Matematické modely v ekonomii

Úvod do Teorie Her

Jan Myslivecek

CERGE-EI

19.září 2008

Technické informace 1.

- Jan Myslivecek, CERGE-EI, Praha, email: jan.myslivecek@cerge-ei.cz
- Konzultace: v dny výuky, po dohodě

Technické informace 1.

- Jan Myslivecek, CERGE-EI, Praha, email: jan.myslivecek@cerge-ei.cz
- Konzultace: v dny výuky, po dohodě
- Plánované termíny přednášek (změna vyhrazena)
  - 19.září
  - 3.října
  - 17.října
  - 31.října
  - 7.listopadu
  - 21.listopadu
  - 5.prosince
  - 12. prosince - zkouška, Q&A

Technické informace 2.

- Domácí úkoly - individuální, příprava ke zkoušce

Technické informace 2.

- Domácí úkoly - individuální, příprava ke zkoušce
- Zkouška - písemná, 2-3 hodiny, příklady
- Tři typy otázek:
  - probrané modely (jiná čísla)
  - aplikace či modifikace modelů
  - neformální, intuitivní diskuse implikací alternativních předpokladů

Technické informace 2.

- Domácí úkoly - individuální, příprava ke zkoušce
- Zkouška - písemná, 2-3 hodiny, příklady
- Tři typy otázek:
  - probrané modely (jiná čísla)
  - aplikace či modifikace modelů
  - neformální, intuitivní diskuse implikací alternativních předpokladů
- Cvičení a přednášky se budou prolínat
- Účast nebude vyžadována (ale bude užitečná)

Předpoklady, Literatura

Předpoklady kurzu:

- Žádné formální předpoklady
- Praktické dovednosti teorie pravděpodobnosti, derivace, integrály,
- Matematický formalismus (předpoklad, definice, důkaz)
- Samostatné dostudovávání
- Elementární ekonomické znalosti výhodou, ale ne nutné

Předpoklady, Literatura

Předpoklady kurzu:

- Žádné formální předpoklady
- Praktické dovednosti teorie pravděpodobnosti, derivace, integrály,
- Matematický formalismus (předpoklad, definice, důkaz)
- Samostatné dostudovávání
- Elementární ekonomické znalosti výhodou, ale ne nutné

Zdroje a materiály

- Prezentace
- Text ke kurzu
- V angličtině - online texty knih, články
- Zdroje vždy uvedeny k příslušné kapitole

Obsah a cíle kurzu

Cíle kurzu:

- Ukázka moderní ekonomie a způsobů využití matematiky

Obsah a cíle kurzu

Cíle kurzu:

- Ukázka moderní ekonomie a způsobů využití matematiky
- Schopnost sestavit model pro existující situaci, vyřešit ho a interpretovat výsledky

Obsah a cíle kurzu

Cíle kurzu:

- Ukázka moderní ekonomie a způsobů využití matematiky
- Schopnost sestavit model pro existující situaci, vyřešit ho a interpretovat výsledky

Očekávaný obsah kurzu:

- Úvod do Teorie Her
- Teorie vyjednávání
- Modely asymetrické informace (principál-agent)
- Modely nedokonalé konkurence (Bertrand, Cournot, Stackelberg)
- Modely kvality (horizontální a vertikální diferenciace)
- Teorie informací a komunikace (cheap talk)
- Aukce, morální hazard, signaling, selekce

Obsah a cíle kurzu

Cíle kurzu:

- Ukázka moderní ekonomie a způsobů využití matematiky
- Schopnost sestavit model pro existující situaci, vyřešit ho a interpretovat výsledky

Očekávaný obsah kurzu:

- Úvod do Teorie Her
- Teorie vyjednávání
- Modely asymetrické informace (principál-agent)
- Modely nedokonalé konkurence (Bertrand, Cournot, Stackelberg)
- Modely kvality (horizontální a vertikální diferenciace)
- Teorie informací a komunikace (cheap talk)
- Aukce, morální hazard, signaling, selekce

Otázky?

