ANALÝZA A KLASIFIKACE DAT

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

VIII.
ANALÝZA HLAVNÍCH KOMPONENT

ZAČÍNÁME

ANALÝZA HLAVNÍCH KOMPONENT

PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS (PCA)

ROZKLAD PODLE VLASTNÍCH ČÍSEL

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVD)

Karhunenova-Loevova transformace

ZAČÍNÁME

- **extrakce příznaků** - hledání zobrazení (optimálního) Z, které transformuje původní m rozměrný prostor (obraz) na prostor (obraz) n rozměrný ($m \geq n$);
- nalezení vhodné transformace – potřeba optimalizačního kritéria:
  - obrazy v novém prostoru budou aproximovat původní obrazy ve smyslu minimální střední kvadratické odchylky;
  - obrazy v novém prostoru budou minimalizovat odhad pravděpodobnosti chyby

ZAČÍNÁME

- aby byla úloha řešitelná, hledáme zobrazení v oboru lineárních zobrazení

ZAČÍNÁME

- aby byla úloha řešitelná, hledáme zobrazení v oboru lineárních zobrazení

Jak poznáme lineární zobrazení?

ZAČÍNÁME

- aby byla úloha řešitelná, hledáme zobrazení v oboru lineárních zobrazení

Jak poznáme lineární zobrazení?

TEORIE

- předpokládejme, že je dáno K obrazů a nechť existuje m příznakových veličin, které tyto obrazy charakterizují. Tedy k-tý obraz je vyjádřen m rozměrným sloupcovým vektorem $\mathbf{y}_k \in \mathcal{Y}^m$, k=1,…,K.
- aproximujme nyní kterýkoliv obraz $\mathbf{y}_k$ lineární kombinací n ortonormálních vektorů $\mathbf{e}_i$ ($m \geq n$)

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^{n} \quad \text{(☺)}$$

TEORIE

- koeficienty c_{ki} lze považovat za velikost i-té souřadnice vektoru $\mathbf{y}_k$ vyjádřeného v novém systému souřadnic s bází $\mathbf{e}_i$, i=1,2,…,n, tj. platí

$$\mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}\mathbf{e}_i.$$

- použijeme-li jako kritérium minimální střední kvadratické odchylky, pak je

$$\varepsilon^2 = \left\| \mathbf{y}_k - \sum_{i=1}^{n} c_{ki}\mathbf{e}_i \right\|^2.$$

TEORIE

- pak pomocí dříve uvedených vztahů pro $\mathbf{x}_k$ a c_{ki} dostaneme

$$\varepsilon = \|\mathbf{y}_k\|^2 - \sum_{i=1}^{n}$$

- střední kvadratická odchylka pro všechny obrazy $\mathbf{y}_k$, k=1,…,K je

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{K} \varepsilon = \sum_{k=1}^{K} \|\mathbf{y}_k - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{y}_k\|^2 .$$

(je tedy závislá na volbě bázového systému $\mathbf{e}_i$)

TEORIE

- diskrétní konečný rozvoj podle vztahu (☺) s bázovým systémem $\mathbf{e}_i$, optimálním podle kritéria minimální střední kvadratické chyby nazýváme diskrétní Karhunenův – Loevův rozvoj;
- aby střední kvadratická odchylka podle výše uvedeného vztahu byla minimální, musí být odečítaná hodnota na pravé straně rovnice maximální.

TEORIE

- musíme tedy maximalizovat výraz

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_1^T(\mathbf{y})\mathbf{e}_1, \quad \text{kde } \mathbf{e}_1(\mathbf{y}) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \mathbf{y}_k \cdot \mathbf{y}_k^T$$

je autokorelační matice řádu m. Protože je symetrická a semidefinitní, jsou její vlastní čísla λ_i, i=1,…,m, reálná a nezáporná a vlastní vektory $\mathbf{v}_i$, jsou buď ortonormální, nebo je můžeme ortonormalizovat (v případě násobných vlastních čísel).

