SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

VII.
SYSTÉMY

FORMY ABSTRAKTNÍHO POPISU SPOJITÝCH SYSTÉMŮ

VNĚJŠÍ (VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ) POPIS

FORMÁLNÍ (MATEMATICKÝ) POPIS SYSTÉMU

Matematické prostředky se různí podle:

- typu časové základny (spojité, diskrétní, nezávislé na časovém měřítku);
- charakteru proměnných (spojité, diskrétní, logické);
- determinovanosti proměnných a parametrů (deterministické, nedeterministické - pravděpodobnostní, fuzzy,…);
- vztahu k okolí (autonomní, neautonomní);
- proměnnosti parametrů (lineární, nelineární, časově proměnné);
- vztahu k minulosti (bez paměti, s pamětí);

TECHNICKÝ & BIOLOGICKÝ SYSTÉM

základními vlastnostmi biologických systémů jsou:

- ☑ přirozenost (zpravidla nejsou vytvořeny člověkem);
- ☑ veliký rozměr (velký počet stavových proměnných a ne vždy je přesně znám);
- ☑ složitá hierarchická struktura;
- ☑ významná interakce na všech úrovních jejich struktury (často časově proměnná);
- ☑ velké rozdíly mezi jednotlivými realizacemi (jedinci) – rozptyl uvnitř populace – interindividuální variabilita;
- ☑ velké rozdíly v chování jednotlivých realizací (jedinců) v čase – intraindividuální variabilita;

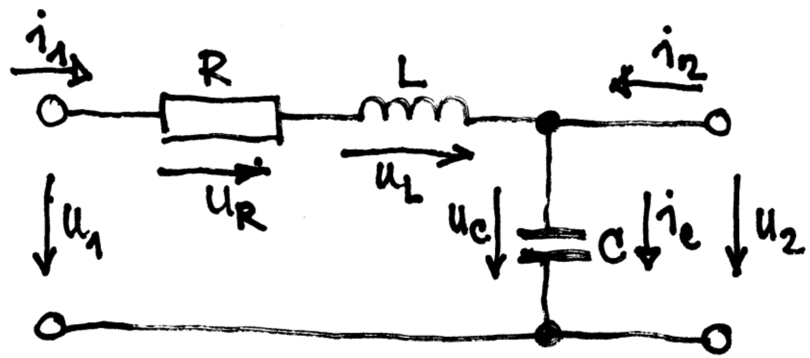
TECHNICKÝ & BIOLOGICKÝ SYSTÉM

základními vlastnostmi biologických systémů jsou i:

- ☑ nestacionarita a neergodicita nedeterministického chování;
- ☑ předpoklady o linearitě představují velice hrubou a omezenou aproximaci;
- ☑ významné omezení počtu experimentů opakovatelných za dostatečně srovnatelných podmínek;
- ☑ významné omezení experimentů z hlediska prevence škod;
- ☑ experimenty na jedincích různého typu (člověk x zvířata) mohou přinášet různé výsledky jak z hlediska kvality, tak kvantity

VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

předpokládejme konstantní parametry prvků R, L, C obvodu



$$u_R(t) + \;(t) + \;(t) = \;(t)$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int_{-}^{t} i_C \, d\tau \quad \text{a} \quad i_L = \frac{1}{L}\int_{-}^{t} u_L \, d\tau$$

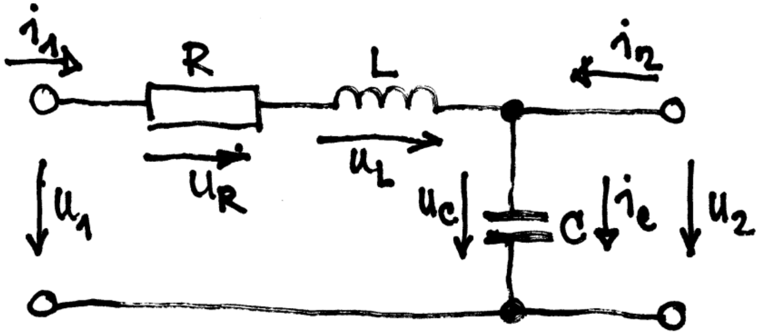
VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

$$i_1 = \; = \; = \frac{du_C}{dt} \quad \text{a} \quad u_L = \frac{di_L}{dt} = \frac{di_1}{dt}$$

