b+a) \qquad (1)$$

$$p_2 = \frac{2c_2 + c_1}{3} + t(b-a)\frac{1}{3}(4-b-a) \qquad (2)$$

- Současná volba pozice a, b firmami
- Vyjádřit zisk, spočítat derivaci k vlastní poloze, diskutovat znaménko
- Elegantněji, s použitím tzv. „Envelope theorem“.

$$\Pi^1(a,b) = (p_1(a,b) - c_1)D_1(a,b,p_1(a,b),p_2(a,b)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_1}{\mathrm{d}a} = \frac{\partial p_1}{\partial a}\left(D_1 + (p_1 - c)\frac{\partial D_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a}\right) + (p_1 - c)\left(\frac{\partial D_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a} + \frac{\partial D_1}{\partial a}\right)$$

- Platí

$$\frac{\partial \Pi^1}{\partial p_1}\left(D_1 + (p_1 - c)\frac{\partial D_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a}\right) = 0$$

Maximální diferenciace

- Pak
$$\frac{\mathrm{d}\Pi_1}{\mathrm{d}a} = (p_1 - c)\left(\frac{\partial D_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial a} + \frac{\partial D_1}{\partial a}\right)$$
- Spočítáme
$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = \frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(a-b)^2} \quad (5)$$
$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = -\frac{1}{2t(a-b)} \quad (6)$$
$$\frac{\partial p_2}{\partial a} = -\frac{2t}{3}(4-2a) \quad (7)$$
- A tak dostaneme
$$\frac{\mathrm{d}\Pi_1}{\mathrm{d}a} = (p_1 - c_1)\left(\frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(a-b)^2} + \frac{1}{(a-b)}\frac{1}{3}(4-2a)\right)$$
- Firmy tedy volí $a = 0, b = 1$, nebo naopak $\Rightarrow$ maximální diferenciace

Příklad—vstup na trh

- Předpoklad:všechny firmy budou účtovat stejnou cenu po vstupu
- Lineární dopravní náklady
- Dvě firmy?
- Obě uprostřed, každá má polovinu trhu. Optimální?
- Tři firmy? Dvě v $\frac{1}{4}$, jedna ve $\frac{3}{4}$, a naopak
- Čtyři firmy, pět firem,. . . , n firem ?
- Obecných n firem: V nejlevější i nejpravější pozici musí být dvě firmy na stejném místě
- Na sousedních pozicích nemůže být po jedné firmě, nikde nemohou být tři firmy
- Je-li x pozic, jejich rozmístění je $[\frac{1}{2x}, \frac{3}{2x}, \ldots, \frac{2x-1}{2x}]$
- Nejvíce $2x$ firem, nejméně $(x-1)/2$ pro x liché, $(x-2)/2$ pro x sudé

Ceny v symetrické rovnováze

- Modely o vstupu na trh-rozhodnutí zda vstoupit, ne kam
- Kruh je ideální objekt (žádný začátek ani konec)
- Vstup n firem, vzdálenost $\frac{1}{n}$ mezi nimi
- Rozhodnutí o ceně z pohledu i-té firmy, jeho cena p_i
- Symetrická rovnováha—cena ostatních je p
- Přepravní náklady $t(x) = tx$
- Optimální hodnota p?
- Poptávka $D_i(p_i, p) = 2x = \frac{p+t/n-p_i}{t}$
- Konstantní mezní náklady c, náklady na vstup f

$$\max_{p_i}(p_i - c)\left(\frac{p + t/n - p_i}{t}\right) - f,$$

Vstup

- V symetrické rovnováze $p = c + \frac{t}{n}$
- Zisk jedné firmy $\frac{t}{n}\frac{1}{n} - f$
- Rozhodnutí o vstupu
- Konkurenční rovnováha $n^c = \sqrt{\frac{t}{f}}$
- Maximalizace blahobytu (welfare)
- Užitek spotřebitelů je konstantní
- Více firem snižuje transportní náklady, vyšší fixní náklady
- $\min_n \left(nf + \frac{t}{4n}\right)$
- Optimální počet firem je $n = \sqrt{\frac{t}{4f}}$

Závěry

- Z možných kvalit je jen relativně málo skutečně prodáváno
- Nižší fixní náklady zvyšují počet nabízených typů
- Podobně počet lidí (hustota)
- Vyšší transportní náklady—nižší konkurence, větší počet vstupu
- Konkurence vede k vstupu příliš mnoha firem
- Snaha odlišit se—snižuje intenzitu konkurence