Úvod

- Libor Polák: Teorie Her

Úvod

- Libor Polák: Teorie Her
- TH je jeden ze základních nástrojů současné ekonomie
- Dva základní typy formulace - hry v normální formě, poziční hry
- Základní pojmy, stručný přehled
- Triviální počty, abstraktní pojmy, příklady

Hry v normální formě

- Dva hráči, každý má minci a tu nějak otočí
- Při shodě symbolů vyhrává první hráč 1Kč, jinak druhý

Hry v normální formě

- Dva hráči, každý má minci a tu nějak otočí
- Při shodě symbolů vyhrává první hráč 1Kč, jinak druhý
- Hráči, strategie (každého hráče), vyhodnocení

Hry v normální formě

- Dva hráči, každý má minci a tu nějak otočí
- Při shodě symbolů vyhrává první hráč 1Kč, jinak druhý
- Hráči, strategie (každého hráče), vyhodnocení

Definice

Hrou v normální formě nazýváme trojici

$$\{N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i : S_1 \times \cdots S_N \longrightarrow \mathbb{R}\}_{i \in N}\},$$

kde N je konečná množina hráčů, S_i je množina strategií i-tého hráče, a u_i je výherní (payoff) funkce i-tého hráče

- Mince (Matching pennies)

		Hráč 2	
		P	O
Hráč 1	P	1,-1	-1,1
	O	-1,1	1,-1

Souboj pohlaví (koordinační hra)

- Dva manželé se rozhodují o večerním programu (hokej nebo balet?).

		Hráč 2	
		H	B
Hráč 1	H	2,1	0,0
	B	0,0	1,2

Souboj pohlaví (koordinační hra)

- Dva manželé se rozhodují o večerním programu (hokej nebo balet?).

		Hráč 2	
		H	B
Hráč 1	H	2,1	0,0
	B	0,0	1,2

- Zapište hru Kámen, nůžky, papír jako hru v normální formě.

Souboj pohlaví (koordinační hra)

- Dva manželé se rozhodují o večerním programu (hokej nebo balet?).

		Hráč 2 H	Hráč 2 B
Hráč 1	H	2,1	0,0
	B	0,0	1,2

- Zapište hru Kámen, nůžky, papír jako hru v normální formě.
- Vězňovo dilema: dva podezřelí ve vazbě. Není dostatek důkazů odsoudit je za těžký zločin bez přiznání. Přiznání je polehčující okolnost

		Hráč 2 P	Hráč 2 N
Hráč 1	P	$(-10,-10)$	$(0,-20)$
	N	$(-20,0)$	$(-2,-2)$

- Jaký výsledek očekáváte? Co by měla rozumná teorie her předpovědět?

Striktně dominovaná strategie

Definice

Strategii s_i nazýváme striktně dominovanou strategií $s_i^{\prime}$, jestliže užitek i-tého hráče je větší, pokud hraje strategii $s_i^{\prime}$ ve srovnání s užitkem z hraní strategie s_i, pro všechny možné kombinace strategií ostatních hráčů.

Striktně dominovaná strategie

Definice

Strategii s_i nazýváme striktně dominovanou strategií $s_i^{\prime}$, jestliže užitek i-tého hráče je větší, pokud hraje strategii $s_i^{\prime}$ ve srovnání s užitkem z hraní strategie s_i, pro všechny možné kombinace strategií ostatních hráčů.

Má nějaký hráč striktně dominovanou strategii ve Vězňově dilematu?

		Hráč 2	
		P	N
Hráč 1	P	$(-10, -10)$	$(0, -20)$
	N	$(-20, 0)$	$(-2, -2)$

Striktně dominovaná strategie

Definice

Strategii s_i nazýváme striktně dominovanou strategií $s_i^{\prime}$, jestliže užitek i-tého hráče je větší, pokud hraje strategii $s_i^{\prime}$ ve srovnání s užitkem z hraní strategie s_i, pro všechny možné kombinace strategií ostatních hráčů.

Má nějaký hráč striktně dominovanou strategii ve Vězňově dilematu?

		Hráč 2	
		P	N
Hráč 1	P	$(-10, -10)$	$(0, -20)$
	N	$(-20, 0)$	$(-2, -2)$

A co ve hře Kámen, nůžky, papír ?

Opakovaná eliminace striktně dominovaných strategií

Definice

Lze-li odebírat striktně dominované strategie dokud každému hráči nezůstane jediná, pak takovou hru nazýváme řešitelnou pomocí opakované eliminace striktně dominovaných strategií.

