Zkouška 12.12

Tento text je stručným shrnutím vzorového řešení prvního písemného testu z předmětu Matematické modely v ekonomii. Některé detaily řešení jsou ponechány na čtenáři.

Řešení 1.1 *1. Jde o hru dvou hráčů, proto $N = \{1,2\}$. Jejich strategie jsou nezáporná reální čísla: $S_i = \mathbb{R}_0^+$. Užitek je*

$$U_1(e_1,e_2) = \begin{cases} 1000000 - e_1 & e_1 > e_2 \\ 500000 - e_1 & e_1 = e_2 \\ -e_1 & e_1 < e_2 \end{cases}$$

2. *Ukážeme, že žádné čisté NR neexistují. Sporem: nechť e_A^*, e_B^* jsou rovnovážné strategie. Pokud $e_A^* = e_B^*$, pak si libovolný z hráčů polepší tím, že zvýší své úsilí o $\varepsilon > 0$ dostatečně malé. Pokud jeden z hráčů volí menší (kladné) úsilí než druhý hráč, pak si polepší tím, že sníží úsilí na nulu. Pokud jen jeden z hráčů volí nulové, tak si druhý hráč polepší tím, že sníží svoje úsilí na polovinu, přičemž stále vyhraje.*

3. *Označme e_A, e_B nejmenší úsilí obou hráčů zvolené s kladnými pravděpodobnostmi v rovnováze. Tyto pravděpodobnosti označme p_A, p_B. Podobně jako v předchozí části lze ukázat, že si každý hráč může polepšit. Nechť například $e_A = e_B$, pak si libovolný hráč může polepšit tím, že zvýší úsilí o $\varepsilon > 0$ dostatečně malé, protože zvítězí pokud oba hráči zvolí (s pravděpodobností $p_A * p_B$) stejné úsilí, což zvýší jeho očekávanou výhru o $1000000 * p_A * p_B$ ale náklady jen o $p_A * \varepsilon$, což je menší číslo pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$.*

4. *Pokud hráči volí úsilí zároveň, je jejich problém*

$$\max_{e_i}(1000000)\frac{e_i}{e_i+e_j} - e_i$$

Tento problém vede na podmínky prvního řádu

$$1000000e_j = (e_j+e_i)^2 = 1000000e_i$$

Z toho snadno získáme $e_A = e_B = \frac{1}{4}1000000$. Každý hráč má stejnou, tedy poloviční pravděpodobnost, výhry.

Řešení 1.2 *1. Pokud znám náklady potenciálního dodavatele, mohu zvolit mzdu $w = cx$, kde x je mnou poptávané množství a c jsou jeho mezní náklady. Optimální poptávka x je určena problémem*

$$\max_x \sqrt{x} - cx,$$

který má řešení $x_H = \frac{400}{9}$ pro hráče s vysokými náklady a $x_L = 100$ pro hráče s nízkými náklady. Očekávaný zisk je vážený průměr zisků z kontraktů s jednotlivými typy dodavatelů, kde váhy jsou pravděpodobnosti daných typů, tedy

$$U_{public} = \frac{1}{2}(\sqrt{100} - 0.05*100) + \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{400}{9}} - \frac{3}{40} * \frac{400}{9}) = \frac{25}{6}$$

2. *Jakmile je nějaký kontrakt přijatelný pro dodavatele s vysokými náklady, je přijatelný i pro dodavatele s nízkými náklady. Optimální kontrakt tedy musí být přijatelný pro dodavatele s vysokými náklady. Zisk z kontraktu je stejný, ať už jej vykonává dodavatel s nízkými nebo vysokými náklady, protože oba kontrakty jsou stejné (a přijatelné). Maximalizační problém je tedy*

$$\max \sqrt{x} - w,\ w - c_L x \geq 0,$$

Lze snadno vidět, že optimální kontrakt je stejný jako optimální kontrakt pro dodavatele s vysokými náklady a pozorovatelným typem. Tedy nabídnutý kontrakt je $x = \frac{400}{9}, w = \frac{3}{40} * \frac{400}{9}$). Očekávaný užitek je $U_{dva} = \frac{10}{3}$.

3. *Z výše uvedeného vyplývá, že jakmile je kontrakt přijatelný pro jediný typ, musí to být typ s nízkými náklady. Pro tento typ je optimální kontrakt $x = 100, w = 5$. Očekávaný užitek je $U_{jeden}\frac{1}{2}(10-5) + \frac{1}{2}0 = 2.5$, protože s padesáti-procentní pravděpodobností narazíme na dodavatele s vysokými náklady, který kontrakt nepřijme.*

4. *Pokud hledáme optimální kontrakty, které odliší oba hráče, musíme hledat mezi kontrakty, které splňují*

$$\begin{aligned} w_1 - c_L x_1 &\geq 0, w_2 - c_H x_2 \geq 0, && (1) \\ w_1 - c_L x_1 &\geq w_2 - c_L x_2, w_2 - c_H x_2 \geq w_1 - c_H x_1 && (2) \end{aligned}$$