$$\text{a tedy } i_1' = {}^{1}\,{}_{L}$$

Pak lze psát

$$R i_1 + \; ' + \; =$$



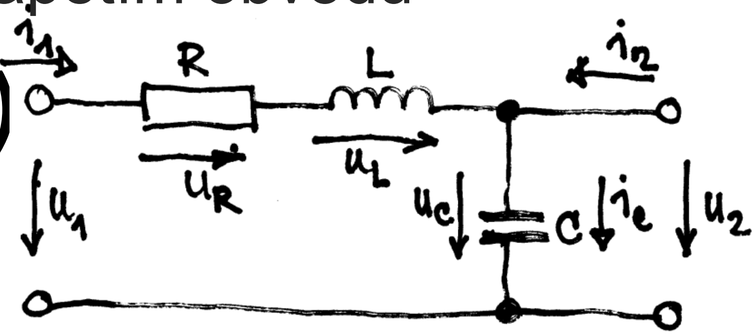
VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

Po záměně pořadí členů na levé straně a po dosazení za proud i_1 a jeho derivaci ze vztahu mezi proudem a napětím na kapacitě je

$$L(u_C''(t) + (u_C'(t) + (t) = (t)$$

a protože napětí na kapacitě je současně i výstupním napětím, tj. $u_C(t) = u_2(t)$ lze psát matematický vztah mezi výstupním u_2 (t) a vstupním $u_1(t)$ napětím obvodu

$$L(u_2''(t) + (u_2'(t) + (t) = (t)$$



Vztah mezi vstupem a výstupem – jedna z forem vnějšího popisu

VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

obecně, spojitý systém n-tého řádu popisuje diferenciální rovnice n-tého řádu

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y = a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_0 x \ ,$$

která je, za předpokladu že parametry $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ jsou konstantní, lineární;

prakticky nelze realizovat takové systémy, jejichž výstupní signál by byl přesně úměrný derivacím vstupního signálu, proto musí platit $m \leq n$;

LINEARITA

Systém je lineární, platí-li pro něj **princip superpozice**

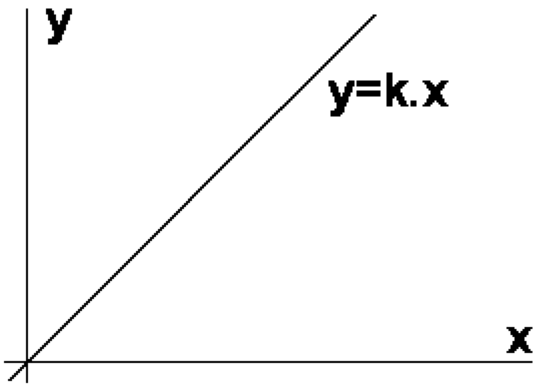
Je-li $y=f(x)$ převodní funkce systému, pak pro lineární systém musí platit

$$1)\ f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2);$$

$$2)\ c.f(x) = f(c.x),\ c = \text{konst.}$$

LINEARITA

A to je jen tehdy, je-li
$y=k.x$, kde k = konst.



1) $k.x_1 + k.x_2 = k.(x_1 + x_2)$

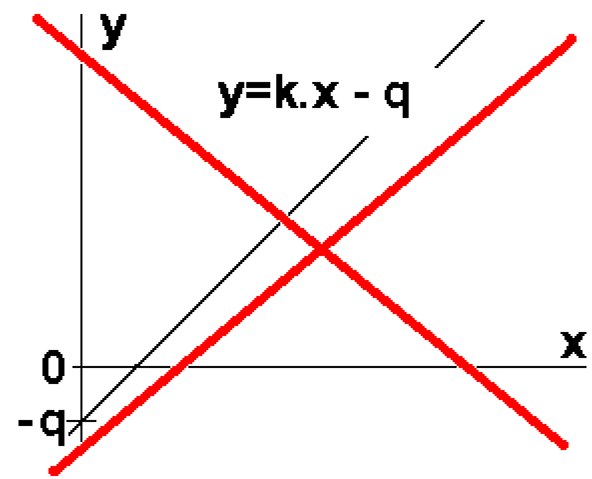
2) $c.k.x = k.c.x$

LINEARITA

A neplatí to ani, když

$y=k.x-q$, kde k,q = konst.,

protože



1) $(k.x_1-q)+(k.x_2-q) \neq k.(x_1+x_2)-q$

2) $c.(k.x-q) \neq (k.c.x-q)$

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

kde $p = \sigma + j\omega$.

