Modely principála a agenta

Jan Mysliveček

Přf Muni

17.října 2008

Asymetrie informací

- Doktor vs. pacient
- Právník a jeho klient
- Dodavatel a ceny
- Manažer a majitel firmy

Asymetrie informací

- Doktor vs. pacient
- Právník a jeho klient
- Dodavatel a ceny
- Manažer a majitel firmy

Důsledky

- Nelze podmínit kontrakt neveřejnou informací
- Motivace manipulovat informaci
- Právník o obtížnosti příkladu, lékař o potřebě léčby
- Manažeři investičních fondů (herding behavior)

Tři typy problémů

- Skrytá informace

Tři typy problémů

- Skrytá informace
    - Dodavatel ví o svých nákladech

Tři typy problémů

- Skrytá informace
  - Dodavatel ví o svých nákladech
  - Doktor zná náklady optimální léčby

Tři typy problémů

- Skrytá informace
  - Dodavatel ví o svých nákladech
  - Doktor zná náklady optimální léčby
- Skrytá akce

Tři typy problémů

- Skrytá informace
  - Dodavatel ví o svých nákladech
  - Doktor zná náklady optimální léčby
- Skrytá akce
  - Právník volí úsilí

Tři typy problémů

- Skrytá informace
  - Dodavatel ví o svých nákladech
  - Doktor zná náklady optimální léčby
- Skrytá akce
  - Právník volí úsilí
  - Doktor volí typ léčby

Tři typy problémů

- Skrytá informace
  - Dodavatel ví o svých nákladech
  - Doktor zná náklady optimální léčby
- Skrytá akce
  - Právník volí úsilí
  - Doktor volí typ léčby
  - Manažer vybírá projekt

Tři typy problémů

- Skrytá informace
  - Dodavatel ví o svých nákladech
  - Doktor zná náklady optimální léčby
- Skrytá akce
  - Právník volí úsilí
  - Doktor volí typ léčby
  - Manažer vybírá projekt
- Nevymahatelná informace

Tři typy problémů

- Skrytá informace
  - Dodavatel ví o svých nákladech
  - Doktor zná náklady optimální léčby
- Skrytá akce
  - Právník volí úsilí
  - Doktor volí typ léčby
  - Manažer vybírá projekt
- Nevymahatelná informace
  - Obě strany se dozví danou informaci

Tři typy problémů

- Skrytá informace
  - Dodavatel ví o svých nákladech
  - Doktor zná náklady optimální léčby
- Skrytá akce
  - Právník volí úsilí
  - Doktor volí typ léčby
  - Manažer vybírá projekt
- Nevymahatelná informace
  - Obě strany se dozví danou informaci
  - Nelze její hodnotu vymáhat u soudu

Tři typy problémů

- Skrytá informace
  - Dodavatel ví o svých nákladech
  - Doktor zná náklady optimální léčby
- Skrytá akce
  - Právník volí úsilí
  - Doktor volí typ léčby
  - Manažer vybírá projekt
- Nevymahatelná informace
  - Obě strany se dozví danou informaci
  - Nelze její hodnotu vymáhat u soudu
  - Úsilí lze zjistit, ale ne dokázat

Modely se skrytou informací

- Podstatná informace skryta jedné straně
- Jeden nakupující(principál), jeden prodávající (agent)
- Principál nabízí kontrakt agentovi (cenu, množství)
- Náklady agenta jsou pro něj neznámé
- Agent má zájem předstírat vysoké náklady
- Principál chce vždy nakoupit, ale co nejlevněji

Model

- Užitek principála je $S(q)$, $S' \geq 0, S'' \leq 0$
- Kontrakt stanovuje množství q a cenu t
- Mezní náklady prodávajícího jsou $\theta \in \{\underline{\theta}, \overline{\theta}\}$
- Typ agenta (θ) je určen náhodně $(\eta, 1-\eta)$
- Časování
  - Agent se dozví svůj typ
  - Principál nabídne menu kontraktů $\{q, t\}$
  - Agent si vybere z menu (a vedlejší možnosti)
  - Kontrakt je realizován
- Agent je rizikové neutrální, maximalizuje $t - \theta q$

