Lineární a adaptivní zpracování dat

5. Lineární filtrace: *Z*-transformace, stabilita

Daniel Schwarz

Co nás čeká ještě v Bi0440

P5: lineární filtrace, lineární časově invariantní, kauzální filtry, impulzová odezva, FIR, IIR. Z-transformace, přenosová funkce vs. frekvenční charakteristika. Nuly, póly. Stabilita.

P6: lineární filtrace – pokračování. Zmínka o časových řadách – AR, MA, ARMA – překryvy s IIR, FIR.

P7: odhad signálu v šumu, zprůměrování. SNR

P8: odhad signálu v šumu – pokračování / procvičování

P9: adaptivní filtry a identifikace. Obecné schéma adapt. Filtru. LMS, RLS.

P10: lineární predikce pomocí LMS

P11: adaptivní filtrace / lineární predikce – pokračování / procvičování

P12: časově-frekvenční a vlnková analýza.

Lineární filtrace obecně

Filtrace= ....?.............

viz 3. přednáška o LTI systémech a jejich popisu ve frekvenční oblasti

Lineární filtrace obecně

Filtrace = zpracování sloužící k výběru jistých složek ze směsi více signálů a k potlačení složek jiných.

Složky signálu = ...?............

Lineární filtrace obecně

Filtrace = zpracování sloužící k výběru jistých složek ze směsi více signálů a k potlačení složek jiných.

Složky signálu = harmonické komponenty ve frekvenční oblasti, jejichž amplitudy a fáze se s filtrací pozmění.

↓

Jak vystihujeme tuto změnu?

.....................?......................

Lineární filtrace obecně

Filtrace = zpracování sloužící k výběru jistých složek ze směsi více signálů a k potlačení složek jiných.

Složky signálu = harmonické komponenty ve frekvenční oblasti, jejichž amplitudy a fáze se s filtrací pozmění.

↓

Jak vystihujeme tuto změnu?

dvěma frekvenčními charakteristikami:

- amplitudovou
- a fázovou.

↓

Čeho? ....?.........

Lineární filtrace obecně

Filtrace = zpracování sloužící k výběru jistých složek ze směsi více signálů a k potlačení složek jiných.

Složky signálu = harmonické komponenty ve frekvenční oblasti, jejichž amplitudy a fáze se s filtrací pozmění.

↓

Jak vystihujeme tuto změnu?

dvěma frekvenčními charakteristikami:

- amplitudovou
- a fázovou.

↓

Čeho? Filtru.

Lineární filtrace obecně

Filtr= ....?.............

Lineární filtrace obecně

Filtr = systém nebo algoritmus (program), který mění požadovaným způsobem spektrum vstupního signálu.

Příklady aplikace: potlačení rušivých vlivů, frekvenční analýza

Popis filtru: frekvenční charakteristika H(*f*), impulsní charakteristika *h*(*n*), diferenční rovnice (definice), přenosová funkce *H*(*z*).

je ....?....................... vzhledem k diskrétnímu charakteru signálů.

Lineární filtrace obecně

Filtr = systém nebo algoritmus (program), který mění požadovaným způsobem spektrum vstupního signálu.

Příklady aplikace: potlačení rušivých vlivů, frekvenční analýza

Popis filtru: frekvenční charakteristika H(*f*), impulsní charakteristika *h*(*n*), diferenční rovnice (definice), přenosová funkce *H*(*z*).

je periodická vzhledem k diskrétnímu charakteru signálů.

s periodou ..?.. v případě frekvence, …?. v případě normované frekvence, ..?.. v případě kmitočtu a …?. v případě normovaného kmitočtu.

Lineární filtrace obecně

Filtr = systém nebo algoritmus (program), který mění požadovaným způsobem spektrum vstupního signálu.

Příklady aplikace: potlačení rušivých vlivů, frekvenční analýza

Popis filtru: frekvenční charakteristika H(*f*), impulsní charakteristika *h*(*n*), diferenční rovnice (definice), přenosová funkce *H*(*z*).

↓

je periodická vzhledem k diskrétnímu charakteru signálů.

↓

s periodou: $1/T_s$ v případě frekvence, 1 v případě normované frekvence,
$2\pi/T_s$ v případě kmitočtu a 2π v případě normovaného kmitočtu.

