Lineární a adaptivní zpracovní dat

6. Lineární filtrace: FIR, IIR

Daniel Schwarz

Opakování

Co je to filtrace?
Co je to filtr?
Jak ho popisujeme?
Jaký je vztah Z transformace a Fourierovy transformace?
Jak je definována přenosová funkce diskrétního systému?
Jaký je vztah mezi přenosovou funkcí systému a jeho frekvenční charakteristikou?
Co jsou to nulové body a póly přenosové funkce a jak je vypočítáme?
Popište, co je to stabilita systému
Jaká pravidla platí pro impulsní charakteristiku a přenosovou funkci stabilního diskrétního systému?

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

Mějme LTI systém s přenosovou funkcí ve tvaru racionálně lomené funkce:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} a_i.z^{-i}}{\sum_{i=0}^{L} b_i.z^{-i}}=\frac{A.\prod_{i=1}^{M}\left(1-z_i.z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(1-p_i.z^{-1}\right)}$$

kde $A = a_0/b_0$, z_i jsou ......?....... a p_i jsou ....?......... .

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

Mějme LTI systém s přenosovou funkcí ve tvaru racionálně lomené funkce:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i . z^{-i}}{\sum_{i=0}^{L} a_i . z^{-i}} = \frac{A . \prod_{i=1}^{M} \left(1 - z_i . z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{L} \left(1 - p_i . z^{-1}\right)}$$

kde $A = a_0/b_0$, z_i jsou nuly a p_i jsou póly racionálně lomené funkce.

$$Y(z) . \sum_{i=0}^{L} a_i . z^{-i} = X(z) . \sum_{i=0}^{M} b_i . z^{-i}$$

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

zpětná Z-transformace, věta o linearitě a posunu, a_0=1.

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i.x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i.y_{n-i}$$

Interpretace rovnice: diskrétní soustava / systém uchovává v paměti starší vzorky vstupního i výstupního signálu.

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

<u>Interpretace rovnice</u>: diskrétní soustava / systém uchovává v paměti starší vzorky vstupního i výstupního signálu.

?

?

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

<u>Interpretace rovnice</u>: diskrétní soustava / systém uchovává v paměti starší vzorky vstupního i výstupního signálu.

Klouzavý průměr MA

Autoregresní člen AR

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i.x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i.y_{n-i}$$

Interpretace rovnice: diskrétní soustava / systém uchovává v paměti starší vzorky vstupního i výstupního signálu.

Klouzavý průměr MA

Autoregresní člen AR

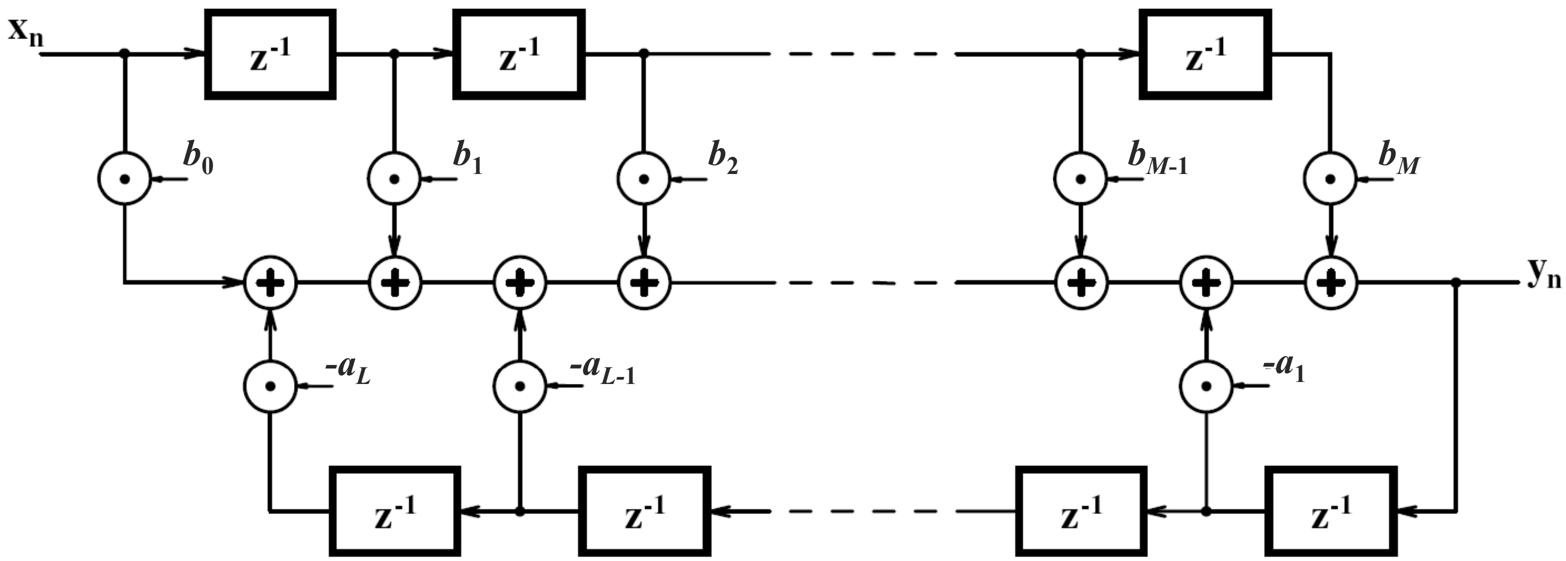
↓

Ovlivňuje rychlost odezvy, charakter jejího zanikání, stabilitu soustavy.

Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

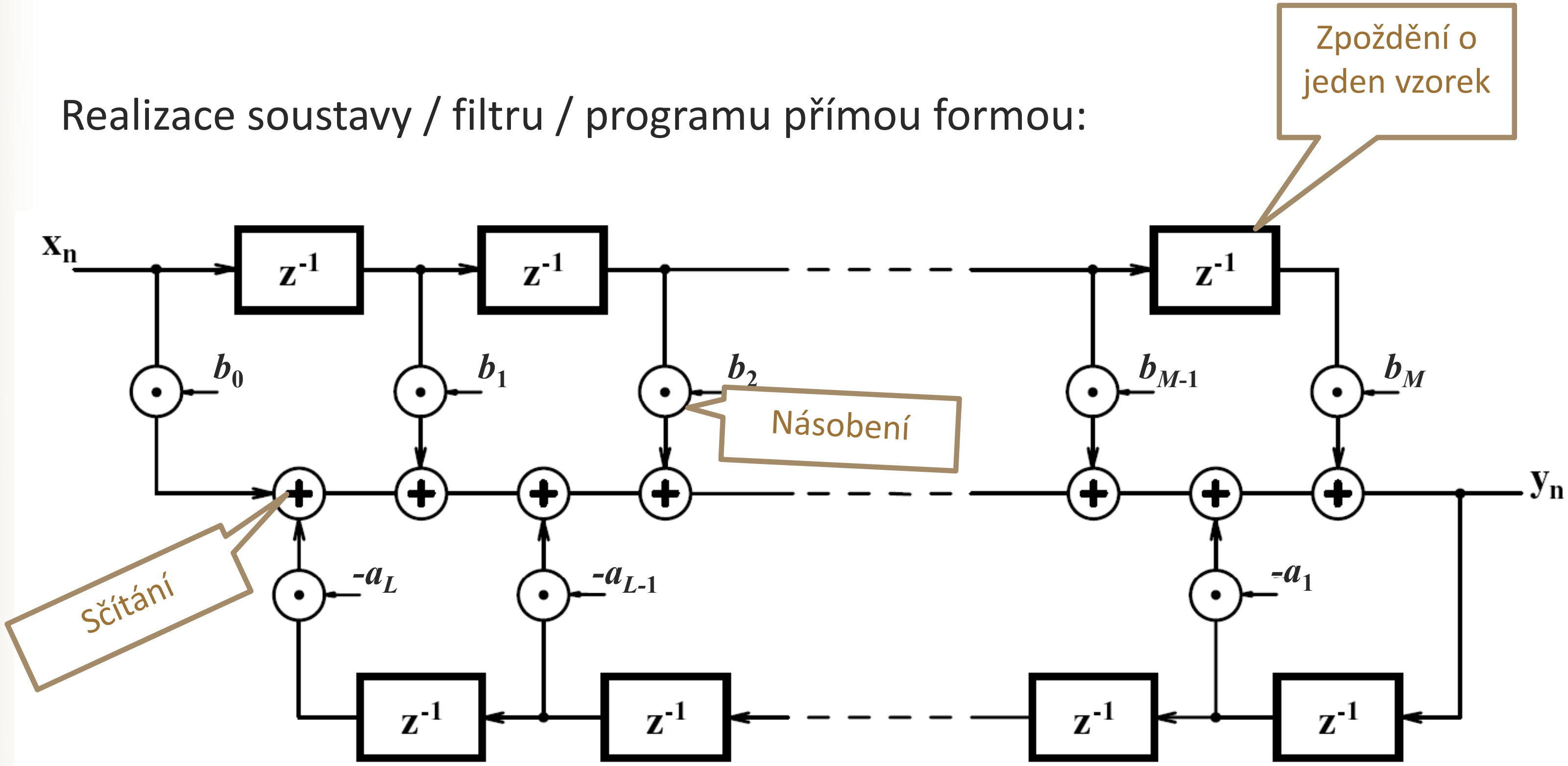
Realizace soustavy / filtru / programu přímou formou:



Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

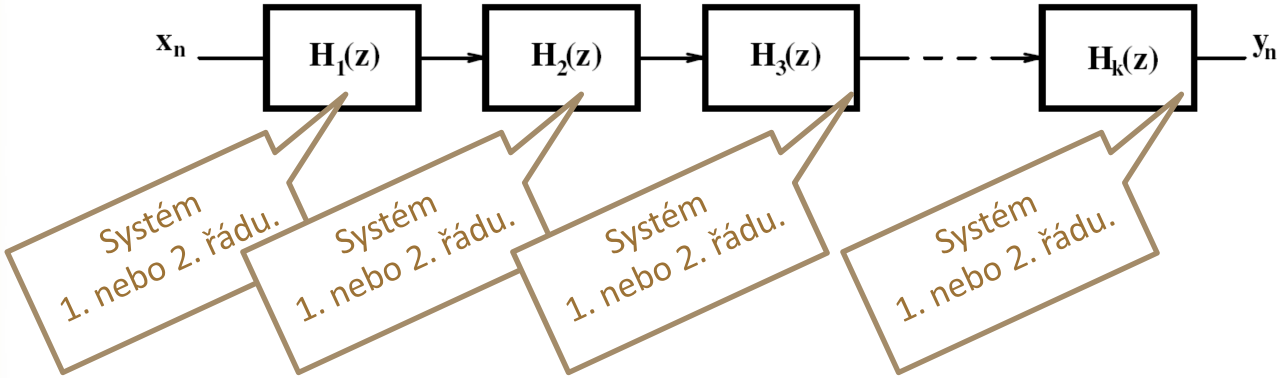
Realizace soustavy / filtru / programu přímou formou:



Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

Další formy realizace filtru / soustavy/ programu:

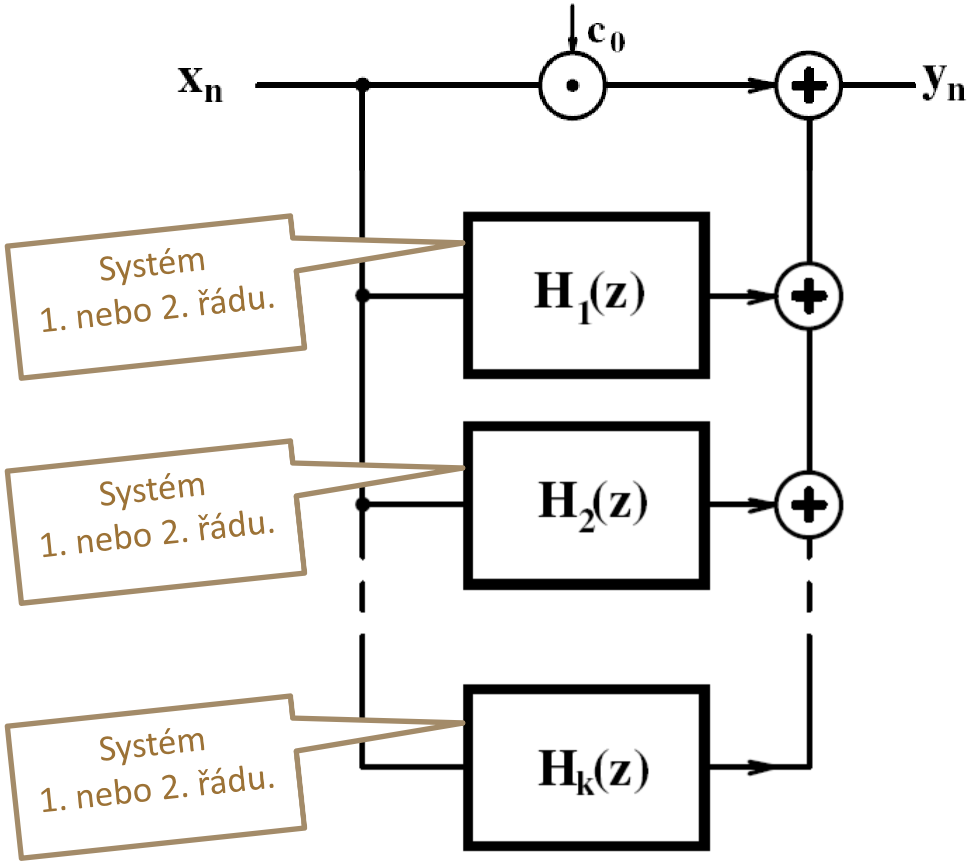
Kaskádní:



Popis diskrétní soustavy s Z-transformací

Další formy realizace filtru / soustavy/ programu:

Paralelní:



Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR – finite impulse response

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \cancel{\sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}}$$

pouze člen MA
(moving average)

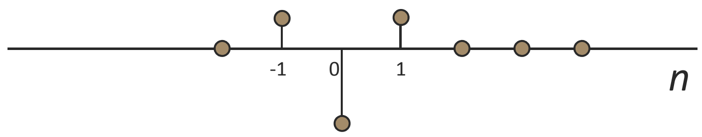
nerekurzivní realizace
(většinou, ale nemusí vždy)

Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR PŘÍKLAD: hranový detektor

$$y[n] = x[n+1] - 2x[n] + x[n-1]$$

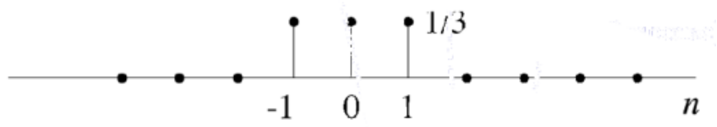
$$h[n] = \{\delta[n-1] - 2\delta[n] + \delta[n+1]\}$$



FIR PŘÍKLAD: „vyhlazovací" systém

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$$

$$h[n] = \frac{1}{3}\{\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]\}$$



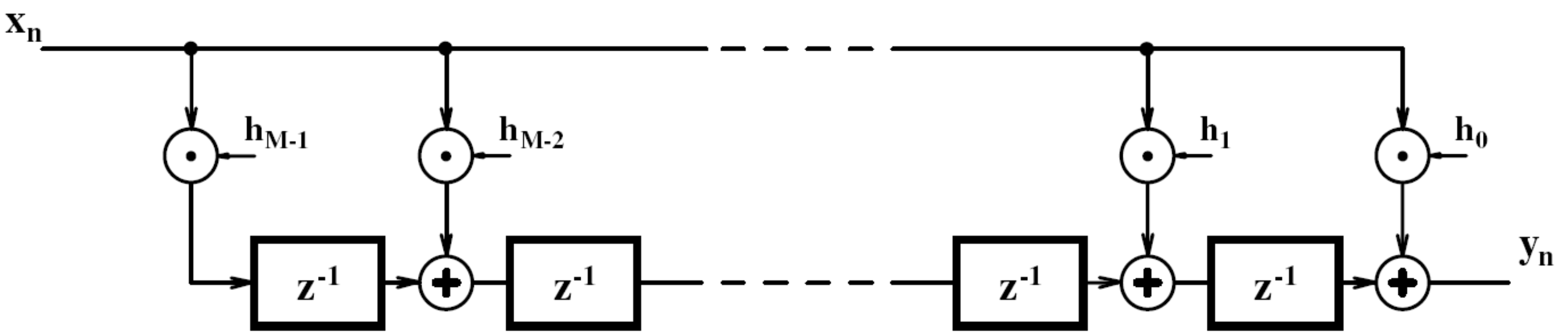
Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR – finite impulse response

Realizační koeficienty odpovídají hodnotám impulsní charakteristiky

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M-1} b_i . z^{-k}$$

$$y_n = b_0 . x_n + b_1 . x_{n-1} + b_2 . x_{n-2} + \ldots + b_{M-1} . x_{n-M+1} = \sum_{k=0}^{M-1} b_k . x_{n-k}$$



Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR – finite impulse response

Realizační koeficienty odpovídají hodnotám impulsní charakteristiky

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M-1} b_i . z^{-k}$$

$$y_n = b_0 . x_n + b_1 . x_{n-1} + b_2 . x_{n-2} + \ldots + b_{M-1} . x_{n-M+1} = \sum_{k=0}^{M-1} b_k . x_{n-k}$$

Počet pólů přenosové funkce:..............?..........., kde? ....?.................

Počet nulových bodů přenosové funkce:..............?..........., kde? ....?.................

Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR – finite impulse response

Realizační koeficienty odpovídají hodnotám impulsní charakteristiky

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M-1} b_i . z^{-k}$$

$$y_n = b_0 . x_n + b_1 . x_{n-1} + b_2 . x_{n-2} + \ldots + b_{M-1} . x_{n-M+1} = \sum_{k=0}^{M-1} b_k . x_{n-k}$$

Počet pólů přenosové funkce:.M-1, kde? ....?..................

Počet nulových bodů přenosové funkce:M-1, kde? ....?..................

Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR – finite impulse response

Realizační koeficienty odpovídají hodnotám impulsní charakteristiky

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M-1} b_i . z^{-k}$$

$$y_n = b_0 . x_n + b_1 . x_{n-1} + b_2 . x_{n-2} + \ldots + b_{M-1} . x_{n-M+1} = \sum_{k=0}^{M-1} b_k . x_{n-k}$$

Počet pólů přenosové funkce:.M-1, kde? V bodě z=0 (násobný pól v počátku, který vyjadřuje jen fázový posun – nutno vyjádřit $H(z)$ v kladných mocninách z).

Počet nulových bodů přenosové funkce:M-1, kde? Kdekoli v rovině z.

Systémy s konečnou impulsní charakteristikou

FIR – finite impulse response

Realizační koeficienty odpovídají hodnotám impulsní charakteristiky

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M-1} b_i . z^{-k}$$

$$y_n = b_0 . x_n + b_1 . x_{n-1} + b_2 . x_{n-2} + \ldots + b_{M-1} . x_{n-M+1} = \sum_{k=0}^{M-1} b_k . x_{n-k}$$

Počet pólů p… v počátku, který vyjadřuje jen… …ách z).

Počet nulový… z.

Proč *M*-1 ???

Přenosová funkce je dána polynomem stupně *M*-1 s proměnnou z^{-1}, kde *M* je délka impulsní odezvy.

