Ekonomie informací a nejistoty

Jan Myslivеček

Přf Muni

31.října 2008

Informace a nejistota

- Řada událostí je značně nejistých
- Informace o událostech je někdy obtížně získatelná
- Jistota má svoji hodnotu (pro někoho)
- Užitková funkce $U(x)$, x je koš jistých statků
- Ocenění losu, akcie nebo investičního projektu?

Loterie

- Předpoklady: X množina
- $p : X \to \mathbb{R}^0_+$ konečné pravděpodobnostní rozdělení
- Tedy $p(x) \geq 0$ a $supp(p) = \{x : x \in X, p(x) > 0\}$ je konečná,
- $\sum_{x \in supp(p)} p(x) = 1$
- Množinu všech p označujeme P
- Příklad: $X = \{0, 1000000\text{Kč}\}, p(0) = 0.999999$
- Na P lze definovat následující operaci
- Nechť $p, q \in P$ a $\alpha \in [0, 1]$. Definujeme

$$(\alpha p + (1 - \alpha)q)(x) = \alpha p(x) + (1 - \alpha)q(x)$$

- Ověřte, že výsledek této operace leží opět v P.

Preference

Motivace:

- Start: Preference na X
- Cíl: Preference na množině loterií P
- Přirozené požadavky na preference na P
- Striktní preference, srovnatelné objekty

Axiom

Striktní preference $\succ$ jsou asymetrické a negativně transitivní. Asymetričnost znamená, že neexistují dvě loterie p, q takové, že by zároveň platilo $x \succ y$ a $y \succ x$. Negativně transitivní preference musí splňovat, že pokud $x \succ y$, pak pro každé $z \in P$ platí buď $x \succ z$ nebo $z \succ y$.

- Axiom o nahraditelnosti

Axiom

Nechť $p, q \in P, p \succ q$. Pro libovolné $r \in P$ a $\alpha \in (0,1)$ platí

$$\alpha p + (1-\alpha) r \succ \alpha q + (1-\alpha) r.$$

Preference a užitková funkce

- Neexistence extrémních loterií

Axiom

Nechť $p, q, r \in P$ *takové, že* $p \succ q \succ r$. *Pak existují* $\alpha, \beta \in (0,1)$ *takové, že*

$$\alpha p + (1-\alpha) r \succ q \succ \beta p + (1-\beta) r$$

- Příklad: $X = \mathbb{R}^0_+$, X je stav na účtu.
- Příklad: $p \succ q \iff Ep \geq Eq$, kde Ex je střední hodnota loterie x
- Splnění těchto axiomů je ekvivalentní existenci užitkové funkce

Věta

Preferenční uspořádání na množině P *splňuje uvedené tři axiomy tehdy a jen tehdy, existuje-li funkce* $u : X \to \mathbb{R}$ *taková, že*

$$p \succ q \iff \sum_{x \in supp(p)} u(x)p(x) > \sum_{x \in supp(q)} u(x)q(x),$$

Averze k riziku

- Odteď $X \subset \mathbb{R}$, jistá věc δ_x je loterie z P, $\delta_x(x) = 1$
- Neostré preference: $x \succeq y$ pokud neplatí, že $y \succ x$.
- Indiference: $x \sim y$ pokud neplatí $x \succ y$ ani $y \succ x$.

Věta

Pro libovolné $x > y, x, y \in X$ platí, že $\delta_x \succ \delta_y$ tehdy a jen tehdy, je-li příslušná užitková funkce u striktně rostoucí.

Definice

Označme $Ep = \sum_x xp(x)$. Pokud pro daného hráče platí, že $\delta_{Ep} \succeq p$, říkáme, že hráč je rizikově averzní.

Věta

Hráč je rizikově averzní tehdy a jen tehdy, je-li příslušná užitková funkce konkávní.

Příklad

- Los l: výhra 0 nebo 100 Kč, pravděpodobnost výhry je 0.1
- Majetek hráče je před koupí 100Kč. Užitková funkce $u(x) = \sqrt{x}$.
- Je hráč averzní k riziku? Hodnota losu?