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

- *z* je komplexní proměnná.
- nejčastěji uvažujeme jednostrannou transformaci: sumace od *n*=0.

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

- *z* je komplexní proměnná.
- nejčastěji uvažujeme jednostrannou transformaci: sumace od *n*=0.

z v polárních souřadnicích: $z = r \,.\, e^{j\omega T}$:

$$X\left(r.e^{j\omega T}\right) = \quad \text{............?...........}$$

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

- z je komplexní proměnná.
- nejčastěji uvažujeme jednostrannou transformaci: sumace od n=0.

z v polárních souřadnicích: $z = r \, . \, e^{j\omega T}$:

$$X\left(r.e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n.\left[r.e^{j\omega T}\right]^{-n} = \quad \text{...........?...........}$$

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

- *z* je komplexní proměnná.
- nejčastěji uvažujeme jednostrannou transformaci: sumace od *n*=0.

z v polárních souřadnicích: $z = r \,.\, e^{j\omega T}$:

$$X\left(r.e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . \left[r.e^{j\omega T}\right]^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\, r^{-n} . e^{-jn\omega T}$$

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

$$X(r.e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n .[r.e^{j\omega T}]^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n r^{-n} .e^{-jn\omega T}$$

Pro *r*=1 platí, že ....?...

Z transformace

Transformace Z je důležitý nástroj pro reprezentaci a manipulaci s diskrétními posloupnostmi. Můžeme ji považovat za zevšeobecnění Fourierovy transformace pro diskrétní soustavy a signály.

$$Z\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n . z^{-n}$$

$$X\left(r.e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n .\left[r.e^{j\omega T}\right]^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n r^{-n}.e^{-jn\omega T}$$

Pro *r*=1 platí, že Z transformace na jednotkové kružnici |z|=1 je shodná s Fourierovou transformací DTFT.

Z transformace - příklady

Jednotkový impuls: {1,0,0,…}

$$x_n = \delta_n \qquad X(z) = 1$$

Jednotkový skok: {1,1,1,…}

$$x_n = u_n \qquad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Exponenciální signál:

$$x_n = c^n \qquad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n z^{-n} = \frac{1}{1-cz^{-1}}$$

$$\text{pro } n \geq 0 \text{ a } x_n = 0 \text{ pro } n < 0$$

Z transformace – definiční obor

ROC – Region Of Convergence

– vyšetřuje se poloměr konvergence mocninných řad v $X(z)$.

$$\mathrm{ROC} = \left\{ z = re^{j\omega} \quad \text{kde} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \right\}$$

ROC zahrnuje všechna komplexní čísla, pro něž je řada absolutně sumovatelná.

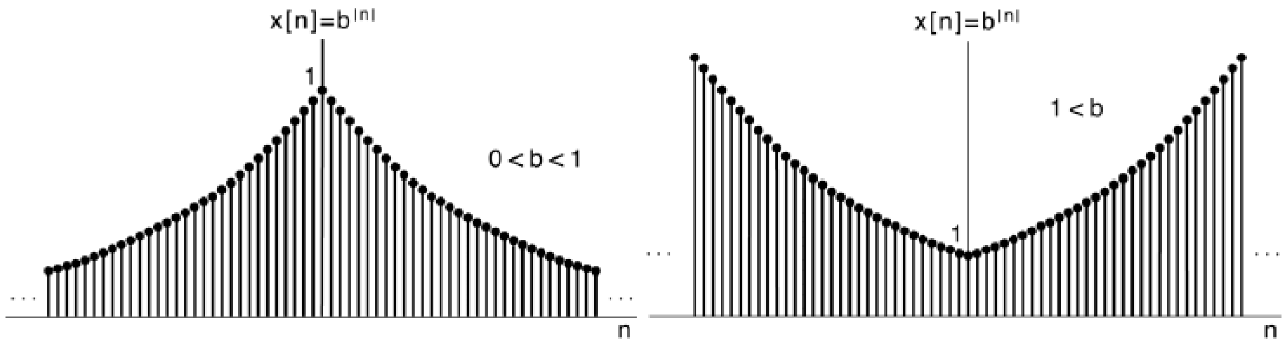
Z transformace – definiční obor

ROC – Region Of Convergence

– vyšetřuje se poloměr konvergence mocninných řad v $X(z)$.