- Spoustu her takto vyřešit nelze (Mince, KNP)
- Eliminace slabě dominovaných strategií $\Longrightarrow$ nejednoznačnost
- Řešení hry Souboj pohlaví?

Opakovaná eliminace striktně dominovaných strategií

Definice

Lze-li odebírat striktně dominované strategie dokud každému hráči nezůstane jediná, pak takovou hru nazýváme řešitelnou pomocí opakované eliminace striktně dominovaných strategií.

- Spoustu her takto vyřešit nelze (Mince, KNP)
- Eliminace slabě dominovaných strategií $\Longrightarrow$ nejednoznačnost
- Řešení hry Souboj pohlaví?
- Rovnováha jako řešení: nikdo nemá zájem hrát (sám o sobě) jinak

Nejlepší odpověď a Nashova rovnováha

Definice

Daná strategie určitého hráče je nejlepší odpovědí na dané strategie ostatních hráčů, pokud neexistuje strategie, která by vedla k vyššímu užitku tohoto hráče.

- Napište tuto definici formálně

Definice

Nashovou rovnováhou nazýváme souhrn strategií $(s_i)_{i \in N}$ takový, že strategie každého hráče je nejlepší odpovědí na strategie (s_{-i}) ostatních hráčů.

Nejlepší odpověd a Nashova rovnováha

Definice

Daná strategie určitého hráče je nejlepší odpovědí na dané strategie ostatních hráčů, pokud neexistuje strategie, která by vedla k vyššímu užitku tohoto hráče.

- Napište tuto definici formálně

Definice

Nashovou rovnováhou nazýváme souhrn strategií $(s_i)_{i \in N}$ *takový, že strategie každého hráče je nejlepší odpovědí na strategie* (s_{-i}) *ostatních hráčů.*

- Nalezněte všechny N. rovnováhy hry Souboj pohlaví a Mince

Existence a pravděpodobnostní rozšíření

- Nashova rovnováha nemusí existovat, nebo jich může existuje několik

Definice

Pravděpodobností rozšíření hry v normální formě $\{N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}\}$ *je hra* $\{N, \{\triangle S_i\}_{i \in N}, \{U_i\}_{i \in N}\}$, *kde* $\triangle S_i$ *je množina pravděpodobnostních rozdělení nad množinou* S_i *a* $U_i : \triangle S_1 \times \cdots \triangle S_N \to \mathbb{R}$ *přiřazuje každému prvku množiny* $\sigma \in \triangle S_1 \times \cdots \triangle S_N$ *očekávanou (střední) hodnotu hry*

$$U_i(s) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j \in N} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s),$$

pro konečné množiny S.

- Množinu čistých strategií lze přirozeně identifikovat s podmnožinou smíšených strategií
- Nashova rovnováha ve smíšených strategiích

Existence a pravděpodobnostní rozšíření

- Nashova rovnováha nemusí existovat, nebo jich může existuje několik

Definice

Pravděpodobností rozšíření hry v normální formě $\{N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}\}$ *je hra* $\{N, \{\triangle S_i\}_{i\in N}, \{U_i\}_{i\in N}\}$, *kde* $\triangle S_i$ *je množina pravděpodobnostních rozdělení nad množinou* S_i *a* $U_i : \triangle S_1 \times \cdots \triangle S_N \rightarrow \mathbb{R}$ *přiřazuje každému prvku množiny* $\sigma \in \triangle S_1 \times \cdots \triangle S_N$ *očekávanou (střední) hodnotu hry*

$$U_i(s) = \sum_{s\in S} \left(\prod_{j\in N} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s),$$

pro konečné množiny S.

- Množinu čistých strategií lze přirozeně identifikovat s podmnožinou smíšených strategií
- Nashova rovnováha ve smíšených strategiích
- Nalezněte N. rovnováhy ve s.s. pro hru Mince a Souboj pohlaví.