Příklad

- Los l: výhra 0 nebo 100 Kč, pravděpodobnost výhry je 0.1
- Majetek hráče je před koupí 100Kč. Užitková funkce $u(x) = \sqrt{x}$.
- Je hráč averzní k riziku? Hodnota losu?

$$E(l) = 10, u(110) > 0.1u(200) + 0.9u(100)$$

- Protože $10.4880 > 10.414$, agent je rizikově averzní.
- Maximální částka t co je ochoten zaplatit

$$u(100) = 0.1u(200 - t) + 0.9u(100 - t)$$

- Řešení $t = \frac{5}{8}(27\sqrt{5} - 47) = 8.36 < 10$
- Riziko vyhledávající $p \succeq \delta_{Ep}$
- Koeficient absolutní averze k riziku

$$\lambda(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

- Konstantní absolutní averze k riziku $u(x) = -e^{-\lambda x}$
- $\lambda(x) \geq 0$ - rizikově averzní preference

Závěry

- Užitková funkce u na X definujeme preference nad loteriemi

$$p \succ q \iff \sum_{x \in supp(p)} u(x)p(x) > \sum_{x \in supp(q)} u(x)q(x)$$

- Parametr postoje k riziku $\lambda(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$
- Více rizikově averzní hráč $\lambda(x) \geq \eta(x), \forall x$
- Firmy obvykle považujeme za rizikově neutrální ($\lambda = 0$)
- Lidé jsou většinou rizikově averzní ($\lambda < 0$)
- Experimentální metody měření averze k riziku (výběr mezi loteriemi s různým rizikem)
- Příklad: Mám 5000 Kč, potřebuji 10000Kč na operaci, jakou cenu má loterie s $p(10000) = 0.1$?

Rozhodování se při nejistotě

- Nejistota o stavech světa
- Možné stavy $(s_1, \ldots, s_S)$
- Hráč musí zvolit akci z $(x_1, \ldots, x_X)$
- Důsledek stavu světa a akce označujeme $c(x, s)$
- Užitková funkce $u(c(x, s))$
- Cílem hráče je vybrat optimální akci, s ohledem na stav světa
- Informace o stavu světa
- Očekávání $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_S)$
- Pravděpodobnostní rozdělení $p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$

Optimální akce

- Optimální akce maximalizuje

$$U(x,\pi) = \pi_1 v(c(x,1)) + \cdots + \pi_S v(c(x,S))$$

- Očekávání určují optimální akci
- Příklad: Dva stavy světa (bude pršet, nebude pršet), dvě akce (vzít si deštník, nevzít)
- Užitek když nezmoknu a nenesu deštník je 200
- Nést deštník snižuje užitek o 10, zmoknutí o 100
- Očekávám, že bude pršet s pravděpodobností 0.2.
- Optimální akce?
- Vzít deštník je lepší než nevzít pokud

$$190 > 0.2 * 100 + 0.8 * 200 = 180$$

Informace

- Nové informace upřesňují stav světa
- Informační zdroj zpráv $\{m_1, \ldots, m_M\}$
- Označme j_{ms} pravděpodobnost, že stav světa je s a zpráva je m
- Příklad: Předpověd' počasí

Předpověd stav světa	Bude pršet	Nebude pršet	Součet
Dobrá předpověd	0.2	0.1	0.5
Špatná předpověd	0.00	0.7	0.5
	0.2	0.8	1

- Definujeme nepodmíněnou pravděpodobnost q_m signálu m a

$$\sum_m j_{ms} = \pi_s, \sum_s j_{ms} = q_m, \pi_{s|m} = \frac{j_{sm}}{q_m} \tag{1}$$

- Často dostáváme zadanou kvalitu zdroje, např. $P(Dobra|Bude\ prset)$
- Zajímá nás více $P(Bude\ prset|Dobra)$

Používání informací

- Jak optimálně využít zdroje informací?
- Na základě zprávy vytvořit nová, přesnější, očekávání
- Jaká je pravděpodobnost, že bude pršet, jestliže předpověď je špatná?

$$P(prset|spatna) = \frac{P(spatna|prset)P(prset)}{P(spatna)} = \tag{2}$$

$$= \frac{P(spatna|prset)P(prset)}{P(spatna|prset)P(prset) + P(spatna|nebude\ prset)P(nebude\ prset)} \tag{3}$$

$$P(prset|spatna) = \frac{P(spatna\&prset)}{P(spatna)} = \frac{0.7}{0.8} = 0.875 \tag{4}$$

- Další vztahy

$$\sum_m q_{m|s} = 1, \sum_s \pi_{s|m} = 1,$$

- Optimální proces tvorby nového odhadu pomocí Bayesova pravidla

$$\pi_{s|m} = \frac{\pi_s q_{m|s}}{\sum_s \pi_s q_{m|s}} = \frac{\pi_s q_{m|s}}{q_m}$$

Příklady

- Pacient může mít rakovinu (stav světa A), nebo ne (stav světa N). Apriorní odhad, že náhodně vybraný člověk má rakovinu je 0.0001
- Test u člověka s rakovinou je pozitivní s pravděpodobností 99%
- Test je pozitivní u člověka bez rakoviny s pravděpodobnostní 1%.
- Jaká je pravděpodobnost, že máte rakovinu když máte pozitivní test (Tipněte si !)