Příklad:

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$$



$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

$$b^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{-1}{1 - b^{-1} z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}$$

Z transformace – definiční obor

ROC – Region Of Convergence

– vyšetřuje se poloměr konvergence mocninných řad v $X(z)$.

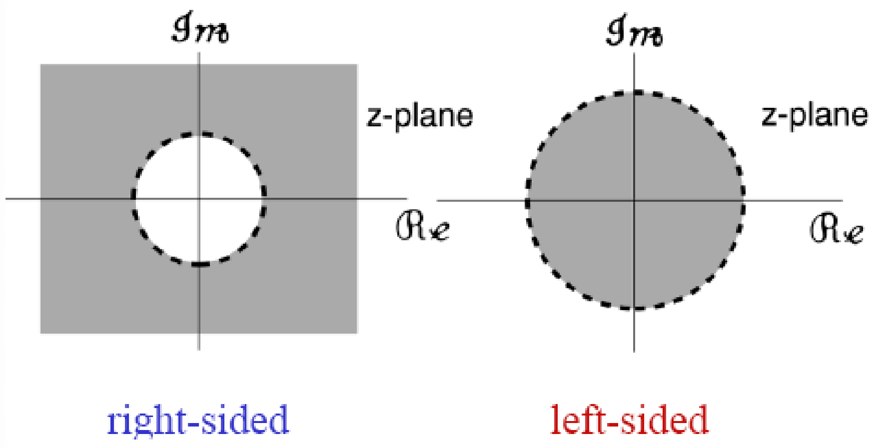
Příklad:

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$$

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

$$b^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}$$



Z transformace – definiční obor

ROC – Region Of Convergence

– vyšetřuje se poloměr konvergence mocninných řad v *X*(*z*).

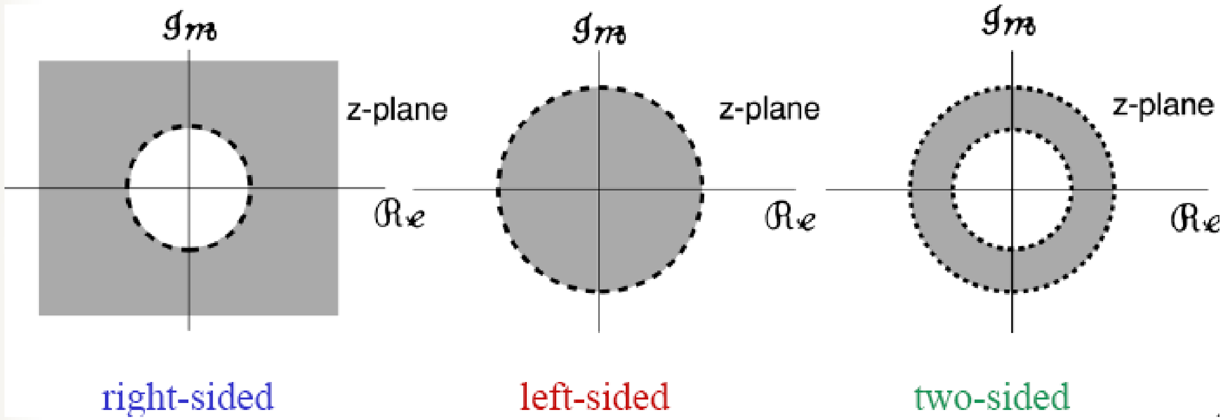
Příklad:

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$$

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

$$b^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}$$



Z transformace – definiční obor

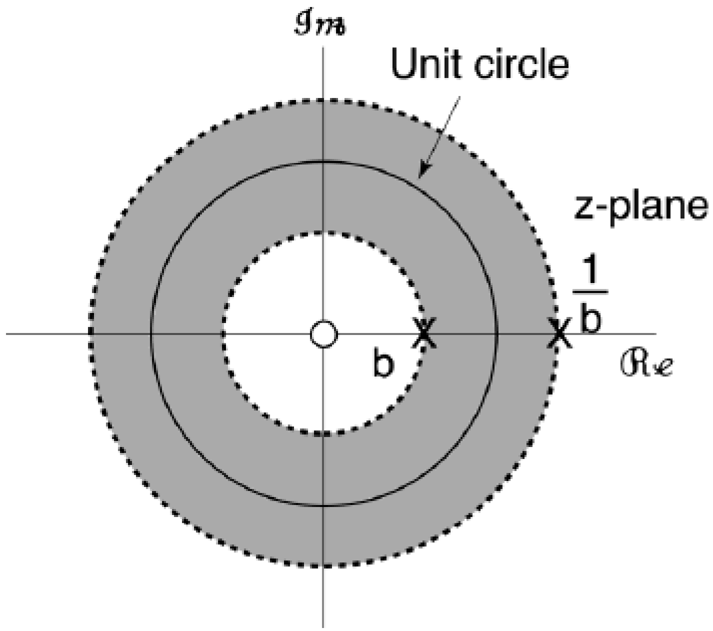
ROC – Region Of Convergence

– vyšetřuje se poloměr konvergence mocninných řad v *X*(*z*).

Příklad:

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} + \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}} \quad , \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$



Z transformace - vlastnosti

Linearita: $$Z(a.x_n + b.y_n) = a.X(z) + b.Y(z)$$

Posun: $$Z(x_{n-k}) = z^{-k}.X(z)$$

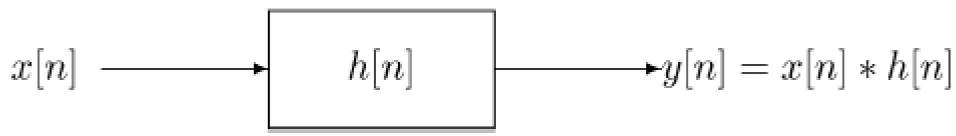
Útlum: $$Z(a^{-n}.x_n) = X(a^{-1}.z)$$

Konvoluce: $$Z\{y_n\} = Z\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i.h_{n-i}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i.h_{n-i}\right].z^{-n} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i.\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n-i}\right].z^{-n}$$

Subst: $m=n-i$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i.\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m.z^{-m}\right].z^{-i} \Rightarrow \quad Y(z) = X(z).H(z)$$

Z transformace - vlastnosti



$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{z-a}, \quad |z| > a \\
X(z) &= z - a, \quad z \neq \infty \\
Y(z) &= 1
\end{aligned}
$$

ROC…všechna *z*

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}}$$

PŘENOSOVÁ (SYSTÉMOVÁ) FUNKCE

Z transformace – přenosová funkce

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z\{h_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n . z^{-n}$$

pro $\quad z = e^{j\omega T} \quad$ platí, že $H(z)$ = ...?....................

Z transformace – přenosová funkce

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

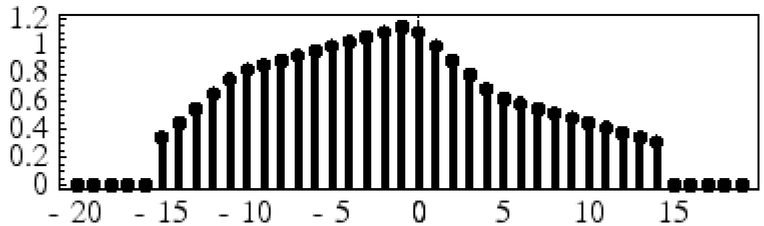
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z\{h_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n . z^{-n}$$

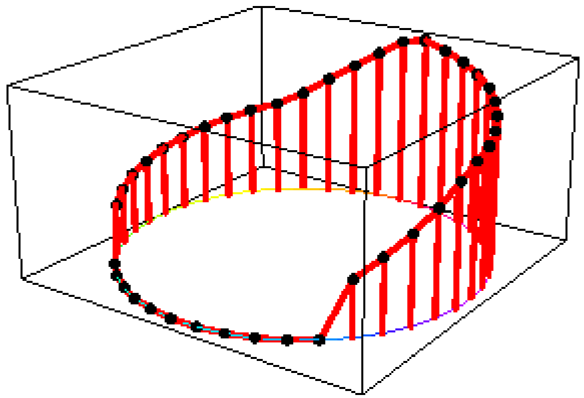
pro $\quad z = e^{j\omega T} \quad$ platí, že $H(z) = H(j\omega)$

Přenosová (systémová) funkce vyjadřuje na jednotkové kružnici $|z|=1$ kmitočtovou charakteristiku diskrétní soustavy.
Viz popis vztahu Z transformace a Fourierovy transformace.

