Zkouška 5.1.2009—poznámky k řešení

Tohle je stručný popis očekávaného řešení.

Příklad 1.1 (Pojištění) *Váš majetek je 1 milión Kč. Hrozí vám ale nehoda, při které přijdete o všechen majetek. Tato nehoda vám hrozí s pravděpodobností $1-p \in (0,1)$. Pokud k nehodě nedojde, o žádný majetek nepřijdete.*

1. *Kolik jste ochotni zaplatit za pojištění, které stojí A a nahradí vám veškerou škodu, pokud vám nějaká vznikne, jste-li neutrální vzhledem k riziku?*
2. *Kolik jste ochotni za toto pojištění zaplatit, je-li vaše užitková funkce $u(x) = \sqrt{x}$? Jste averzní k riziku nebo naopak máte riziko rádi?*
3. *Kolik jste ochotni zaplatit, pokud je vaše užitková funkce $v(x) = x^\alpha, \alpha \in (0,2)$? Jsou hráči s vyšším α ochotni zaplatit vyšší částku za pojištění, pro dané p? Co vám to říká o jejich postoji k riziku?*

Řešení 1.1

1. *Jestliže je hráč neutrální vzhledem k riziku, je jeho užitek stejný v případě zakoupení pojištění v ceně $A = p1\,000\,000$, jako v případě nezakoupení žádného pojištění. Poznámka: Tento případ odpovídá užitkové funkci $u(x) = x$, a to až na její lineární transformaci.*
2. *V tomto případě musíme opět porovnat očekávané užitky*
$$\sqrt{1\,000\,000 - A} = p\sqrt{1\,000\,000} + (1-p)\sqrt{0}$$
Umocněním a jednoduchou úpravou dostaneme
$$A = 1\,000\,000(1-p^2)$$
3. *Podobně jako v předešlém případě*
$$(1\,000\,000 - A)^\alpha = p(1\,000\,000)^\alpha + 0,$$
z čehož lze vyjádřit
$$A = 1\,000\,000(1 - p^{\frac{1}{\alpha}})$$
Chování A při rostoucím α zjistíme derivováním. Záporné znaménko výsledku (nezapomeňte, že $p < 1$) nám říká, že hráč s vyšším α je ochoten zaplatit menší částku za pojištění, tedy je méně averzní k riziku.

Příklad 1.2 *Vzdělání*

Na pracovním trhu existují dva typy dělníků: chytří a hloupí. Chytrý dělník vydělá firmě X, hloupý $Y < X$. Na trhu existuje řada potenciálních firem (více než zaměstnanců), takže zaměstnanci obdrží mzdu rovnou průměrné produktivitě zaměstnanců ve stejné skupině. Existují dvě možné skupiny dělníku: ti, co mají maturitu a ti, co ji nemají. Neexistuje jiná možnost, jak by mohl chytrý zaměstnanec prokázat své schopnosti zaměstnavateli. Oba typy dělníku se vyskytují stejně často a jejich vedlejší příležitosti jsou nulové.

1. *Jakou (maximální) mzdu jsou zaměstnavatelé ochotni vyplácet, pokud nikdo nemá žádné vzdělání?*
2. *Jaké mzdy by byly vypláceny v případě, že chytří dělníci mají maturitu, ale hloupí ne?*
3. *Předpokládejte, že získat maturitu chytrého dělníka nic nestojí, ale hloupý dělník musí zaplatit $z > 0$. Předpokládejte, že užitek pracovníka je roven jeho mzdě, po odečtení případných nákladů na získání vzdělání. Jaké musí být z, aby v rovnováze jen chytří dělníci získali maturitu?*
4. *Pro jaké z budou vzdělání získávat oba typy dělníků? Předpokládejte pro jednoduchost, že zaměstnavatel by v takové rovnováze očekával, že dělník bez maturity je hloupý. Kdo je na tom lépe ve srovnáním se situací, kdy by žádné vzdělání neexistovalo?*

Řešení 1.2

1. *Jakmile zaměstnavatelé nabídnou kladnou mzdu, přilákají oba typy dělníků. V průměru je jejich produktivita $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$, což je zároveň i maximální mzda, kterou zaměstnavatelé jsou ochotni vyplácet.*
2. *Pokud všichni chytří dělníci mají maturitu, průměrná produktivita této skupiny je X a to je tedy i maximální mzda, kterou jsou firmy ochotny dělníkům s maturitou vyplácet. Dělníci bez maturity jsou všichni hloupí a mají proto produktivitu Y, což je i maximální mzda kterou jsou zaměstnavatelé ochotni této skupině vyplatit.*

3. *Pokud v rovnováze dělníci s maturitou jsou chytří, budou zaměstnavatelé dělníkům s maturitou nabízet X a těm bez maturity Y. Pro chytrého dělníka musí být optimální získat maturitu a protože to ho nic nestojí, stačí, aby $X \geq Y$, což je splněno z předpokladu. Aby hloupí dělník nechtěl usilovat o maturitu, musí platit že $X - z < Y$, tedy $z > X - Y$.*

4. *V rovnováze, ve které by oba typu dělníků měli maturitu, bude mzda dělníků s maturitou $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$. Zda jde o rovnováhu záleží na tom, jakou mzdu by byl zaměstnavatel ochoten zaplatit dělníkovi bez maturity. Jakmile by nabídl stejně nebo více než dělníkům s maturitou, jistě by nemohlo jít o rovnováhu, protože oba typy dělníku by udělali lépe, kdyby se o maturitu nesnažily. Předpokládejme tedy, že dělník bez maturity tedy dostane mzdu Y, vycházející z očekávání, že je hloupý. Chytrý dělník opět nemá důvod maturitu nezískat dokud $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y > X$, což platí. Hloupý dělník je ochoten maturitu získat pokud $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y - z > Y$, tedy pokud $z < \frac{1}{2}(X - Y)$. Pro nízké hodnoty nákladů hloupých dělníků tedy mohou existovat rovnováhy, ve kterých nedojde k oddělení obou typů, ale k nákladné a zbytečné investici do vzdělání hloupými dělníky. Ti jsou na tom (v tomto modelu!) hůře, než kdyby žádné vzdělání neexistovalo, protože musejí investovat z, ale získávají stejnou mzdu, $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$.*