Poziční hry—příklad

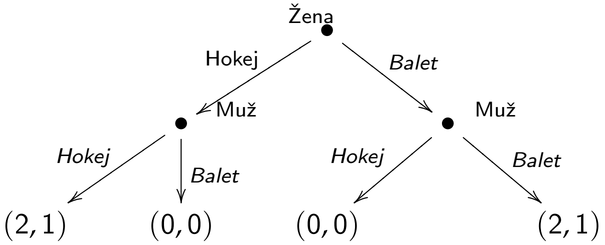
- Volba akcí po sobě (nejprve první, až pak druhý hráč)
- Normální forma je nevhodná
- Poziční hra—explicitní struktura hry

Poziční hry—příklad

- Volba akcí po sobě (nejprve první, až pak druhý hráč)
- Normální forma je nevhodná
- Poziční hra—explicitní struktura hry
- Souboj pohlaví sekvenčně—prvně žena, pak muž. Zapište v normální formě.
- Hráči, kdo kdy hraje, co může udělat, co ví, kolik kdo dostane na konci

Poziční hry—příklad

- Volba akcí po sobě (nejprve první, až pak druhý hráč)
- Normální forma je nevhodná
- Poziční hra—explicitní struktura hry
- Souboj pohlaví sekvenčně—prvně žena, pak muž. Zapište v normální formě.
- Hráči, kdo kdy hraje, co může udělat, co ví, kolik kdo dostane na konci



Definice poziční hry s úplnou informací

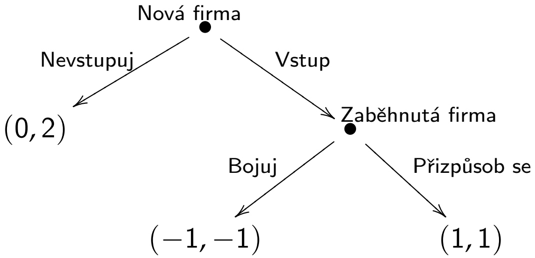
Definice

Poziční hrou s perfektní informací nazýváme 5-tici

$$\{N, H, Z, P : H \backslash Z \to N, \{u_i : Z \to \mathbb{R}\}_{i \in N}\},$$

- N *je konečná množina hráčů,*
- *prvky množiny* H *nazýváme historie, prvky historií nazýváme akce.*
- $Z \subset H$ *je množina terminálních historií*
- *Funkce* P *přiřazuje každé neterminální historii hráče, který po dané historii hraje (volí akci).*

Hra o vstupu na trh



- Řešení hry?

Nashova rovnováha v pozičních hrách

- Strategie—předpis akcí pro daného hráče kdykoliv hraje
- Nashova rovnováha—strategický profil bez možnosti jednostranného polepšení si pro každého hráče.

Nashova rovnováha v pozičních hrách

- Strategie—předpis akcí pro daného hráče kdykoliv hraje
- Nashova rovnováha—strategický profil bez možnosti jednostranného polepšení si pro každého hráče.
- Nashovy rovnováhy Hry o vstup na trh

Nashova rovnováha v pozičních hrách

- Strategie—předpis akcí pro daného hráče kdykoliv hraje
- Nashova rovnováha—strategický profil bez možnosti jednostranného polepšení si pro každého hráče.
- Nashovy rovnováhy Hry o vstup na trh
- Nashových rovnováh může existovat několik
- Ne všechny dávají smysl

Zpětná indukce

- Racionální hráči

Zpětná indukce

- Racionální hráči
- Postup od konce
- Formálně—racionální chování (tj. Nashova rovnováha) v každé podhře
- Hra o vstupu na trh
- Dokonalá rovnováha vzhledem k podhrám

Poziční hry s neúplnou informací

- Informace ve hrách v normální formě

Poziční hry s neúplnou informací

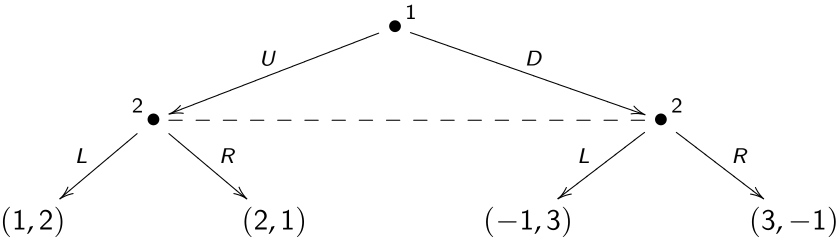
- Informace ve hrách v normální formě
- Poziční hry—jak hrál předchozí hráč?