Podmínka přijatelnosti pro agenta s vysokými náklady a podmínka, že kontrakt je optimální pro hráče s nízkými náklady, musí být splněny s rovností.[1] *Z první podmínky dostaneme* $w_2 = c_H x_2$ *a*

$$w_1 - c_L x_1 = w_2 - c_L x_2$$

Vyjádříme mzdy w_1, w_2 *a dosadíme je do maximalizačního problému*

$$\max_{x_1,x_2} \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - (c_H - c_L)x_2 - c_L x_1 - c_H x_2$$

Řešení je

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{c_L}\right)^2, x_2 = \left(\frac{1}{2(2c_H - c_L)}\right)^2$$

Dosazením dostaneme

$$x_1 = 100, x_2 = 25, w_2 = \frac{45}{8}, w_1 = \frac{15}{8}$$

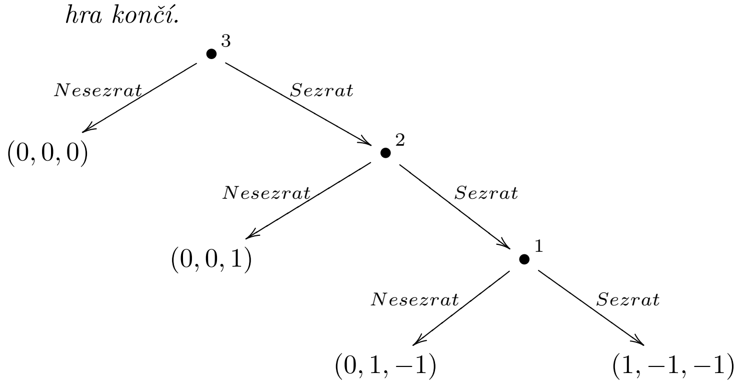
Očekávaný užitek je v oddělující rovnováze je

$$U_{oddelujici} = \frac{1}{2}(\sqrt{100} - \frac{45}{8}) + \frac{1}{2}(\sqrt{25} - \frac{15}{8}) = \frac{15}{4}$$

Zbývá ověřit, že podmínky, u kterých jsme předpokládali, že budou splněny (s nerovností) jsou skutečně splněny. Stačí do nich dosadit.

5. *Porovnáním zjistíme, že pro principála je optimální (vede k jeho nejvyššímu užitku) nabídnout dva různé kontrakty, jeden určený pro dodavatele s nízkými náklady a druhý pro dodavatele s vysokými náklady. Jednoduchý výpočet ukáže, že zisk dodavatele s vysokými náklady se nezměnil, neboť* $0 = \frac{15}{8} - \frac{3}{40} * 25 = 0$. *Zisk dodavatele s vysokými náklady vzroste z nuly v pozorovatelném případě na* $\frac{45}{8} - 5 = \frac{5}{8}$. *Množství vyráběné dodavatelem s nízkými náklady se nezměnil, zato klesl u dodavatele s vysokými náklady.*

Řešení 1.3 1. *Obrázek je jednoduchý, protože lev (hráč) má dvě možnosti a v případě, že se rozhodne nesežrat, hra končí.*



2. *Pokud hru řešíme od konce, musíme začít s rozhodnutím hráče, který hraje nakonec, tedy lva s číslem 1. Pokud je první lev na řadě, pak jsou ve hře dva lvi. Lev s číslem 1 se tedy rozhodne lva s číslem 2 sežrat, protože sežrán být nemůže a sežrat je lepší než nesežrat. Druhý lev toto bere v úvahu, když se rozhoduje o úroveň výš, tedy když se rozhoduje o tom, zda sežrat lva s číslem 3. Je pro něj optimální nesežrat lva s číslem 3, protože kdyby ho sežral, tak by byl pak následně sežrán. Je tedy lepší nesežrat. Třetí lev toto bere v úvahu a proto je optimální sežrat lva s číslem 4 atd. Optimální strategie lichého lva je tedy sežrat sousedního lva. Sudý lev preferuje nesežrat sousedního lva.*

Řešení 1.4 1. *Optimální pozice je 301 metrů od levého okraje.*[2] *Tím u vás nakoupí maximální počet lidí, celkem 700, a váš hrubý zisk je* $700 * (15 - 9) = 4200$. *Náklady jsou 1000Kč, takže čistý zisk je 3200 Kč, dostatečně mnoho na to, aby bylo optimální vstoupit i v případě, že hodnota vedlejší příležitosti je 3000Kč.*

2. *Pokud vám obecní úřad nařídí umístit stánek do pozice 300m od pravého okraje, přijde za vámi 500 lidí a dosáhnete hrubého zisku* $500 * 6 = 3000 Kč$, *což je více než přímé náklady (1000Kč), ale ne dost na to, abyste vstoupili pokud si jinde máte možnost vydělat 3000Kč, protože váš čistý zisk by byl menší (jen 2000Kč).*

[1] Kdyby jedna z těchto dvou podmínek nebyla splněna s rovností, existoval by lepší kontrakt pro principála stále přijatelný pro oba hráče.

[2] Pokud uvažujete vzdálenost jako spojitou veličinu, je optimální libovolná vzdálenost $300 + \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je malé číslo, menší než 1.