Příklady

- Pacient může mít rakovinu (stav světa A), nebo ne (stav světa N). Apriorní odhad, že náhodně vybraný člověk má rakovinu je 0.0001
- Test u člověka s rakovinou je pozitivní s pravděpodobností 99%
- Test je pozitivní u člověka bez rakoviny s pravděpodobnostní 1%.
- Jaká je pravděpodobnost, že máte rakovinu když máte pozitivní test (Tipněte si !)
- Výpočet a označení: $\pi_A = 0.0001, \pi_N = 0.9999$, $q_{1|A} = 0.99$, $q_{0|A} = 0.01$

$$p(A|1) = \frac{q_{1|A} * \pi_A}{q_{1|A} * \pi_A + q_{1|N} * \pi_N} = \frac{0.0001 * 0.99}{0.0001 * 0.99 + 0.01 * 0.9999} = 0.01$$

- Všimněte si jak relativně kvalitní test máme a jak malá je posteriorní pravděpodobnost nemoci
- Velmi jistý apriorní odhad, *relativně(!)* málo informativní test

Příklad—kino

Příklad

Uvažujete jak strávit večer. Klidný večer doma má hodnotu (po normalizaci) 0, zatímco dobrý film v kině má hodnotu (po započtení nákladu) hodnotu 100, zatímco špatný film má hodnotu -200. Odhadujete, že film je dobrý s 50ti procentní pravděpodobností. Chcete jít do kina? Co když dostanete možnost podívat se na online review. Review je příznivé s pravděpodobností 0.8*, pokud je film dobrý a s pravděpodobností* 0.4*, pokud je film špatný. Pokud je review nepříznivé, půjdete do kina? Pokud je příznivé?*

Příklad

Uvažujete jak strávit večer. Klidný večer doma má hodnotu (po normalizaci) 0, zatímco dobrý film v kině má hodnotu (po započtení nákladu) hodnotu X*, zatímco špatný film má hodnotu* $Y < 0$*. Odhadujete, že film je dobrý s 50ti procentní pravděpodobností. Opět máte k dispozici recenzi. Recenze je příznivá s pravděpodobností* p*, pokud je film dobrý a s pravděpodobností* $1 - p$*, pokud je film špatný. Jaké musí být* p*, aby vás přesvědčilo jít do kina?*

Hodnota informace

- Přesnější odhad umožňuje lepší rozhodování a to má cenu
- Signalizační zařízení zvyšuje užitek

$$\Delta U = E_s\{\max EU(\text{ se signalem}) - \max EU(\text{bez signalu})\}$$

- Nelze si koupit zprávu m, ale signalizační zařízení
- Každý informační má nezápornou hodnotu (zprávu lze ignorovat)
- Hodnota v „užitku“

$$\sum_{m=1}^{M} q_m \max_{x\in\{x_1,\dots,x_X\}} \sum_{s\in\{s_1,\dots,s_S\}} \pi'_{s|m} v(c(x,s)) - \max_{x\in\{x_1,\dots,x_X\}} \sum_{s\in\{s_1,\dots,s_S\}} \pi'_s v(c(x,s)),$$

- Monetární hodnota v je definovaná pomocí posteriorního odhadu $\pi'_{s|m}$

$$\sum_{m=1}^{M} q_m \max_{x\in\{x_1,\dots,x_X\}} \sum_{s\in\{s_1,\dots,s_S\}} \pi'_{sm} v(c(x,s) - v) = \max_{x\in\{x_1,\dots,x_X\}} \sum_{s\in\{s_1,\dots,s_S\}} \pi'_{sj} v(c(x,s))$$

Hodnota informace–aplikace

- Informace má hodnotu, pokud alespoň pro jeden stav světa a jednu zprávu vede ke změně akce
- Monty Hall problém
- Troje dveře, za jedněmi je cena. Hráč jedny vybere, ze zbylých dvou jsou vybrány ty, za kterými nic není (náhodně)
- Hráč dostane možnost změnit svoji volbu. Má?
- Kolik je nejvíce hráč ochoten za tuto informaci a možnost změny zaplatit?