Veřejná informace

- Co se stane když je informace veřejná?
- Kontrakt může být podmíněn touto informací
- Odlišný kontrakt pro agenta s nízkými náklady a vysokými náklady
- Separátně lze najít optimální kontrakty
- Mezní náklady rovny meznímu užitku v optimu

$$S'(\underline{q}) = \underline{\theta}, S'(\overline{q}) = \overline{\theta},$$

- Hraniční řešení $(S(\underline{q}) - \underline{q\theta} < 0, \dots)$
- Optimální množství, principál obdrží veškerý výnos
- I při sdílení výnosů (vyjednávání) stejný výsledek

Neveřejná informace

- Principál nemůže navrhnout typ kontraktu pro určitý typ agenta
- Předpoklad: Principál nabízí dva kontrakty : $(\underline{q}, \underline{t}), (\overline{q}, \overline{t})$
- Usiluje o maximalizaci užitku $S(q) - t$
- Každý kontrakt musí být pro agenty přijatelný

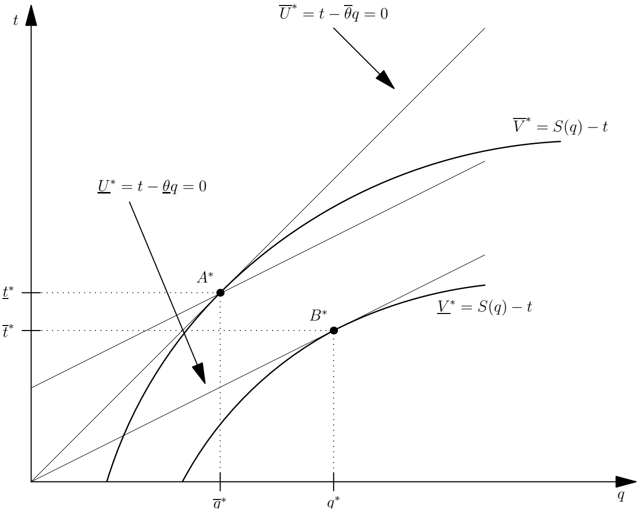
$$\underline{t} - \underline{\theta}\underline{q} \geq 0, \overline{t} - \overline{\theta}\underline{q} \geq 0$$

Příslušný kontrakt musí být lepší než alternativy

$$\underline{t} - \underline{\theta}\underline{q} \geq \overline{t} - \underline{\theta}\overline{q} \quad (1)$$

$$\overline{t} - \overline{\theta}\overline{q} \geq \underline{t} - \overline{\theta}\underline{q} \quad (2)$$

Grafické zobrazení



Obrázek: Grafické zobrazení problému principála a agenta.

Informační renta

Přepis problému do informačních rent

$$\overline{U} = \overline{t} - \overline{\theta}\overline{q}, \underline{U} = \underline{t} - \underline{\theta q}$$

Principál maximalizuje

$$\eta(S(\underline{q}) - \underline{q\theta}) + (1-\eta)(S(\overline{q}) - \overline{q}\underline{\theta}) - (\eta\underline{U} + (1-\eta)\overline{U})$$

za podmínek $\overline{U} \geq 0, \underline{U} \geq 0$ a

$$\underline{U} \geq \overline{U} + \Delta\theta\overline{q} \tag{3}$$
$$\overline{U} \geq \underline{U} - \Delta\theta\underline{q} \tag{4}$$

Protože agent s nízkými náklady $\underline{\theta}$ může přijmout kontrakt $\overline{q}, \overline{\theta}$, jeho užitek musí být větší než nula neboť

$$\overline{t} - \overline{t}\underline{\theta} = \overline{t} - \overline{\theta}\overline{q} + \Delta\theta\overline{t} = \overline{U} + \Delta\theta\overline{q}$$

Problém lze řešit pomocí Lagrangeových koeficientů, či Kuhn-Tuckerových podmínek. Komplikované při rostoucím počtu omezení.