Kvalita

- Horizontální aspekty: různé chutě
- Neexistuje „lepší“ a „horší“
- Vertikální diferenciace
- Všichni se shodnou na tom, co je lepší
- Lidé se liší v tom, jak moc si kvality cenní
- Alternativně: různá schopnost platit (majetek)
- Vertikálně (vyšší je lepší)
- Užitková funkce $U = \theta s - p$
- Parametry: preference θ, s kvalita, p cena

Předpoklady

- Preference rovnoměrně rozdělení $\theta \in [\underline{\theta}, \underline{\theta} + 1]$,
- Dvě firmy, kvality $s_1 < s_2$
- Konstantní mezní náklady c
- Technické předpoklady $\bar{\theta} \geq 2\underline{\theta}$
- $c + \frac{\bar{\theta} - 2\underline{\theta}}{3}(s_2 - s_1) \leq \underline{\theta} s_1$
- Zaručují, aby si každý spotřebitel koupil právě jeden výrobek
- Označme nejvyšší hodnotu rozdílu $\Delta s = s_2 - s_1$, $\bar{\Delta} = \bar{\theta}\Delta s$
- Nejnižší hodnotu rozdílu $\underline{\Delta} = \underline{\theta}\Delta s$
- Ceny $p_1 < p_2$

Rovnováha

- Indiferentní spotřebitel: θ^*

$$\theta^* s_1 - p_1 = \theta^* s_2 - p_2$$

- Firma s nižší kvalitou prodává spotřebitelům s nižším θ

$$D_1(p_1, p_2) = \frac{p_2 - p_1}{\Delta s} - \underline{\theta}$$

- Firma s vyšší kvalitou

$$D_2(p_1, p_2) = \bar{\theta} - \frac{p_2 - p_1}{\Delta s}$$

- Optimální ceny

$$p_1 = c + \frac{\bar{\theta} - 2\underline{\theta}}{3} \Delta s \tag{8}$$

$$p_2 = c + \frac{2\bar{\theta} - \underline{\theta}}{3} \Delta s \tag{9}$$

- Firma s vyšší kvalitou dosahuje vyššího zisku

Závěr

- Zisk firmy s vyšší kvalitou je

$$\Pi_2 = \left(\frac{2\bar{\theta} - \underline{\theta}}{3}\right)^2 \Delta s$$

- Podobně pro firmu s nižší kvalitou

$$\Pi_1 = \left(\frac{\bar{\theta} - 2\underline{\theta}}{3}\right)^2 \Delta s$$

- Zisk obou firem roste v Δs
- Opět případ maximální diferenciace
- Konkrétní rozsah záleží na nákladech dosažení určité kvality
- Různé kvality mohou mít různé mezní náklady (modelovat?)
- Opět intenzita konkurence klesá když roste vzdálenost firem

Bezplatná komunikace

- Různé typy agentu nebo různé stavy světa
- Jestliže jeden typ hráče může udělat něco levněji (dráž), lze to použít k odlišení agentů
- Modely signalizace a screeningu
- Pokud jsou pro všechny typy náklady stejné, tak to není možné
- Kdy můžete věřit informaci od jiných hráčů?
- Nejjednodušší model: informace; akce; výhry; podobné, ale ne identické preference
- Jeden hráč má relevantní informaci (o stavu světa)
- Druhý hráč volí akci
- První hráč může poslat signál z určité (velmi velké) množiny
- Druhý hráč signál interpretuje
- Racionální očekávání

Model

- Stav světa je $m \in [0, 1]$, první hráč se ho dozví
- Druhý hráč zná distribuci $f(m)$ signálu
- První hráč pošle signál $n \in N$
- Druhý hráč zvolí akci $y \in [0, 1]$
- Užitková funkce $U^S(y, m, b), U^R(y, m), U_{12} > 0, U_{11} < 0$
- Parametr b popisuje odlišnost preferencí
- Příklad $U^S = -(y - (m + b))^2, U^R = -(y - m)^2$
- Hustota pravděpodobnosti $q(\cdot|m)$ na N
- Zpráva n zvolena někdy zvolena pokud $q(n|m) > 0$
- Nějaká zpráva je vždy odeslána: $\int_N q(n|m)dn = 1$

Zprávy

- Apriorní očekávání stavu světa určeno $f(m)$
- Na základě zprávy n a strategie $q(n|m)$ je posteriorní odhad

$$p(m|n) = \frac{q(n|m)f(m)}{\int_0^1 q(n|t)f(t)dt}$$

- Druhý hráč volí strategii $y(n)$ tak, aby maximalizoval svůj užitek

$$max_y \int_0^1 U^R(y,m)p(m|n)dm.$$

- Racionální očekávání—opakovaná hra, schopnost se učit
- Hráče nelze systematicky mást
- Jak manipulovat informaci dokonale chytrému hráči?
- Optimální akce musí splňovat

$$y^S(m,b) = \arg\max_y U^S(y,m,b) \tag{10}$$

$$y^R(m) = \arg\max_y U^R(y,m) \tag{11}$$

Podmínky rovnováhy

Lemma

Pokud $y^S(m,b) \neq y^R(m)$ pro všechna m, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé akce u, v indukované v rovnováze platí $|u - v| > \varepsilon$. Důsledkem toho tvrzení je, že množina indukovaných akcí je konečná.