Z transformace – přenosová funkce

Přenosová (systémová) funkce vyjadřuje na jednotkové kružnici $|z|=1$ kmitočtovou charakteristiku diskrétní soustavy.
Viz popis vztahu Z transformace a Fourierovy transformace.





Z transformace – přenosová funkce

H(*z*) vyjádřená pomocí racionálně lomené funkce:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_i.z^{-i}}{\sum_{i=0}^{L}b_i.z^{-i}}=\frac{A.\prod_{i=1}^{M}\left(1-z_i.z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(1-p_i.z^{-1}\right)}\quad,\qquad A=a_0/b_0.$$

z_i jsou ....?..........

p_i jsou ....?..........

Z transformace – přenosová funkce

$H(z)$ vyjádřená pomocí racionálně lomené funkce:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i . z^{-i}}{\sum_{i=0}^{L} b_i . z^{-i}} = \frac{A.\prod_{i=1}^{M}\left(1 - z_i . z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(1 - p_i . z^{-1}\right)} \quad , \qquad A = a_0 / b_0 .$$

z_i jsou NULY racionálně lomené funkce

p_i jsou PÓLY racionálně lomené funkce

$$H(j\omega) = H\left(e^{j\omega T}\right) = \quad \text{............?............}$$

Z transformace – přenosová funkce

$H(z)$ vyjádřená pomocí racionálně lomené funkce:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_i.z^{-i}}{\sum_{i=0}^{L}b_i.z^{-i}}=\frac{A.\prod_{i=1}^{M}\left(1-z_i.z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(1-p_i.z^{-1}\right)}\quad , \qquad A=a_0/b_0.$$

z_i jsou NULY racionálně lomené funkce

p_i jsou PÓLY racionálně lomené funkce

$$H(j\omega)=H\left(e^{j\omega T}\right)=\frac{A.\prod_{i=1}^{M}\left(1-z_i.e^{-j\omega T}\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(1-p_i.e^{-j\omega T}\right)}=$$

…………?…………

Z transformace – přenosová funkce

$H(z)$ vyjádřená pomocí racionálně lomené funkce:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} a_i . z^{-i}}{\sum_{i=0}^{L} b_i . z^{-i}} = \frac{A.\prod_{i=1}^{M}\left(1 - z_i . z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(1 - p_i . z^{-1}\right)} \quad , \qquad A = a_0 / b_0.$$

z_i jsou NULY racionálně lomené funkce

p_i jsou PÓLY racionálně lomené funkce

$$H(j\omega) = H\left(e^{j\omega T}\right) = \frac{A.\prod_{i=1}^{M}\left(1 - z_i . e^{-j\omega T}\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(1 - p_i . e^{-j\omega T}\right)} = A.e^{j\omega(L-M).T} . \frac{\prod_{i=1}^{M}\left(e^{j\omega T} - z_i\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(e^{j\omega T} - p_i\right)}$$

Z transformace – přenosová funkce

$$H(j\omega) = H(e^{j\omega T}) = \frac{A.\prod_{i=1}^{M}\left(1 - z_i . e^{-j\omega T}\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(1 - p_i . e^{-j\omega T}\right)} = A.e^{j\omega(L-M).T} . \frac{\prod_{i=1}^{M}\left(e^{j\omega T} - z_i\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(e^{j\omega T} - p_i\right)}$$

$$\left|H(j\omega)\right| = |A|.1.\frac{\prod_{i=1}^{M}\left|\left(e^{j\omega T} - z_i\right)\right|}{\prod_{i=1}^{L}\left|\left(e^{j\omega T} - p_i\right)\right|} = |A| . \frac{n_1 . n_2 . \ldots . n_M}{r_1 . r_2 . \ldots . r_L}$$

?