TEORIE

- uspořádáme-li vlastní čísla sestupně podle velikosti, tj.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m \geq 0$$

a podle toho očíslujeme i odpovídající charakteristické vektory, lze dokázat, výe uvedený výraz dosahuje maxima, jestliže platí

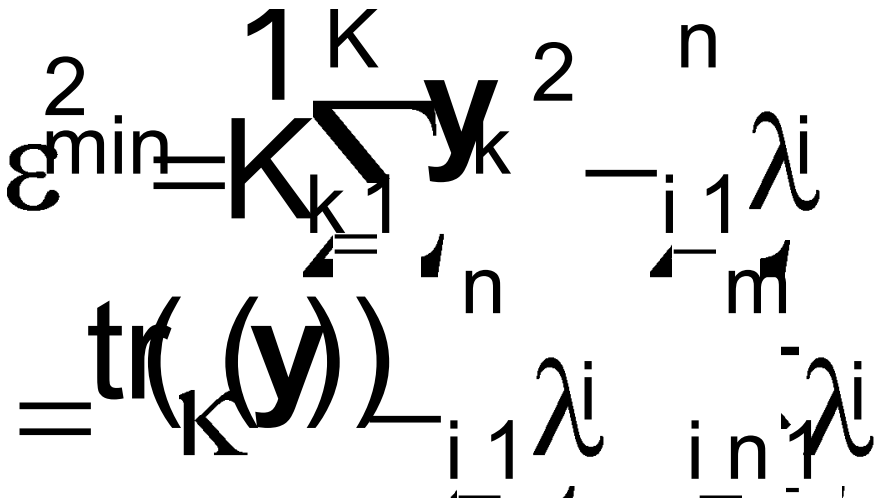
$$\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i,\ i=1,\ldots,n$$

a pro velikost maxima je

$$\max \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i^T(\mathbf{y})\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

TEORIE

- pro minimální střední kvadratickou odchylku tedy platí



TEORIE

- v některých případech je vhodnější vektory $\mathbf{y}_k$ před aproximací centrovat se střední hodnotou

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{y}_k$$

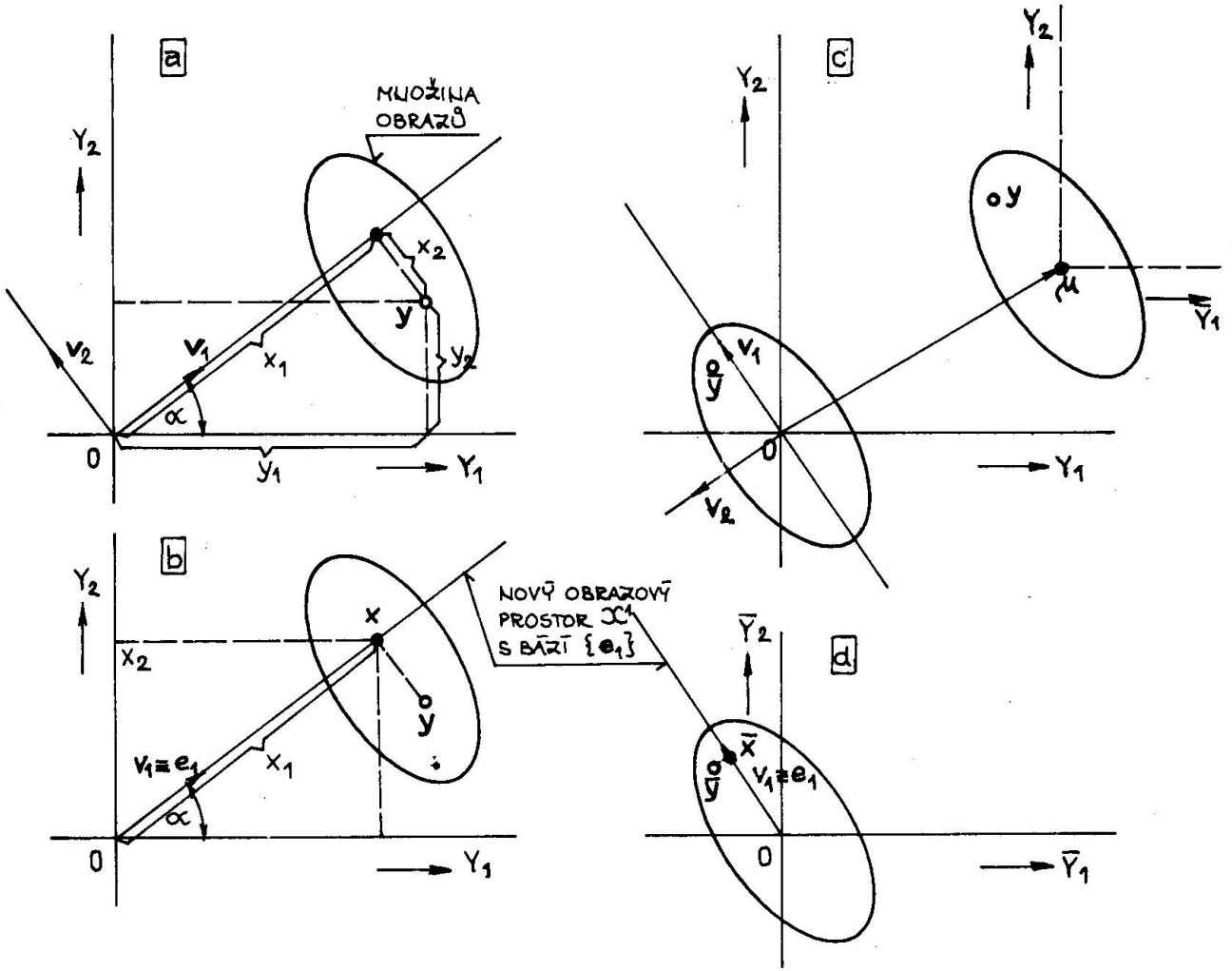
a místo s obrazem $\mathbf{y}_k$ počítáme s jeho centrovanou verzí $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\mu}$.