- Pro jednoduchosti je množina zpráv $[0, 1]$, ale snadno lze zobecnit
- Označme $\bar{y}(\underline{a}, \bar{a}) = \arg\max \int_{\underline{a}}^{\bar{a}} U^R(y, m) f(m) dm$
- Množina zpráv bude dělena na $a(N) = [a_0, \ldots, a_N]$
- Optimální dělení je definováno

$$U^S(\bar{y}(a_i, a_{i+1}), a_i, b) - U^S(\bar{y}(a_{i-1}, a_i), a_i, b) = 0 \tag{12}$$

$$y(n) = \bar{y}(a_i, a_{i+1}), \forall n \in (a_i, a_{i+1}) \tag{13}$$

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \tag{14}$$

Výsledky

- Pro každé $1 \leq N \leq N(b)$ existuje dělení $[0,1] = [0 = a_0, a_1, \ldots, a_N = 1]$
- Pro každé $m \in (a_i, a_{i+1})$ je odeslána náhodně (rovnoměrně) rozdělená zpráva
- Druhý hráč identifikuje interval, kde se signál nachází
- Akce zvolí optimálně vzhledem k tomuto intervalu
- $N(b)$ je maximální n takové, aby existovalo příslušné dělení
- Podmínky na dělení vedou na diferenciální rovnici
- Podrobný postup ukážeme na příkladu

Příklad

- Užitkové funkce
  $U^S(y,m,b) = -(y-(m+b))^2$, $U^R(y,m) = -(y-m)^2$
- Rovnoměrné rozdělení na intervalu $M = N = [0,1]$, $f(m) = 1$
- Ukažte $\bar{y}(\underline{a},\bar{a}) = (\underline{a}+\bar{a})/2$

$$
\begin{aligned}
\bar{y}(x,y) &= \arg\max_y \int_{\underline{a}}^{\bar{a}} U^R(y,m) f(m) dm = \\
&= \arg\max_y \int_{\underline{a}}^{\bar{a}} -(y-m)^2 dm \\
&= \arg\max \left[-y^2(\bar{a}-\underline{a}) + 2\int_{\underline{a}}^{\bar{a}} ymdm - \int_{\underline{a}}^{\bar{a}} m^2 dm \right] = \\
&= \arg\max_y \left[-y^2(\bar{a}-\underline{a}) + 2y(\bar{a}^2-\underline{a}^2) \right],
\end{aligned}
$$

- Indiferentní hráč

$$U^S(\bar{y}(a_i,a_{i+1}),a_i,b) - U^S(\bar{y}(a_{i-1},a_i),a_i,b) = 0$$

Řešení

- Podmínky $y(n) = \bar{y}(a_i, a_{i+1})$, $a_0 = 0, a_1 = 1$
- Odesílatel který obdrží signál a_1 musí být indiferentní mezi tím, když první hráč zvolí akci příslušnou intervalu $[0 = a_0, a_1]$
- Podmínka

$$-\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2} - (a_i + b)^2\right) = -\left(\frac{a_i + a_{i-1}}{2} - (a_i + b)^2\right)$$

- Vede na diferenciální rovnici

$$a_{i+1} = 2a_i - a_{i-1} - 4b$$

- Homogenizované rovnice

$$t^2 - 2t + 1 = 0,$$

- Obecné řešení je $a(i) = C + Di$
- Partikulární řešení je $x(i) = Ei^2$
- Počáteční podmínka vede na $C = 0$
- Dále $E = b$, koncová podmínka by určila D

Závěr

- Místo toho volíme a_1 jako podmínku
- Řešení

$$a_i = a_1 i + 2i(i-1)b,$$

- Nejjemnější možné dělení je pro max. i kde ještě $2i(i-1)b < 1$
- Pomocí dolní celé části x, $\lceil x \rceil$ definujeme

$$N(b) = \lceil \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \rceil,$$

- Pro b jdoucí k nule roste $N(b)$
- Čím méně se dva hráči liší, tím kvalitnější může být signál