Z transformace – přenosová funkce

$$H(j\omega) = H(e^{j\omega T}) = \frac{A.\prod_{i=1}^{M}(1 - z_i.e^{-j\omega T})}{\prod_{i=1}^{L}(1 - p_i.e^{-j\omega T})} = A.e^{j\omega(L-M).T}.\frac{\prod_{i=1}^{M}(e^{j\omega T} - z_i)}{\prod_{i=1}^{L}(e^{j\omega T} - p_i)}$$

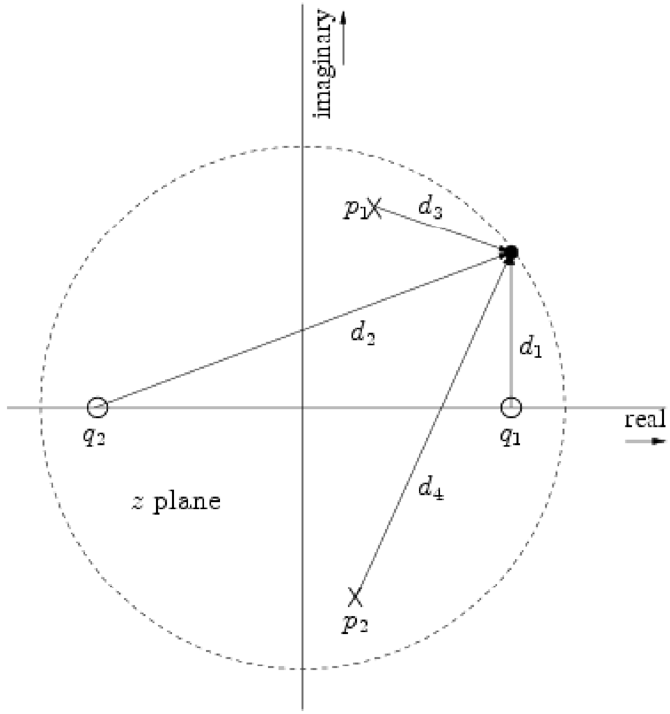
$$|H(j\omega)| = |A|.1.\frac{\prod_{i=1}^{M}|(e^{j\omega T} - z_i)|}{\prod_{i=1}^{L}|(e^{j\omega T} - p_i)|} = |A| . \frac{n_1.n_2.\dots.n_M}{r_1.r_2.\dots.r_L}$$

n – vzdálenosti mezi bodem ωT na jednotkové kružnici a NULAMI přenosové funkce.
r – vzdálenosti mezi bodem ωT na kružnici a PÓLY přenosové funkce.
|A| – zesílení systému

Z transformace – přenosová funkce

n – vzdálenosti mezi bodem ωT na jednotkové kružnici a NULAMI přenosové funkce.
r – vzdálenosti mezi bodem ωT na kružnici a PÓLY přenosové funkce.

$$|H(j\omega)| = |A|.1.\frac{\prod_{i=1}^{M}\left|\left(e^{j\omega T}-z_i\right)\right|}{\prod_{i=1}^{L}\left|\left(e^{j\omega T}-p_i\right)\right|} = \frac{n_1.n_2.\dots.n_M}{r_1.r_2.\dots.r_L}\ .\ |A|$$



Z transformace – přenosová funkce

$$H(j\omega) = H\left(e^{j\omega T}\right) = \frac{A.\prod_{i=1}^{M}\left(1 - z_i . e^{-j\omega T}\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(1 - p_i . e^{-j\omega T}\right)} = A.e^{j\omega(L-M).T} . \frac{\prod_{i=1}^{M}\left(e^{j\omega T} - z_i\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(e^{j\omega T} - p_i\right)}$$

$$\arg H(j\omega) = \sum_{i=1}^{M} \arg\left(e^{j\omega T} - z_i\right) - \sum_{i=1}^{L} \arg\left(e^{j\omega T} - p_i\right) + \arg A + (L - M).\omega.T$$

Stabilita diskrétního systému

Stabilita = ...?.................

Stabilita diskrétního systému

Stabilita = tendence systému reagovat přiměřeně na trvající podnět a po jeho zániku se vracet do výchozího stavu.