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

kde p = σ+jω.

Pamatujeme si ještě definiční vztah Fourierovy transformace?

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

kde $p = \sigma + j\omega$.

Pamatujeme si ještě definiční vztah Fourierovy transformace?

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

VLASTNOSTI

- spousta úžasných vlastností ekvivalentních vlastnostem Fourierovy transformace, navíc i něco co se neuvěřitelně hodí pro řešení diferenciálních rovnic (převádí diferenciální rovnice na mocninné algebraické)
- Laplacův obraz derivace:

$$f'(t) \sim p.F(p) - f(0)$$

$$f^{(n)}(t) \sim p^{n}.F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

PŘENOSOVÁ FUNKCE

$$L C u_2''(t) + \; u_2'(t) + \; (t) = \; (t)$$

Vyjádřeme nyní tuto rovnici pomocí Laplacových obrazů obou veličin. Za předpokladu nulových počátečních podmínek pro Laplacův obraz n-té derivace funkce y(t) platí

$$y^{(n)}(t) \approx \; Y(p) + \;$$

Do dosazení dostáváme

$$LCp^2U_2(p) + \; Cp\,U_2(p) + \; (p) = \; (p)$$
$$(LCp^2 + \; Cp + \;)\,U_2(p) = \; (p)$$

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Pro poměr obrazů výstupní a vstupní veličiny můžeme psát

$$F(p) = \frac{[illegible](p)}{[illegible](p)} = \frac{1}{Cp^2 + [illegible]Cp + [illegible]} = \frac{1}{C\cdot p^2 + R\,p + [illegible]}$$

Takto definovanou funkci za nulových počátečních podmínek (!!!!) nazýváme **obrazovou (operátorovou) přenosovou funkci** daného systému.

PŘENOSOVÁ FUNKCE

pro obecnou diferenciální rovnici n-tého řádu

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y =$$
$$= a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_0 x \,,$$

má přenosová funkce lineárního systému za předpokladu nulových počátečních podmínek tvar

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + a_{m-2} p^{m-2} + \dots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_0}$$

PŘENOSOVÁ FUNKCE

polynom ve jmenovateli přenosové funkce

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0$$

nazýváme charakteristickým polynomem systému a rovnici

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$$

charakteristickou rovnicí systému

PŘENOSOVÁ FUNKCE

řešením charakteristické rovnice

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$$

resp.

$$p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

dostaneme n jejích kořenů p_i, i=1,…,n.

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Podobně můžeme určit i kořeny z_j, j=1,…,m rovnice, která vznikne položením polynomu v čitateli přenosové funkce rovno nule, tj.

$$a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + a_{m-2} p^{m-2} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

Kořeny p_i i z_j mohou být obecně reálné i komplexní; za předpokladu, že koeficienty b_i, resp. a_j jsou reálné, pak kořeny p_i i z_j, jsou-li komplexní, jsou komplexně sdružené.

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Pomocí hodnot kořenů z_j a p_i můžeme psát přenosovou funkci ve tvaru

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = k\frac{(p - z_1).(p - z_2)\ldots(p - z_m)}{(p - p_1).(p - p_2)\ldots(p - p_n)}$$

Kořeny z_j nazýváme nulové body přenosové funkce a kořeny p_i póly přenosové funkce F(p)

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- proměnná p má obecně komplexní charakter a tedy nabývá tvaru

$$p = \sigma + j\omega,$$

kde σ je koeficient tlumení a $\omega = 2\pi f$ je kruhová frekvence

- předpokládejme, že koeficient tlumení

$$\sigma = 0,$$

pak po dosazení za p v operátorové přenosové funkci dostáváme

$$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = Z(j\omega)$$

což nazýváme **frekvenční přenosovou funkcí systému**

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- frekvenční charakteristika je grafické vyjádření frekvenční přenosové funkce systému (geometrické místo koncových bodů vektoru přenosu pro frekvence, prakticky pouze v intervalu $0 \leq \omega < \infty$)