Poziční hry s neúplnou informací

- Informace ve hrách v normální formě
- Poziční hry—jak hrál předchozí hráč?
- Definice pomocí informačních množin—dělení (partition) množiny historií daného hráče

Poziční hry s neúplnou informací

- Informace ve hrách v normální formě
- Poziční hry—jak hrál předchozí hráč?
- Definice pomocí informačních množin—dělení (partition) množiny historií daného hráče
- Akce hráče musejí být stejné pro všechny historie v dané informační množině



Pravděpodobnostní rozšíření

- V čistých strategiích často neexistuje NR
- Dvě možnosti pravděpodobnostního rozšíření

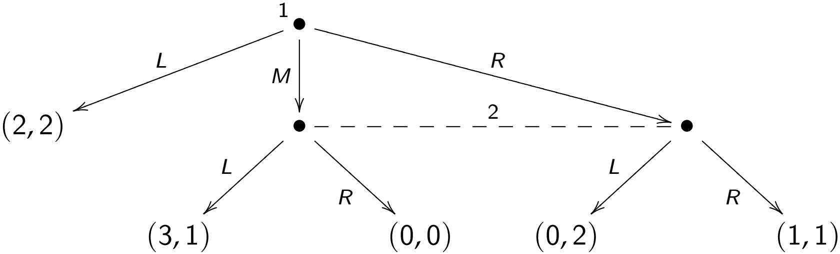
Pravděpodobnostní rozšíření

- V čistých strategiích často neexistuje NR
- Dvě možnosti pravděpodobnostního rozšíření
- Smíšená strategie—pravděpodobnostní rozšíření strategií
- Behaviorální—pravděpodobností rozdělení na množině akcí v každé informační množině

Pravděpodobnostní rozšíření

- V čistých strategiích často neexistuje NR
- Dvě možnosti pravděpodobnostního rozšíření
- Smíšená strategie—pravděpodobnostní rozšíření strategií
- Behaviorální—pravděpodobností rozdělení na množině akcí v každé informační množině
- Přístupy jsou podobné, ale ne totožné

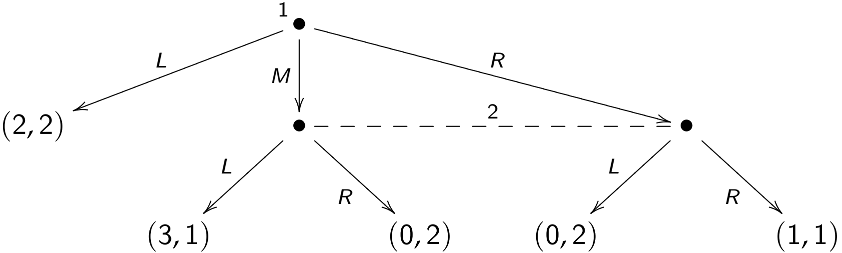
- Příklad



- Pro druhého hráče není podstatné, kde v informační množině se nachází

Příklady 2.

- Jindy na tom záleží



- Očekávání: odhad (pravděpodobnost) pozice v každé informační množině
- Odhad by měl být racionální

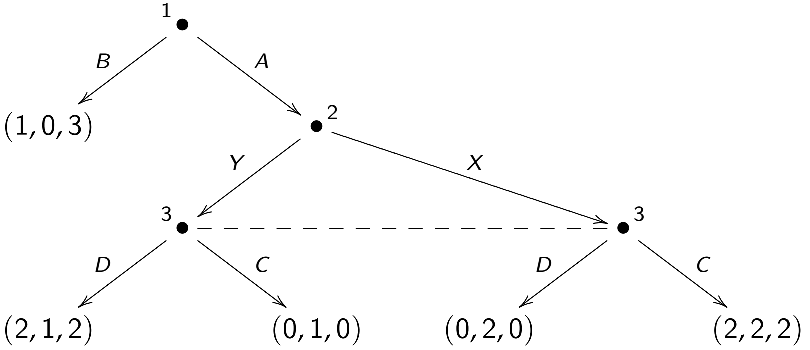
Slabá Bayesova rovnováha (WPBE)

- Očekávání jsou odvozena z Bayesova vzorce, kde je to možné
- Libovolná očekávání v informačních množinách, kterých není dosaženo
- WPBE: optimální behaviorální strategie $(\beta_i(I_i))$, očekávání μ^*