Polynom stupně *M*-1 popisuje funkci v *M* definovaných bodech.

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou

FIR filtry mohou mít přesně lineární fázi, a to platí-li:

$$h_n = \pm h_{M-1-n}$$

- osová nebo bodová souměrnost impulsní charakteristiky
- tj. impulsní charakteristika je symetrická nebo antisymetrická.

Filtry s lineární fází mají speciální konfiguraci nulových bodů obrazového přenosu:
Je-li $H(n_i) = 0$, je také $H(1/n_i) = 0$.
Pokud má systém reálné koeficienty, platí také: $H(n_i^*)=H(1/n_i)$.

$$\downarrow$$

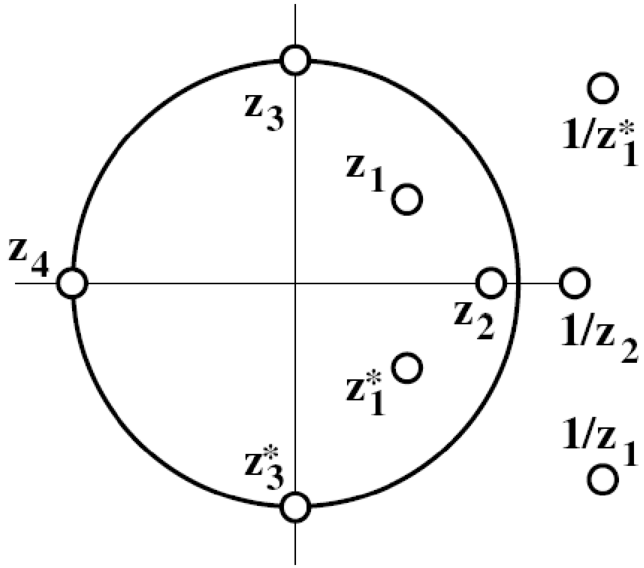
Nulové body se vyskytují ve čtveřicích.

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou

FIR filtry mohou mít přesně lineární fázi, a to platí-li:

$$h_n = \pm h_{M-1-n}$$

- osová nebo bodová souměrnost impulsní charakteristiky
- tj. impulsní charakteristika je symetrická nebo antisymetrická.



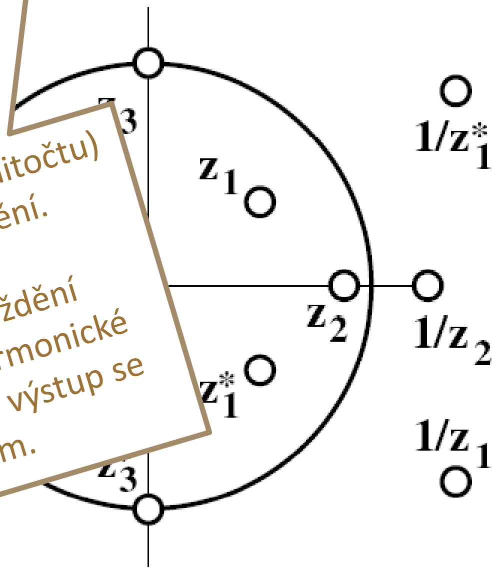
Nuly jsou v komplexně sdružených nebo v recipročních párech.

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou

FIR filtry mohou mít přesně lineární fázi, a to platí-li:

$$h_n = \pm h_{N-1-n}$$

- osová nebo bodová souměrnost impulsní charakteristiky
- tj. impulsní charakteristika je symetrická nebo antisymetrická.



Nuly jsou v komplexně sdružených nebo v recipročních párech.

Záporná derivace fáze (podle kmitočtu) se nazývá skupinové zpoždění.

Konstantní skupinové zpoždění znamená, že se všechny harmonické složky signálu dostanou na výstup se stejným zpožděním.

Filtry s konečnou impulsní charakteristikou

FIR filtry – vlastnosti:

- jsou vždy stabilní, neboť všechny póly leží v nule (pokud nejsou záměrně realizovány rekurzivním systémem se zpětnou vazbou)

- většinou nerekurzivní realizace

- možnost lineární fázové charakteristiky

- relativně snadná programová (hardwarová) realizace

- pro dosažení strmých charakteristik je třeba použít vyšší stupeň filtru než u IIR filtrů

- s rostoucím řádem roste zpoždění

- návrh FIR filtru:
    - vzorkování frekvenční charakteristiky
    - váhování impulsní charakteristiky

Systémy s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR – infinite impulse response