Sekvenční hra

- Zatím jeden hráč, jedna zpráva
- Postupné zpracování informace
- Dva možné stavy světa (H, L), dvě akce, optimální v různých stavech (a_L, a_H)
- $U(a_H, H) = U(a_L, L) = U > 0 = U(a_H, L) = U(a_H, L)$
- Hráči $i = 1, 2, \ldots$, čas $t = 1, 2, \ldots$
- Hráč i hraje v kole i.
- Každý hráč má vlastní signál (h nebo l)
- Apriorní odhad $p(H) = p(L)$
- Kvalita signálu $p = p(h|H) = p(l|L)$

Strategie hráčů

- Každý hráč zná jen svůj signál a minulé akce ostatních hráčů.
- Každý hráč maximalizuje vlastní užitek
- První hráč má jen svůj signál
- Signál je informativní, pravděpodobnost že stav světa je H po signálu h

$$p(H|h) = \frac{p(h|H)p(H)}{p(h|H)p(H) + p(h|L)p(L)} = p$$

- První hráč hraje H když dostane signál h, L když l.
- Druhý hráč vidí akci prvního hráče
- Z toho lze zjistit jaký měl signál
- Pokud má stejný signál jako první hráč, volí stejnou akci
- Pokud má opačný signál, jeho odhad je $p(H|hl) = \frac{1}{2} = p(H|lh)$
- Je indiferentní mezi a_H a a_L, předpokládejme že hraje s prav. $\frac{1}{2}$

Další hráči

- Třetí hráč zná signál první hráče
- Zná signál druhého hráče pokud byl opačný a druhý hráč zvolil opačnou akci
- Pokud vidí stejnou akci od prvních dvou hráčů, není jisté, že by oba dostali stejný signál
- Pokud oba hráči zahráli totéž, i třetí hráč to zahraje bez ohledu na svůj signál
- Uvažme a_H, a_H, l,

$$
\begin{aligned}
P(H|(a_H,a_H,l)) &= \frac{P(H \cap (a_H,a_H) \cap l)}{P((a_H,a_H),l)} = \frac{P((a_H,a_H),l|H)P(H)}{P(H)P((a_H,a_H),l|H) + P(L)P((a_H,a_H),l|L)} = \\
&= \frac{P(hhl|H) + \frac{1}{2}P(hll|H)}{P(hhl|H) + \frac{1}{2}P(hll|H) + P(hhl|L) + \frac{1}{2}P(hll|L)} = \\
&= \frac{p^2(1-p) + \frac{1}{2}p(1-p)^2}{p^2(1-p) + \frac{1}{2}p(1-p)^2 + p(1-p)^2 + \frac{1}{2}p^2(1-p)} = \\
&= \frac{p + \frac{1}{2}(1-p)}{\frac{3}{2}p + \frac{3}{2}(1-p)} = \frac{p+1}{3} > \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- Hráč ignoruje vlastní informaci, volí a_H.

Informační kaskády

- Po dvou stejných akcích další hráči ignorují vlastní informaci
- Kdyby signály byly pozorovatelné, informace by nebyla ignorována
- Korektní kaskáda začne po hře dvou hráčů

$$P_1 = P(H)[P(hh|H) + \frac{1}{2}P(hl|H) + P(L)[p(ll|L) + \frac{1}{2}P(lh|L)] = p^2 + \frac{1}{2}p(1-p)$$

- Nekorektní kaskáda po hře dvou hráčů

$$P_2 = P(H)[P(ll|H) + \frac{1}{2}P(hl|H) + P(L)[p(hh|L) + \frac{1}{2}P(lh|L)] = (1-p)^2 + \frac{1}{2}p(1-p)$$

- Žádná kaskáda $P_3 = p(1-p)$
- Pravděpodobnost, že nekorektní kaskáda někdy začne

$$P_2' = P_2 + P_3P_2 + P_3^2P_2 + \cdots = \frac{P_2}{P_1 + P_2} < \frac{1}{2}$$

- Co se stane, když hráč sleduje vlastní signál, pokud je indiferentní?