Slabá Bayesova rovnováha (WPBE)

- Očekávání jsou odvozena z Bayesova vzorce, kde je to možné
- Libovolná očekávání v informačních množinách, kterých není dosaženo
- WPBE: optimální behaviorální strategie $(\beta_i(I_i))$, očekávání μ^*

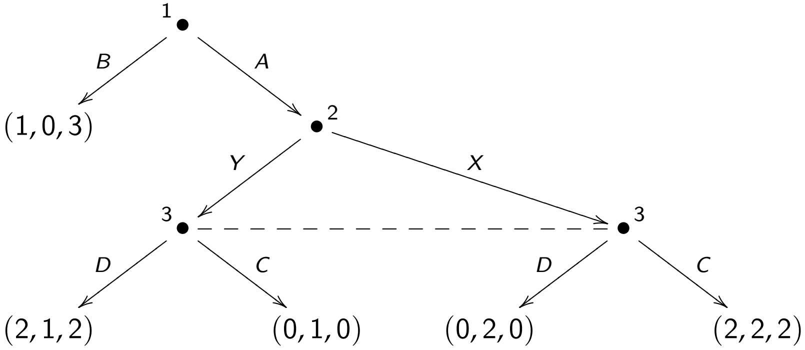
Nalezněte DRVP, WPBE:



Slabá Bayesova rovnováha (WPBE)

- Očekávání jsou odvozena z Bayesova vzorce, kde je to možné
- Libovolná očekávání v informačních množinách, kterých není dosaženo
- WPBE: optimální behaviorální strategie $(\beta_i(I_i))$, očekávání μ^*

Nalezněte DRVP, WPBE:



- Jedna DVRP, dvě WPBE—libovolná očekávání

Sekvenční racionalita

- Dvě možnosti vylepšení: požadavek na očekávání či vynucení B. pravidla

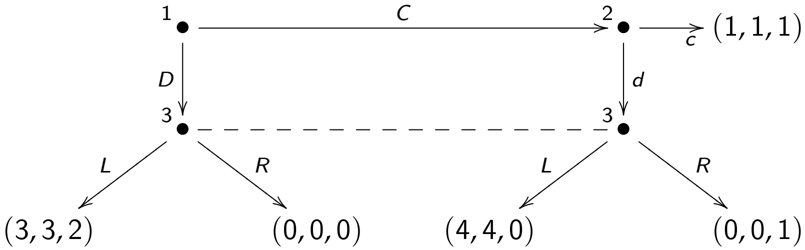
Sekvenční racionalita

- Dvě možnosti vylepšení: požadavek na očekávání či vynucení B. pravidla
- Dokonale smíšené strategie: každá akce zvolena s kladnou pravděpodobností
- Nejsou vhodné pro popis rovnováh

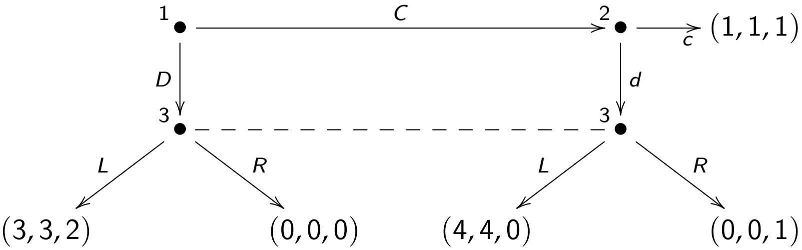
Sekvenční racionalita

- Dvě možnosti vylepšení: požadavek na očekávání či vynucení B. pravidla
- Dokonale smíšené strategie: každá akce zvolena s kladnou pravděpodobností
- Nejsou vhodné pro popis rovnováh
- Konzistentní strategie: limitně dosažitelné pomocí dokonale smíšených strategií
- Podmínění užitku na dosažení dané informační množiny
- Volba optimální strategie i v těch i.m., kterých není v rovnováze dosaženo
- Sekvenčně racionální rovnováha: konzistentní, optimální v každé informační množině