Omezující podmínky

- Některé podmínky nejsou omezující
- Agent s nízkými náklady může předstírat že má vysoké náklady
- Pro agenta s vysokými náklady to není výhodné
- Agent s nízkými náklady musí mít kladný užitek ($\underline{U} > 0$)
- Agent s vysokými náklady preferuje svůj kontrakt ostře
- Zbývající dvě podmínky musí být splněny s rovností
- Ze čtyř nerovností zbyly dvě rovnosti, řešitelný problém

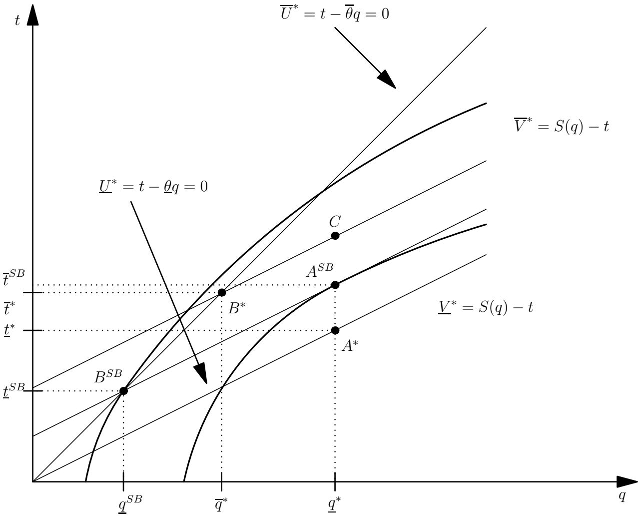
$$S'(\overline{q}) = \overline{\theta} + \frac{\eta}{1-\eta}\Delta\theta \tag{5}$$

$$S'(\underline{q}) = \underline{\theta} \tag{6}$$

$$\overline{t} = \overline{\theta}\overline{q} \tag{7}$$

$$\underline{t} = \underline{\theta}\underline{q} + \Delta\theta\overline{q} \tag{8}$$

Grafické zobrazení 2



Obrázek: Grafické řešení problému principála a agenta.

Příklad

Ověřte, že funkce $S(q) = \log(q+1)$ splňuje požadované příklady. Vyřešte problém pro $eta = \frac{1}{2}, \underline{\theta} = 1, \overline{\theta} = 2$
Řešení:

- První a druhá derivace S

Příklad

Ověřte, že funkce $S(q) = \log(q+1)$ splňuje požadované příklady. Vyřešte problém pro $eta = \frac{1}{2}, \underline{\theta} = 1, \overline{\theta} = 2$
Řešení:

- První a druhá derivace S
- Omezující podmínky, 2 rovnosti

Příklad

Ověřte, že funkce $S(q) = \log(q+1)$ splňuje požadované příklady. Vyřešte problém pro $eta = \frac{1}{2}, \underline{\theta} = 1, \overline{\theta} = 2$

Řešení:

- První a druhá derivace S
- Omezující podmínky, 2 rovnosti
- Vyřešit je

Příklad

Ověřte, že funkce $S(q) = \log(q+1)$ splňuje požadované příklady. Vyřešte problém pro $eta = \frac{1}{2}, \underline{\theta} = 1, \overline{\theta} = 2$

Řešení:

- První a druhá derivace S
- Omezující podmínky, 2 rovnosti
- Vyřešit je
- Ověřit, že zbývající nerovnosti jsou splněny

Příklad

Ověřte, že funkce $S(q) = \log(q+1)$ splňuje požadované příklady. Vyřešte problém pro $eta = \frac{1}{2}, \underline{\theta} = 1, \overline{\theta} = 2$
Řešení:

- První a druhá derivace S
- Omezující podmínky, 2 rovnosti
- Vyřešit je
- Ověřit, že zbývající nerovnosti jsou splněny
- Je odlišení agentů výhodnější než nabídka jediného kontraktu?