Příklad 1.3 *Vyjednávání*

Dva hráči se účastní následujícího vyjednávacího procesu, ve kterém jde o dělení zisku X. První hráč podá nabídku[1] *(x_1, y_1) druhému hráči. Pokud ten ji odmítne, druhý hráč podá nabídku (x_2, y_2) prvnímu hráči. Pokud ten odmítne, hráči získají (x_3, y_3). Hra má tři kola, v prvním je to nabídka prvního hráče a odmítnutí či přijetí druhým hráčem, ve druhém kole naopak a ve třetím kole je to obdržení vedlejší příležitosti. Výhry se diskontují*[2] *faktorem $1 > \delta > 0$, který je stejný pro oba hráče. Hra končí přijetím nabídky, nebo po třetím kole. Nalezněte dokonalou rovnováhu vzhledem k podhrám, tedy optimální nabídky podávané příslušným hráčem a optimální odpovědi. Při řešení můžete předpokládat, že x_3, y_3 jsou dostatečně malé.*

Řešení 1.3 *Hru vyřešíme postupně, zpětnou indukcí od konce.*

1. *V poslední rozhodovací fázi hry se rozhoduje první hráč, zda přijmout danou nabídku od druhého hráče. Pokud mu druhý hráč nabídne alespoň δx_3, což je částka, kterou by získal kdyby nabídku odmítl, tak je pro něj výhodnější nabídku druhého hráče přijmout.*

2. *Ve druhém kole tedy druhý hráč nabídne druhému hráči právě δx_3, pokud to co mu zůstane je lepší než vedlejší příležitost y_3, kterou by získal kdyby první hráč nabídku odmítl. To je podmínka $X - \delta x_3 > \delta y_3$. Pokud by tato podmínka splněna nebyla, bylo by pro druhého hráče lepší dát nepřijatelnou nabídku prvnímu hráči a počkat si na jeho odmítnutí.*

3. *Berouce v úvahu předchozí výsledky, druhý hráč je ochoten přijmout každou nabídku, která mu v prvním kole zaručí alespoň současnou hodnotu možné výhry v budoucím kole, tedy přijme každou nabídku y_1 takovou, že $y_1 \geq \max\{\delta(X - \delta x_3), \delta^2 y_3\} = y_1^*$.*

4. *Pokud první hráč nabídne druhému hráči alespoň y_1^*, tak bude přijata. Je optimální takovou nabídku podat, pokud prvnímu hráči zůstane více, než kolik by si mohl zajistit v dalším kole, což je δx_3 v druhém kole, ekvivalentní $\delta^2 x_3$ v prvním kole. Strategie hráčů záleží na splnění těchto podmínek a lze je snadno popsat.*

Příklad 1.4 *Hlasování nakupováním Předpokládejte, že jste byli najmuti pro plánování výroby jednoho chovatele krav. Krávy se používají na dvě věci—na maso a na mléko. Náklady na chov krav jsou pro tohoto chovatele kvadratické v počtu chovaných krav, $c(q) = cq^2$, $c > 0$. Z každé krávy je jedna jednotka masa a jedna jednotka mléka. Kromě nákladů na chov krávy nejsou žádné další náklady s výrobou masa nebo mléka. Na trhu existuje stabilní cena mléka $p > 0$ a cena masa $P > 0$. Protože existuje velká řada chovatelů vyrábějící homogenní statky, tato cena se nezmění se změnou vyráběného množství právě tímto chovatelem. Chovatel se rozhoduje, kolik krav vypěstuje a jeho cíl je maximalizovat svůj zisk.*

1. *Jaké je optimální množství krav, které má studovaný chovatel vypěstovat? Vyplatí se vyhodit prodat jiné množství mléka než masa, tj. vychovat určité množství krav a z nich vyrobené mléko nebo maso vyhodit?*

2. *Předpokládejte, že existuje vegetariánské hnutí, sdružující lidi, kteří nejí maso. Vůdce této skupiny prohlásí, že by členové měli přestat pít mléko, protože kupováním mléka podporují chování krav. Diskutujte, zda má pravdu tak, že uvážíte vliv změny ceny p na celkový zisk chovatele a množství chovaných krav. Poklesne toto množství, když klesne cena mléka p z důvodů kampaně vegetariánů?*

[1] První složka vektoru označuje podíl prvního hráče, druhá složka podíl druhého hráče při daném rozdělení.
[2] To znamená že výhra A v kole n má pro hráče stejnou hodnotu jako výhra $A\delta$ v kole $n - 1$.

Řešení 1.4 *1. Protože z prodeje každé jednotky mléka i masa plyne chovateli kladný zisk, množství vyrobeného a prodaného masa i mléka je stejné, chovateli se nevyplatí vyhodit mléko nebo maso. Optimální množství zjistíme tak, že porovnáme mezní náklady ($2cn$) a mezní příjem ($p + P$), takže optimální množství krav je* $n = \frac{p+P}{2c}$.

2. Zisk chovatele je $\frac{(p+P)^2}{4c}$*. Vidíme (využitím například první derivace), že když poklesne cena p, tak poklesne jak vyráběné množství, tak zisk chovatele.*