Příklad

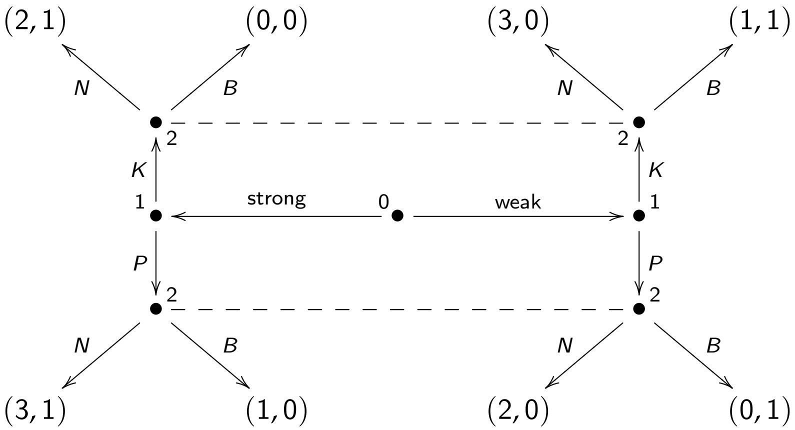


Příklad

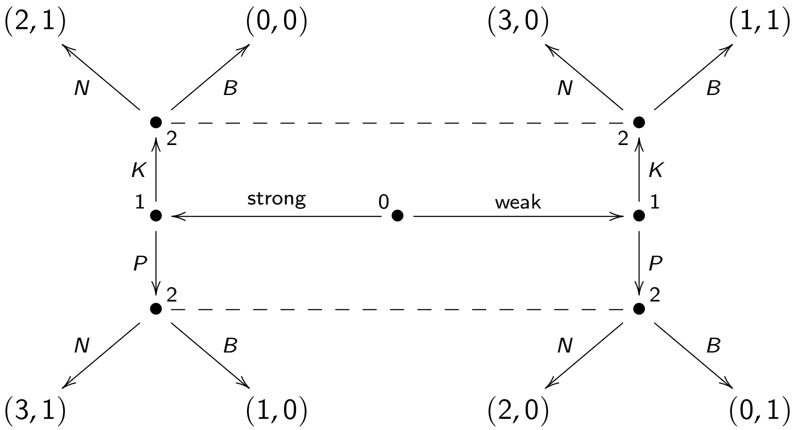


- Nashovy rovnováhy (ve smíšených či behaviorálních strategiích)
- Sekvenčně racionální strategie?

Pivo nebo koláček?

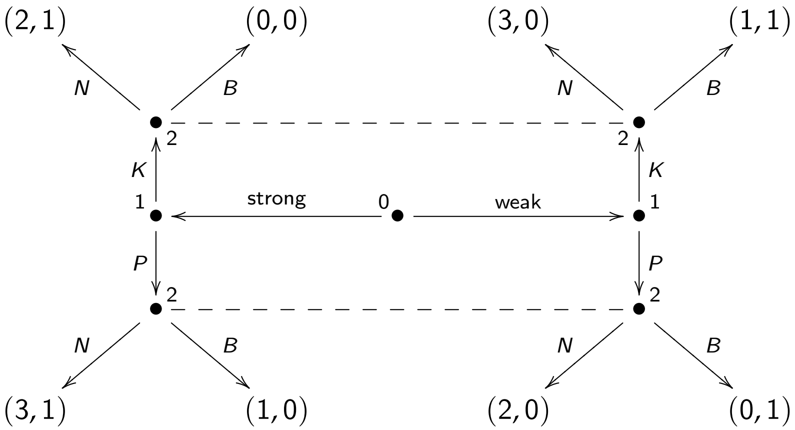


Pivo nebo koláček?



- Jedna ze sekvenčně racionálních rovnováh: oba typy hráče 1 volí K
- Druhý hráč bojuje jen když si někdo dá P:očekává, že je to slabý typ

Pivo nebo koláček?



- Jedna ze sekvenčně racionálních rovnováh: oba typy hráče 1 volí K
- Druhý hráč bojuje jen když si někdo dá P:očekává, že je to slabý typ
- Proč by slabý typ přešel na pivo?