BIBO: bounded input -> bounded output

Kritérium v časové oblasti:

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

Kritérium v obrazové oblasti:

Lineární diskrétní systém (jehož obrazový přenos je racionální lomená funkce) je stabilní tehdy a jen tehdy, když všechny póly p_i jeho obrazového přenosu leží uvnitř jednotkové kružnice, $p_i < 1$, $\forall i$.

Zpětná Z transformace

$$x_n = \frac{1}{2\pi j} . \oint_c X(z) . z^{n-1} dz$$

- jen pro doplnění, bez odvození.

Z-transformace – příklady využití

- z-Transform method for deconvolution as applied to the renogram.
- Application of the chirp z-transform to MRI data.
- Use of the z-transform to investigate nanopulse penetration of biological matter.
- Image reconstruction from zeros of the z-transform.
- Modelling of anaerobic digestion in a fluidised bed with a view to control.

Neplést si
z-transform
s
z-score transform !

5. cvičení

1. Impulsní charakteristika diskrétního systému má tvar: $h[n]=0.5^n u[n]$.
   Určete přenosovou funkci systému a ověřte, zda je systém stabilní.

2. Impulsní charakteristika diskrétního systému má tvar: $h[n]=1.5^n u[n]$.
   Určete přenosovou funkci systému a ověřte, zda je systém stabilní.

3. Je dán systém s přenosovou funkcí $H(z)=K\frac{z+1}{z}=K\left(1+z^{-1}\right)$

   Nakreslete rozložení nulových bodů a pólů.
   Odhadněte amplitudovou frekvenční charakteristiku.
   Zjistěte diferenční rovnici systému.
   Zjistěte impulsní charakteristiku systému.
   Na závěr vše ověřte v MATLABu (fvtool, freqz).
   O jaký filtr jde (HP, DP, PP) ?

5. cvičení

Geometrická řada

Součet členů geometrické posloupnosti je označován jako **geometrická řada**.

Součet geometrické řady je dán jako limita posloupnosti n-tých částečných součtů. Platí tedy

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot q^n}{q-1} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1 \\ +\infty, & \text{pro } |q| \geq 1 \end{cases}$$

Geometrická řada tedy konverguje pouze tehdy, je-li absolutní hodnota kvocientu q menší než 1.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n z^{-n} = \frac{1}{1 - cz^{-1}}$$

5. cvičení

1), 2)

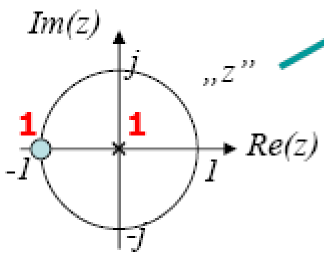
Pro exp. signál je Z transf. definována:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n z^{-n} = \frac{1}{1 - cz^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Jediný pól < 1, tedy stabilní.
Pól nemá imaginární část.

5. cvičení



$$H(z) = K\frac{z+1}{z} = K\left(1+z^{-1}\right)$$

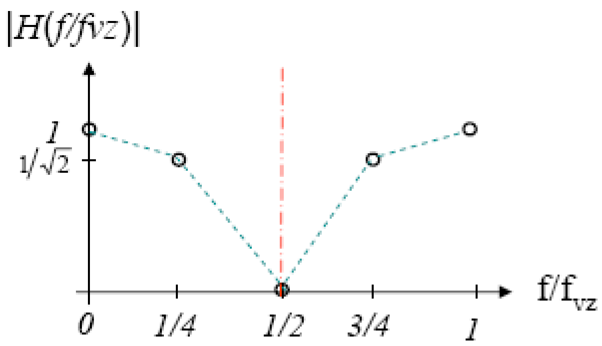
Přenos na nulovém kmitočtu $H\left(e^{j0}\right) = K\left(1+e^{-j0}\right) = 2K$

Chceme-li $H\left(e^{j0}\right) = 1 \Rightarrow K = 0{,}5$

$$0{,}5\left(1+z^{-1}\right) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = 0{,}5X(z) + 0{,}5z^{-1}X(z)$$

$$y(n) = 0{,}5x(n) + 0{,}5x(n-1)$$

Odhad frekvenční charakteristiky



Impulsní charakteristika

$h(n)$ = $\{0{,}5;\ 0{,}5\}$ = $\{h(0);\ h(1)\}$