Autoregresní
člen
AR

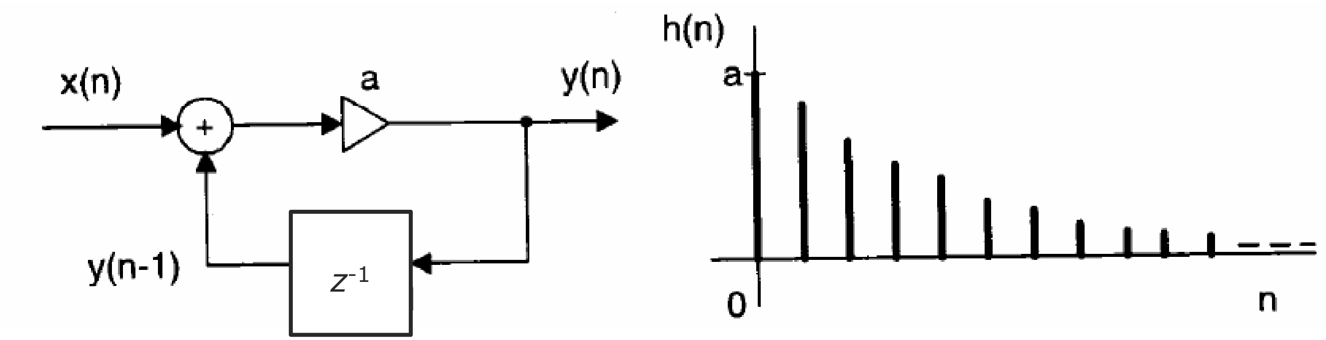
$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

Klouzavý
průměr
MA

vždy rekurzivní realizace

Systémy s nekonečnou impulsní charakteristikou

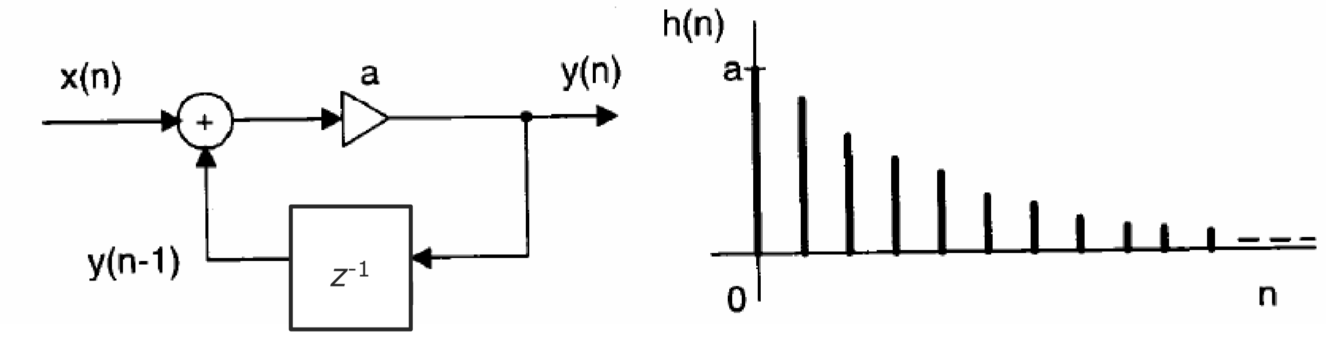
IIR PŘÍKLAD: „vyhlazovací“ systém



H(z) = $az/(z-a)$. Pro a>1 je filtr nestabilní.

Systémy s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR PŘÍKLAD: „vyhlazovací“ systém



H(z) = $az/(z-a)$. Pro a>1 je filtr nestabilní.

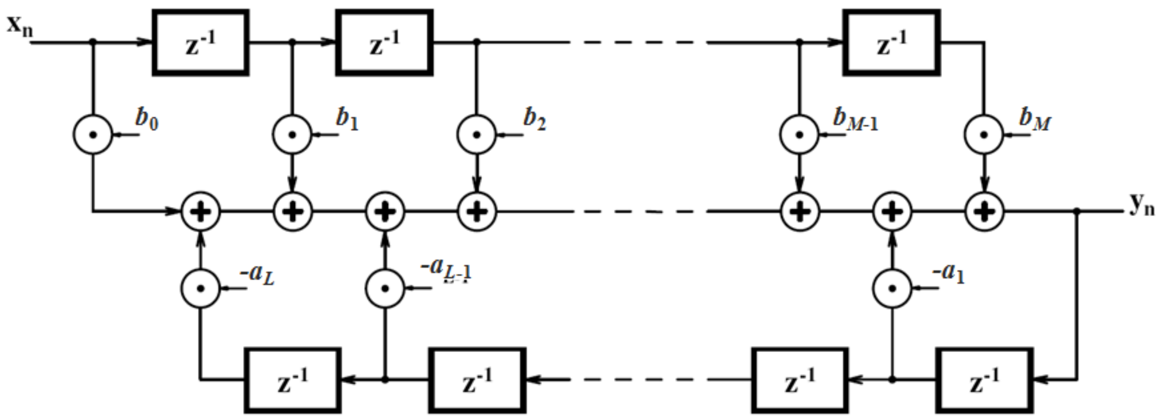
Tip: co lze získat tzv. dlouhým dělením polynomů ?