Hodnota budoucích příjmů—diskontování

- Každé kolo příjem $x_i, i = 1, \dots, \infty$
- Diskontní faktor $0 < \delta < 1$
- Dnešní hodnota

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i x_i$$

Hodnota budoucích příjmů—diskontování

- Každé kolo příjem $x_i, i = 1, \ldots, \infty$
- Diskontní faktor $0 < \delta < 1$
- Dnešní hodnota

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i x_i$$

- Pro hry: akční profil $a = (a^t)$, výherní funkce u_i

$$U_i(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta^i u_j(a^i)$$

Hra s nekonečným počtem opakování

Definice

Nechť $G = \{N, \{S_i\}, \{u_i\}\}$ *je hra v normální formě,* $S = \times_i S_i$. *Hrou s nekonečným počtem opakování nazýváme poziční hru s dokonalou informací* $G' = \{N, H, P, \{U_i\}\}$, *kde*

- $H = \cup_{t=0}^{\infty} S^t, S^0 = \{\emptyset\}$
- $P(h) = N$ *pro každou neterminální historii* $h \in H$
- U_i *jsou definovány pomocí exponenciální diskontování.*

Historii nazýváme terminální, tehdy a jen tehdy, je-li nekonečná.

Minmax výhra

- Definujme minmax výhru v_i

$$v_i = min_{s_{-i} \in S_{-i}} max_{s_i \in S_i} U_i(s_{-i}, s_i)$$

- V N.R. nelze vyhrát méně
- Vynutitelný výherní profil $w : w_i \geq v_i, \forall i \in N$
- Striktně vynutitelný: $w_i > v_i$

Folk Theorem

- V opakovaných hrách tvoří každá NR vynutitelný výherní profil
- Ke každému vynutitelnému výhernímu profilu existuje blízká NR

Věta

Pro každý striktně vynutitelný výherní profil w hry G' a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta \in (0,1)$ a výherní profil w' hry G' takový, že $|w' - w| < \varepsilon$ a existuje Nashova rovnováha, pro níž je w' výherním profilem hry G' s nekonečným počtem opakování a diskontním faktorem δ.

- Spousta Nashových rovnováh
- Důkaz pomocí tzv. trigger strategií
- Lze studovat i dokonalé rovnováhy vzhledem k podhrám—na ekvivalenci to skoro nic nemění
- Pro DRVP stačí studovat odchylku v jediném kole po libovolné historii, pro všechny hráče

Opakované vězňovo dilemma

		Hráč 2	
		P	N
Hráč 1	P	$(-10, -10)$	$(0, -20)$
	N	$(-20, 0)$	$(-2, -2)$

- Pro jaký diskontní faktor lze pomocí trigger strategií vynutit spolupráci?

Opakované vězňovo dilemma

		Hráč 2	
		P	N
Hráč 1	P	$(-10,-10)$	$(0,-20)$
	N	$(-20,0)$	$(-2,-2)$

- Pro jaký diskontní faktor lze pomocí trigger strategií vynutit spolupráci?
- Stačí analyzovat jednorázovou odchylku v první periodě, pro jednoho z hráčů

$$
\begin{aligned}
U_1(\delta) &= -\sum_{i=0}^{\infty} 2\delta^i = -2\frac{1}{1-\delta} \\
U_1'(\delta) &= 0 - \sum_{i=1}^{\infty} 10\delta^i = -10\frac{\delta}{1-\delta}
\end{aligned}
$$

Porovnáním získáme podmínku pro Nashovu rovnováhu $\delta > \frac{1}{5}$.

Srhnutí

- Hry v normální formě
  - Striktně dominované strategie
  - Optimální odpověď
  - Nashova rovnováha
  - Pravděpodobnostní rozšíření

Srhnutí

- Hry v normální formě
  - Striktně dominované strategie
  - Optimální odpověď
  - Nashova rovnováha
  - Pravděpodobnostní rozšíření
- Poziční hry
  - S úplnou informací (NR, DRVP)
  - S neúplnou informací
  - Očekávání, slabá Bayesova rovnováha
  - Sekvenčně racionální rovnováha

Srhnutí

- Hry v normální formě
  - Striktně dominované strategie
  - Optimální odpověď
  - Nashova rovnováha
  - Pravděpodobnostní rozšíření
- Poziční hry
  - S úplnou informací (NR, DRVP)
  - S neúplnou informací
  - Očekávání, slabá Bayesova rovnováha
  - Sekvenčně racionální rovnováha
- Opakované hry
  - Hra s nekonečným počtem opakování
  - Diskontování
  - Folk Theorem: popis Nashových rovnováh