Více než dva typy

- Co se změní když nejsou jen dva typy, ale např. tři a více?
- Začneme se třemi typy, později kontinuum typů
- Principál stále bude nabízet tolik kontraktů, kolik je typů
- Začněme kontrakty, které rozlišují tři typy $\theta \in \{\underline{\theta}, \hat{\theta}, \overline{\theta}\}$
- Zjednodušení: $\overline{\theta} - \hat{\theta} = \hat{\theta} - \underline{\theta} = \Delta\theta > 0.$
- Přijatelné kontrakty

$$\underline{U} = \underline{t} - \underline{\theta\theta} \geq 0; \hat{U} = \hat{t} - \hat{\theta}\hat{q} \geq 0; \overline{U} = \overline{t} - \overline{\theta}\overline{q} \geq 0$$

- Kompatibilní kontrakty

Omezující podmínky

- Pro hráče s $\overline{\theta}$

$$\overline{U} \geq \hat{U} - \Delta\theta\hat{q} \tag{9}$$
$$\overline{U} \geq \underline{U} - 2\Delta\theta\underline{q} \tag{10}$$

- Pro hráče s $\hat{\theta}$

$$\hat{U} \geq \overline{U} + \Delta\theta\overline{q} \tag{11}$$
$$\hat{U} \geq \underline{U} - \Delta\theta\underline{q} \tag{12}$$

- Pro hráče s $\underline{\theta}$

$$\underline{U} \geq \hat{U} + \Delta\theta\hat{q} \tag{13}$$
$$\underline{U} \geq \overline{U} + 2\Delta\theta\overline{q} \tag{14}$$

- Sečtením lze odvodit: $\underline{q} \geq \hat{q} \geq \overline{q}$
- Jen „lokální“ omezení jsou relevantní

Relevantní omezení

- Zůstala tato omezení

$$\underline{U} \geq \hat{U} + \Delta\theta\hat{q} \tag{15}$$
$$\hat{U} \geq \overline{U} + \Delta\theta\overline{q} \tag{16}$$
$$\hat{U} \geq \underline{U} - \Delta\theta\underline{q} \tag{17}$$
$$\overline{U} \geq \hat{U} - \Delta\theta\hat{q} \tag{18}$$
$$\tag{19}$$

- Druhá z těchto podmínek není omezující
- Podobně jako dříve lze ukázat že z omezení na přijatelnost kontraktů je relevantní jen $\overline{U} \geq 0$.
- Maximalizační problém je

$$\max_{\{\{(\underline{U},\underline{q}),(\hat{U},\hat{q}),(\overline{U},\overline{q})\}\}} \underline{\eta}(S(\underline{q}) - \underline{\theta}\underline{q} - \tag{20}$$
$$-\underline{U}) + \hat{\eta}(S(\hat{q}) - \hat{\theta}\hat{q} - \hat{U}) + \overline{\eta}(S(\overline{q}) - \overline{\theta}\overline{q} - \overline{U}, \tag{21}$$

za uvedených 4 podmínek.

Výsledky

- Rostoucí množství není vždy optimální
- Principál muže preferovat neodlišit všechny agenty
- Pokud $\hat{\eta} > \overline{\eta}\underline{\eta}$, pak podmínky monotonicity jsou splněny s ostrou nerovností a optimální množství jsou $\underline{q}^{SB} = \underline{q}^*, \hat{q}^{SB} < \hat{q}^*, \overline{q}^{SB} < \overline{q}^*$ a

$$S'(\hat{q}^{SB}) = \hat{\theta} + \frac{\underline{\eta}}{\hat{\eta}}\Delta\theta, \tag{22}$$

$$S'(\overline{q}^{SB}) = \overline{\theta} + \frac{\underline{\eta} + \hat{\theta}}{\overline{\eta}}\Delta\theta, \tag{23}$$

Pokud $\hat{\eta} \leq \overline{\eta}\underline{\eta}$, pak $\underline{q}^{SB} = \underline{q}^*$, a $\hat{q}^{SB} = \overline{q}^{SB} = q^p < \underline{q}^*$ a

$$S'(\overline{q}^p) = \overline{\theta} + \frac{2\underline{\eta} + \hat{\theta}}{\overline{\eta}}\Delta\theta, \tag{24}$$