Postup výpočtu se nemění, ale místo autokorelační matice používáme disperzní matici ve tvaru

$$\mathbf{D} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\tilde{\mathbf{y}}_k\tilde{\mathbf{y}}_k^{T}$$

Platí $\mathbf{y}_k = \tilde{\mathbf{y}}_k + \boldsymbol{\mu}$

GEOMETRICKÁ INTERPRETACE



VLASTNOSTI

- při daném počtu n členů rozvoje poskytuje ze všech možných aproximací nejmenší střední kvadratickou odchylku;
- při použití disperzní matice jsou transformované souřadnice nekorelované; pokud se výskyt obrazů řídí normálním rozložením zajišťuje nekorelovanost i jejich nezávislost;
- vliv každého členu uspořádaného rozvoje se zmenšuje s jeho pořadím;
- změna požadavků na velikost střední kvadratické odchylky nevyžaduje přepočítávat celý rozvoj, nýbrž jen změnit počet jeho členů.

ROZDĚLENÍ DO TŘÍD

Jak se změní podmínky, když obrazy **y** budou platit, které budou vymezeny jako části spojitého obrazového prostoru $\mathcal{Y}^m$?

- Výskyt obrazů v jednotlivých klasifikačních třídách bude popsán podmíněnými hustotami pravděpodobnosti $p(\mathbf{y}|\omega_r)$, $r=1,2,\ldots,R$ a apriorní pravděpodobnost klasifikačních tříd bude $P(\omega_r)$.

V tom případě autokorelační matice bude

$$\mathbf{K}(\mathbf{y}) = \sum_{r=1}^{R} P(\omega_r) \int_{\mathcal{Y}^m} \mathbf{y}\mathbf{y}^T p(\mathbf{y}|\omega_r)\,d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{Y}^m} \mathbf{y}\mathbf{y}^T p(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$

ROZDĚLENÍ DO TŘÍD

- disperzní matice

$$D(y) = \sum_{r=1}^{R} P(\omega_r) \cdot \int_{\mathcal{Y}_m} (y-\mu)^T (y-\mu) p(y|\omega_r) dy$$

kde

$$\mu = \int_{\mathcal{Y}_m} y p(y|\omega_r) dy$$

nebo vztahem

$$D(y) = \sum_{r=1}^{R} P(\omega_r) \cdot \int_{\mathcal{Y}_m} (y-\mu)^T (y-\mu) p(y|\omega_r) dy =$$

$$= \int_{\mathcal{Y}_m} (y-\mu)^T (y-\mu) p(y) dy$$

ROZDĚLENÍ DO TŘÍD

kde střední hodnota **μ** je vážený průměr středních hodnot všech tříd, tj.

$$\mu = \sum_{r=1}^{R} P(\omega_r) \cdot \mu_r = \int y p(y|\omega_r)dy = \int y p(y)dy$$