Systémy s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR :

- vyžadují alespoň jednu zpětnovazební smyčku, jsou vždy rekurzivní
- přenosová funkce = podíl polynomů

Nuly přenosové funkce souvisejí s nerekurzivní částí. Póly přenosové funkce souvisejí s rekurzivní částí.



Filtry s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR filtry – vlastnosti:

- s filtry IIR lze dosáhnout velmi strmé přechody mezi propustným a nepropustným pásmem, a to i při malém řádu filtru.

- filtr je vždy rekurzivní (se zpětnými vazbami), může být nestabilní (pro amplitudově omezený vstupní signál by generoval signál s neustále rostoucími amplitudami).

- Filtr IIR bude stabilní, pokud všechny jeho póly leží uvnitř jednotkové kružnice.

- Filtry IIR nemají lineární průběh fázové charakteristiky.

- poměrně složitý a méně intuitivní návrh:
    - rozmisťování nulových bodů a pólů
    - optimalizační návrhy podle frekvenční charakteristiky (vedou na řešení soustavy nelineárních rovnic)
    - přístupy založené na podobnosti s analogovými systémy

Filtry s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR filtry – vlastnosti:

- s filtry IIR lze dosáhnout velmi strmé přechody mezi propustným a nepropustným pásmem, a to i při malém řádu filtru.

- vždy rekurzivní realizace

- poměrně složitý a méně intuitivní návrh

Není vztah mezi žádoucí frekvenční charakteristikou a systémovými konstantami (srovnej s FIR).

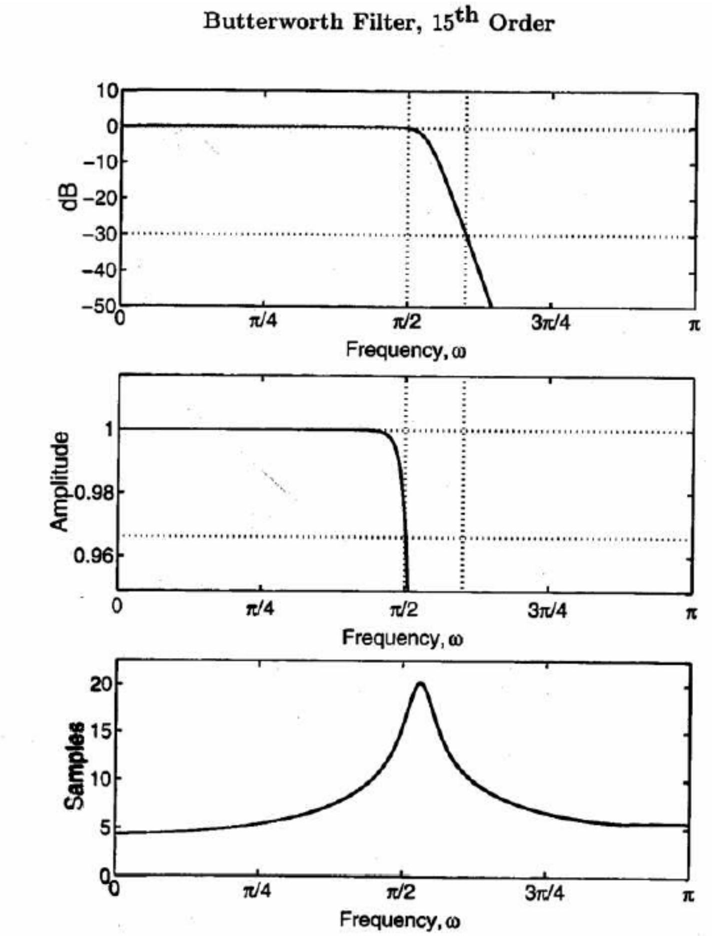
- filtr je rekurzivní (se zpětnými vazbami), může být nestabilní (pro amplitudově omezený vstupní signál by generoval signál s neustále rostoucími amplitudami).

- Filtr IIR bude stabilní, pokud všechny jeho póly leží uvnitř jednotkové kružnice.

- Filtry IIR nemají lineární průběh fázové charakteristiky.

Filtry s nekonečnou impulsní charakteristikou

IIR filtry – příklad:



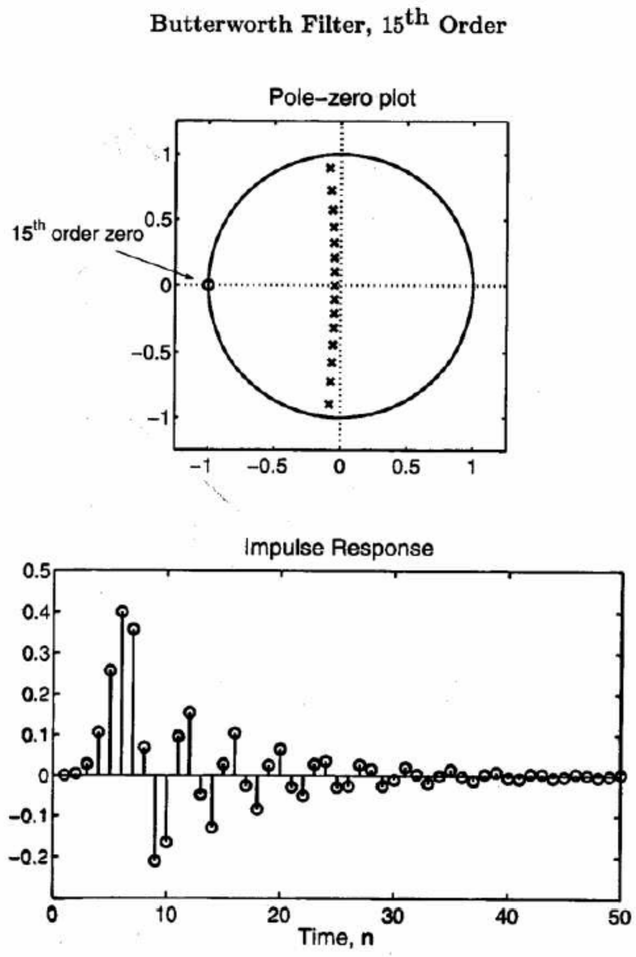


Figure 4: Pole-Zero Plot, Impulse Response

Terminologie: IIR, FIR, MA, AR

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

FIR filtry: a_i=0, pro všechna *i.*

Označovány také jako „moving average“ nebo „all-zero“ filtry.

IIR filtry: a_i<>0, pro alespoň jedno *i.*

Zahrnují:

- autoregresivní (AR) filtry
- moving-average, autoregresivní (ARMA) filtry

Terminologie: IIR, FIR, MA, AR

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

FIR filtry: a_i=0, pro všechna *i.*
Označovány také jako „moving average“ nebo „all-zero“ filtry.

IIR filtry: a_i<>0, pro alespoň jedno *i.*
Zahrnují:
- autoregresivní (AR) filtry
- moving-average, autoregresivní (ARMA) filtry

AR filtry: b_i=0, kromě b_0 .
Výstup závisí pouze na ....?..................

Terminologie: IIR, FIR, MA, AR

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

FIR filtry: a_i=0, pro všechna *i.*
Označovány také jako „moving average“ nebo „all-zero“ filtry.

IIR filtry: a_i<>0, pro alespoň jedno *i.*
Zahrnují:
- autoregresivní (AR) filtry
- moving-average, autoregresivní (ARMA) filtry

AR filtry: b_i=0, kromě b_0.
Výstup závisí pouze na aktuální hodnotě na vstupu a na konečném počtu starších vzorků výstupního signálu.

Označovány také jako:
„all-pole“, „purely recursive“, „autoregressive“

Terminologie: IIR, FIR, MA, AR

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

FIR filtry: a_i=0, pro všechna *i.*
Označovány také jako „moving average“ nebo „all-zero“ filtry.

IIR filtry: a_i<>0, pro alespoň jedno *i.*
Zahrnují:
- autoregresivní (AR) filtry
- moving-average, autoregresivní (ARMA) filtry

ARMA filtry: a_i , b_i nenulové

Označovány také jako:
„pole-zero“, „autoregressive, moving-average “

Terminologie: IIR, FIR, MA, AR

$$y_n = \sum_{i=0}^{M} b_i . x_{n-i} - \sum_{i=1}^{L} a_i . y_{n-i}$$

DOPORUČENÍ:

- pro filtry a lineární systémy používat označení FIR, IIR
- označení AR, MA, ARMA používat pro popis či modely stochastických procesů, které generují data náhodné povahy

6. cvičení

1. Je dán systém s přenosovou funkcí $H(z) = \dfrac{1 - z^{-8}}{1 + z^{-2}}$

   Nakreslete rozložení nulových bodů a pólů.
   Odhadněte amplitudovou frekvenční charakteristiku.
   Zjistěte diferenční rovnici systému.
   Zjistěte impulsní charakteristiku systému.
   Na závěr vše ověřte v MATLABu (fvtool, freqz).
   O jaký filtr jde (FIR, IIR) ?
   O jaký filtr jde (HP, DP, PP) ?

6. cvičení

2. Diskrétní soustava má přenosovou funkci H(z): $1/(1-0.5z^{-1})$. Určete diferenční rovnici systému.

6. cvičení

3. Navrhněte FIR filtr pro odstranění rušivých složek v časové řadě reprezentující sběr údajů o koncentraci toxické látky v říčním toku. Sběr dat probíhá s hodinovou vzorkovací periodou. Změny v koncentracích jsou pozvolné, odehrávají se v týdenním rytmu (provoz chemické fabriky). Rušivé složky, které je potřeba potlačit, souvisejí se stochastickým procesem (počasí, tj. zejména srážky, ale i teplota), který generuje signálové komponenty s nejvyšší periodou okolo 6 h. Zkontrolujte správnost vzorkování v experimentu a pro návrh filtru volte metodu vzorkování frekvenční charakteristiky. Volte filtr s polynomem 19. řádu.