Kontinuum typů

- Formulace pro $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$
- Kumulativní distribuce $F(\theta)$, hustota $f(\theta) > 0$
- Přímá nabídka $\{(q(\theta), t(\theta))\}$ pro všechny typy $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$
- Přijatelnost kontraktu pro daný typ $t(\theta) - \theta q(\theta) \geq 0$
- Kompatibilita pro daný typ θ

$$t(\theta) - \theta q(\theta) \geq t(\theta') - \theta q(\theta')$$

- Musí také platit

$$t(\theta') - \theta' q(\theta') \geq t(\tilde{\theta}) - \theta' q(\tilde{\theta})$$

- Z těchto podmínek vyplývá

$$(\theta - \theta')(q(\theta') - g(\theta)) \geq 0$$

- Funkce $q(\theta)$ musí být rostoucí.
- Podmínky kompatibility vedou na diferenciální rovnici pro všechna θ

$$\dot{t}(\theta) - \theta \dot{q}(\theta) = 0$$

Kontinuum typů 2

- Podmínky druhé řádu v optimálním řešení

$$-\dot{q}(\theta) \geq 0$$

- Z lokálních podmínek lze odvodit globální integrací
- Při značení $U(\theta) = t(\theta) - \theta q(\theta)$ platí

$$\dot{U} = -q(\theta)$$

- Principálův problém je

$$\max \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} (S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - U(\theta)) f(\theta) d\theta \tag{25}$$

Modely se skrytou akcí

- Agent má možnost volby akce (úsilí)
- Vyšší úsilí je nákladné pro agenta, prospěšné pro principála
- Výsledek nezávisí jen na akci agenta
- Principál nemůže přikázat akci, ani se ji nedozví
- Principál může sestavit kontrakt tak, aby agent zvolil optimální akci
- Agent získává informační rentu

Model

- Agent volí dvě úsilí (vysoké $e = 1$, nízké $e = 0$)

Model

- Agent volí dvě úsilí (vysoké $e = 1$, nízké $e = 0$)
- Vysoké úsilí stojí ψ

Model

- Agent volí dvě úsilí (vysoké $e = 1$, nízké $e = 0$)
- Vysoké úsilí stojí ψ
- Výsledek je buďto „úspěch“ ($\overline{q}$) nebo „neúspěch“ ($\underline{q}$)

Model

- Agent volí dvě úsilí (vysoké $e = 1$, nízké $e = 0$)
- Vysoké úsilí stojí ψ
- Výsledek je buďto „úspěch" ($\overline{q}$) nebo „neúspěch" ($\underline{q}$)
- Vysoké úsilí dělá úspěch pravděpodobnější

Model

- Agent volí dvě úsilí (vysoké $e = 1$, nízké $e = 0$)
- Vysoké úsilí stojí ψ
- Výsledek je buďto „úspěch“ ($\overline{q}$) nebo „neúspěch“ ($\underline{q}$)
- Vysoké úsilí dělá úspěch pravděpodobnější
- Pravděpodobnost úspěchu $\pi_1 > \pi_0$

Model

- Agent volí dvě úsilí (vysoké $e = 1$, nízké $e = 0$)
- Vysoké úsilí stojí ψ
- Výsledek je buďto „úspěch“ ($\overline{q}$) nebo „neúspěch“ ($\underline{q}$)
- Vysoké úsilí dělá úspěch pravděpodobnější
- Pravděpodobnost úspěchu $\pi_1 > \pi_0$
- Časování

Model

- Agent volí dvě úsilí (vysoké $e = 1$, nízké $e = 0$)
- Vysoké úsilí stojí ψ
- Výsledek je buďto „úspěch“ ($\overline{q}$) nebo „neúspěch“ ($\underline{q}$)
- Vysoké úsilí dělá úspěch pravděpodobnější
- Pravděpodobnost úspěchu $\pi_1 > \pi_0$
- Časování
  - Principál nabídne menu kontraktů

Model

- Agent volí dvě úsilí (vysoké $e = 1$, nízké $e = 0$)
- Vysoké úsilí stojí ψ
- Výsledek je buďto „úspěch“ ($\overline{q}$) nebo „neúspěch“ ($\underline{q}$)
- Vysoké úsilí dělá úspěch pravděpodobnější
- Pravděpodobnost úspěchu $\pi_1 > \pi_0$
- Časování
    - Principál nabídne menu kontraktů
    - Agent si vybere kontrakt