Selekce

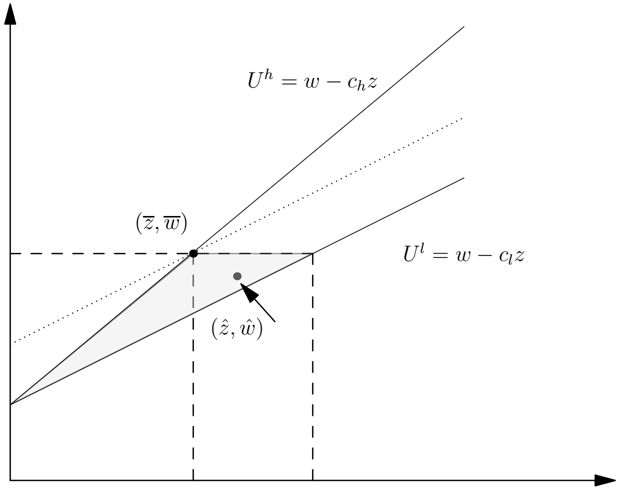
- Minule: motivace různých typů agentů přes kontrakty
- Více (h) a méně (l) produktivní agent, podíl θ typu h
- Principálovi přinesou $w_h > w_l$
- Průměrný výnos $w_0 = \theta w_h + (1 - \theta) w_l$
- Hodnota vedlejší příležitosti ($c_l < c_h$)
- Co když $c_h > w_0$?
- Existuje-li aktivita levnější pro typ h, lze ji využít k oddělení typů
- Vzdělání: bez vlivu na produktivitu
- Náklady $c(z, h) < c(z, l)$

Odlišení agentů

- Konkurence mezi principály
- Principál bude vyžadovat vzdělání z aby dal mzdu w_h, jinak w_l
- Příklad: náklady $c(z,h) = c_h z, c(z,l) = c_l z, c_l > c_h$
- Hledáme kontrakt oddělující různé typy agentů

$$\overline{w} - c_h \overline{z} \geq w_l, \overline{w} - c_l \overline{z} \leq w_l$$

Grafické zobrazení



Obrázek: Grafické zobrazení optimálního kontraktu

Optimální kontrakt a příklad

- Obecný kontrakt může vyžadovat dvě úrovně vzdělání
- Není optimální vyžadovat kladné vzdělání od l typu
- Existuje řada úrovní, které lze v rovnováze vyžadovat od h typu
- Konkurence mezi principály vede na nejnižší úroveň která odděluje oba typy

Příklad

Dobrá auta mají hodnotu 100000Kč pro kupující, 75 000Kč pro prodávající, nespolehlivá jen 50 000Kč pro kupující, 25 000Kč pro prodávající. Existuje konečný počet aut na trhu, ale neomezená poptávka (při těchto hodnotách). V průměru dvě třetiny aut jsou spolehlivé, jedna třetina nespolehlivá. Prodávající znají kvalitu svého auta, kupující ji nevidí. Jaké ceny mohou nastat v rovnováze? Co se stane, když kupující dostanou možnost koupit si prohlídku auta za 1000Kč, která s jistotou určí typ auta?

Signalizace

- V modelu selekce principál volí požadovanou úroveň vzdělání
- Často ale agent musí zvolit vzdělání první—signalizuje typ
- Podle existujících úrovní vzdělání agentů principál nabídne kontrakty
- V rovnováze budou existovat dvě úrovně vzdělání
- Odpovídající očekávání principála, aby šlo o rovnováhu

Příklad

Příklad

Následující příklad ukazuje, že zatím probrané problémy asymetrie informací se nemusejí vyskytovat odděleně. Firma najímá cestovního agenta, který vyhledává potenciální zákazníky, aby jim prodal zboží této firmy. Existují dva typy agentů—s vysokou a nízkou schopností (ability). Tyto schopnosti jsou v populaci rozděleny rovnoměrně, tj. obě s 50ti procentní pravděpodobností. Agent kromě toho volí úsilí—nízké ($a = 0$) nebo vysoké ($a = 1$). Jeho užitková funkce je $U(x, a) = \sqrt{x} - a$. Hodnota ostatních příležitostí je pro něj 5, tzn. že nikdy nepřijme kontrakt s očekávaným užitkem menším než 5.
Pokud agent uspěje a podaří se mu prodat, firma dosáhne zisku \$100. Šance ale závisejí na úsilí i na vrozené schopnosti. Pokud má agent vysokou schopnost a vyvine vysoké úsilí, prodá s pravděpodobností .9. S vysokou schopností a nízkým úsilím prodá s pravděpodobností .6. S nízkou schopností a vysokým úsilím je pravděpodobnost úspěchu .5, a v případě nízké schopnosti a nízkého úsilí je to jen 0.3.
Předpokládejte, že úsilí i typ agenta jsou pozorovatelné. Jaký je optimální kontrakt pro agenta s nízkou schopností a pro agenta s vysokou schopností? Jaký bude jimi zvolené úsilí a zisk firmy?
Co se stane, když nabídnete tyto kontrakty v situaci, když nejste schopni pozorovat typ agentů?
Navrhněte optimální kontrakt(y) v situaci, kdy ani úsilí ani typ agenta není pozorovatelný. Jaký je váš zisk?