Model

- Agent volí dvě úsilí (vysoké $e = 1$, nízké $e = 0$)
- Vysoké úsilí stojí ψ
- Výsledek je buďto „úspěch“ ($\overline{q}$) nebo „neúspěch“ ($\underline{q}$)
- Vysoké úsilí dělá úspěch pravděpodobnější
- Pravděpodobnost úspěchu $\pi_1 > \pi_0$
- Časování
  - Principál nabídne menu kontraktů
  - Agent si vybere kontrakt
  - Kontrakt je realizován

Model

- Agent volí dvě úsilí (vysoké $e = 1$, nízké $e = 0$)
- Vysoké úsilí stojí ψ
- Výsledek je buďto „úspěch“ ($\overline{q}$) nebo „neúspěch“ ($\underline{q}$)
- Vysoké úsilí dělá úspěch pravděpodobnější
- Pravděpodobnost úspěchu $\pi_1 > \pi_0$
- Časování
  - Principál nabídne menu kontraktů
  - Agent si vybere kontrakt
  - Kontrakt je realizován
- Dříve typ daný náhodně, teď je to volba

Veřejná informace

- Když je úsilí pozorovatelné, kontrakt může vyžadovat vysoké úsilí
- Vyžadovat vysoké úsilí je optimální když

$$\pi_1 \overline{q} + (1 - \pi_1)\underline{q} - \psi \geq \pi_0 \overline{q} + (1 - \pi_0)\underline{q}$$

- Předpokládáme, že je ta podmínka splněna

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$
- Rizikově neutrální agent $u(t) = t$

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$
- Rizikově neutrální agent $u(t) = t$
- Nízké úsilí je bezplatné $\psi(0) = 0$, označíme $\psi(1) = \psi$

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$
- Rizikově neutrální agent $u(t) = t$
- Nízké úsilí je bezplatné $\psi(0) = 0$, označíme $\psi(1) = \psi$
- Agent může platit principálovi v případě neúspěchu

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$
- Rizikově neutrální agent $u(t) = t$
- Nízké úsilí je bezplatné $\psi(0) = 0$, označíme $\psi(1) = \psi$
- Agent může platit principálovi v případě neúspěchu
- Platba agentovi může záviset jen na úspěchu a neúspěchu

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$
- Rizikově neutrální agent $u(t) = t$
- Nízké úsilí je bezplatné $\psi(0) = 0$, označíme $\psi(1) = \psi$
- Agent může platit principálovi v případě neúspěchu
- Platba agentovi může záviset jen na úspěchu a neúspěchu
- Kontrakt specifikuje platbu při úspěchu $(\bar{t})$ a neúspěchu $(\underline{t})$

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$
- Rizikově neutrální agent $u(t) = t$
- Nízké úsilí je bezplatné $\psi(0) = 0$, označíme $\psi(1) = \psi$
- Agent může platit principálovi v případě neúspěchu
- Platba agentovi může záviset jen na úspěchu a neúspěchu
- Kontrakt specifikuje platbu při úspěchu ($\bar{t}$) a neúspěchu ($\underline{t}$)
- Optimální kontrakt s vysokým úsilím

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$
- Rizikově neutrální agent $u(t) = t$
- Nízké úsilí je bezplatné $\psi(0) = 0$, označíme $\psi(1) = \psi$
- Agent může platit principálovi v případě neúspěchu
- Platba agentovi může záviset jen na úspěchu a neúspěchu
- Kontrakt specifikuje platbu při úspěchu ($\bar{t}$) a neúspěchu ($\underline{t}$)
- Optimální kontrakt s vysokým úsilím

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$
- Rizikově neutrální agent $u(t) = t$
- Nízké úsilí je bezplatné $\psi(0) = 0$, označíme $\psi(1) = \psi$
- Agent může platit principálovi v případě neúspěchu
- Platba agentovi může záviset jen na úspěchu a neúspěchu
- Kontrakt specifikuje platbu při úspěchu $(\bar{t})$ a neúspěchu $(\underline{t})$
- Optimální kontrakt s vysokým úsilím
  - Kontrakt je přijatelný

$$\pi_1 u(\bar{t}) - (1 - \pi_1) u(\underline{t}) - \psi \geq 0$$

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$
- Rizikově neutrální agent $u(t) = t$
- Nízké úsilí je bezplatné $\psi(0) = 0$, označíme $\psi(1) = \psi$
- Agent může platit principálovi v případě neúspěchu
- Platba agentovi může záviset jen na úspěchu a neúspěchu
- Kontrakt specifikuje platbu při úspěchu ($\bar{t}$) a neúspěchu ($\underline{t}$)
- Optimální kontrakt s vysokým úsilím
  - Kontrakt je přijatelný

$$\pi_1 u(\bar{t}) - (1 - \pi_1) u(\underline{t}) - \psi \geq 0$$

  - Kontrakt vede k vysokému úsilí

$$\pi_1 u(\bar{t}) - (1 - \pi_1) u(\underline{t}) - \psi \geq \pi_0 u(\bar{t}) - (1 - \pi_0) u(\underline{t})$$

Neomezené ručení

- Předpoklad: Užitek agenta je $U = u(t) - \psi(e)$
- Rizikově neutrální agent $u(t) = t$
- Nízké úsilí je bezplatné $\psi(0) = 0$, označíme $\psi(1) = \psi$
- Agent může platit principálovi v případě neúspěchu
- Platba agentovi může záviset jen na úspěchu a neúspěchu
- Kontrakt specifikuje platbu při úspěchu ($\bar{t}$) a neúspěchu ($\underline{t}$)
- Optimální kontrakt s vysokým úsilím
  - Kontrakt je přijatelný

$$\pi_1 u(\bar{t}) - (1 - \pi_1) u(\underline{t}) - \psi \geq 0$$

  - Kontrakt vede k vysokému úsilí

$$\pi_1 u(\bar{t}) - (1 - \pi_1) u(\underline{t}) - \psi \geq \pi_0 u(\bar{t}) - (1 - \pi_0) u(\underline{t})$$

  - Optimální kontrakt pro principála

$$\max_{\underline{t}, \bar{t}} \pi_1 (S(\bar{q}) - \bar{t}) + (1 - \pi_1)(S(\underline{q}) - \underline{t})$$

- Řešení pro $u(t) = t$:

$$\underline{t}^* = -\frac{\pi_0}{\Delta\pi}\psi \tag{26}$$

$$\overline{t}^* = \frac{1-\pi_0}{\Delta\pi}\psi \tag{27}$$

- Vyšší úsilí je optimální když

$$\pi_1 S(\overline{q}) + (1-\pi_1)S(\underline{q}) - \psi \geq \pi_0 S(\overline{q}) + (1-\pi_0)S(\underline{q})$$

- Označíme $\Delta S = S(\overline{q}) - S(\underline{q})$ Pak

$$\Delta\pi\Delta S \geq \psi$$

Neomezené ručení

- V případě neúspěchu agent platí principálovi
- Očekávaná platba je ψ
- Agent má v průměru nulový užitek
- Veškerý výnos připadne principálovi
- Okolnosti někdy omezují platbu agenta principálovi

Neomezené ručení

- V případě neúspěchu agent platí principálovi
- Očekávaná platba je ψ
- Agent má v průměru nulový užitek
- Veškerý výnos připadne principálovi
- Okolnosti někdy omezují platbu agenta principálovi
  - Zaměstnanec není vždy zodpovědný
  - Manažer nemá majetek na pokrytí ztráty
  - Právník neplatí klientovi při neúspěchu
  - Dražitel neplatí majiteli když objekt nepřiláká dostatek zájemců

Omezené ručení

- Agent může zaplatit nejvýše $-l, l > 0$
- Agent je rizikově neutrální $u(q) = q$
- Někdy tato podmínka nemusí být omezující
- Pokud ano $(0 \leq l \leq \frac{\pi_0}{\Delta\pi}\psi)$, pak

$$\underline{t}^{DN} = -l, \bar{t}^{DN} = -l + \frac{\psi}{\Delta\pi} \tag{28}$$

Omezené ručení

- Agent může zaplatit nejvýše $-l, l > 0$
- Agent je rizikově neutrální $u(q) = q$
- Někdy tato podmínka nemusí být omezující
- Pokud ano $(0 \leq l \leq \frac{\pi_0}{\Delta\pi}\psi)$, pak

$$\underline{t}^{DN} = -l, \bar{t}^{DN} = -l + \frac{\psi}{\Delta\pi} \tag{28}$$

- Agent má kladný očekávaný užitek
- Existuje rozsah parametrů, kdy optimální úsilí není vymahatelné

Omezené ručení

- Agent může zaplatit nejvýše $-l, l > 0$
- Agent je rizikově neutrální $u(q) = q$
- Někdy tato podmínka nemusí být omezující
- Pokud ano $(0 \leq l \leq \frac{\pi_0}{\Delta\pi}\psi)$, pak

$$\underline{t}^{DN} = -l, \overline{t}^{DN} = -l + \frac{\psi}{\Delta\pi} \tag{28}$$

- Agent má kladný očekávaný užitek
- Existuje rozsah parametrů, kdy optimální úsilí není vymahatelné
- Porovnání výnosů při vysokém a nízkém úsilí $(l = 0)$

$$\pi_1 S(\overline{q}) + (1 - \pi_1) S(\underline{q}) - \frac{\pi_1 \pi}{\Delta\pi} \geq \pi_0 S(\overline{q}) + (1 - \pi_0) S(\underline{q})$$

- Označme $\Delta S = S(\overline{q}) - S(\underline{q}) > 0$
- Vyšší úsilí je optimální pro principála když $\Delta\pi\Delta S \geq \frac{\pi_1\psi}{\Delta\pi}$
- Ekvivalentně $\Delta\pi\Delta S \geq \psi + \frac{\pi_0\psi}{\delta\pi}$
- Vyšší úsilí je vymáháno méně často, než je optimální

Příklad

- Vyřešte problém $u(q) = q, \psi = 1, \pi_0 = \frac{1}{3}, \pi_1 = \frac{2}{3}, \underline{q} = 0, \overline{q} = 6$
- Optimální kontrakt při neomezeném ručení. Je vysoké úsilí optimální?
- Optimální kontrakt při $l = 0$. Optimální úsilí?
- Porovnejte platby v případě úspěchu

Rizikově averzní agent

- Alternativní přístup (omezené ručení nebo rizikově averzní agent)
- Původní kontrakt není přijatelný
- Agent preferuje „jistější“ kontrakt (tj. s menší variací)
- Principál nemůže přenést riziko na agenta
- V optimálním kontraktu principál přijímá část rizika
- Ne všechno riziko, protože pak by chyběla motivace agenta

Spojitý model

- Výsledek závislý na úsilí a náhodě, interval možných úsilí
- Např $q = e + \varepsilon$, kde ε $N(0, \sigma^2, e \in [0, \infty]$
- Konstantní absolutní averze k riziku $u(t, e) = -e^{\eta[t-\psi(e)]}$,
- Náklady úsilí $\psi(e) = \frac{1}{2}ce^2$
- Lineární kompenzační schémata $t = f + ge$
- Problém pro principála $\max_{e,f,g} E(q-t), q = e + \varepsilon, t = f + ge$
- Podmínky

$$E(-e^{-\eta[f+g(e+\varepsilon)-\frac{1}{2}ce^2]}) \geq \overline{u}$$

$$e \in \arg\max E(-e^{-\eta[f+g(e+\varepsilon)-\frac{1}{2}ce^2]}$$

Spojitý model

- Lze ukázat, že

$$E(e^{\gamma\varepsilon}) = e^{\frac{1}{2}\gamma^2\sigma^2}$$

- Takže je podmínka ve tvaru

$$e \in \arg\max[f + eg - \frac{1}{2}ce^2 - \frac{\eta}{2}g^2\sigma^2]$$

- Maximalizační problém je pak

$$max_{t,s}\frac{s}{c} - (t + \frac{s^2}{c}),$$

- Řešení

$$g = \frac{1}{1 + \eta c\sigma^2}$$

- Co se stane, když vzroste η, c, σ^2?
- Hodnota f závisí na hodnotě vedlejší příležitosti