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- frekvenční charakteristiky vyjadřujeme zpravidla dvěma způsoby:
  - frekvenční charakteristika v komplexní rovině

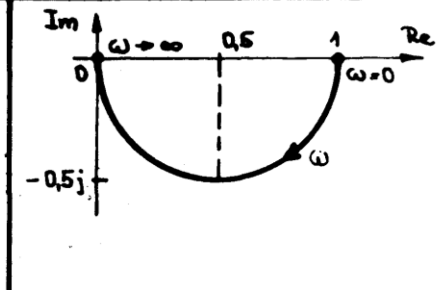
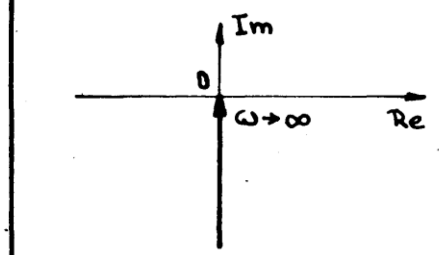
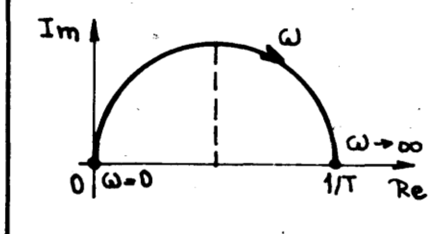
    $$F(j\omega) = \mathrm{Re}\,[F(j\omega)] + j.\mathrm{Im}\,[F(j\omega)]$$

  - modulová (amplitudová) a fázová frekvenční charakteristika

    $$F(j\omega) = |F(j\omega)|.e^{j\varphi(\omega)}$$

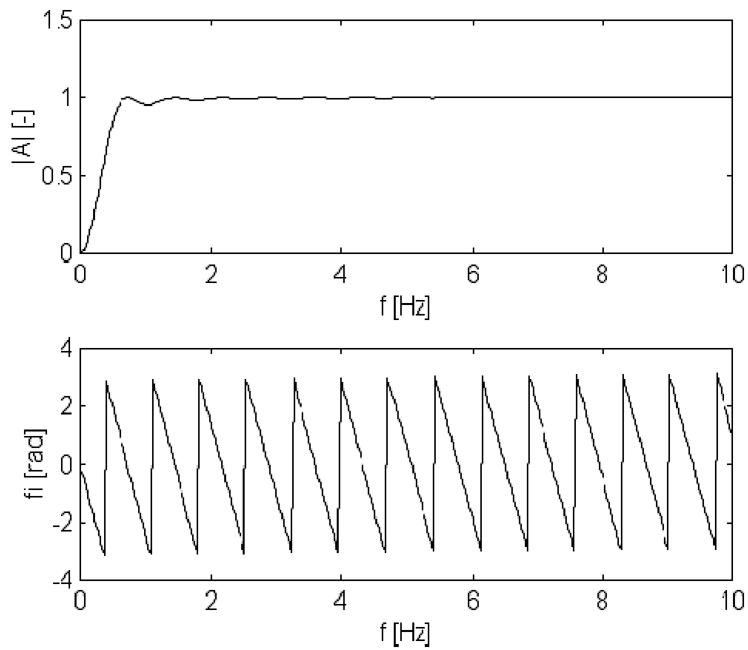
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA V KOMPLEXNÍ ROVINĚ

v tomto případě kreslíme frekvenční charakteristiku nejčastěji v komplexní rovině s osami, na které vynášíme reálnou a imaginární složku přenosu; frekvenční vlastnosti systému vyjadřuje křivka v komplexní rovině, jejímž parametrem je kruhová frekvence ω

přenos	F(jω)
$\frac{1}{Tp+1}$	
$\frac{1}{p}$	
$\frac{p}{Tp+1}$	

MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- vlastnosti systému určují dvě funkce – závislost modulu přenosu na frekvenci a závislost fáze na frekvenci;



MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- v některých případech se využívá pro znázornění těchto charakteristik logaritmické měřítko – amplitudu pak vyjadřujeme v decibelech

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20.\log |F(j\omega)|$$

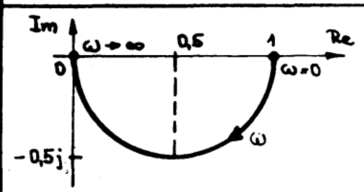
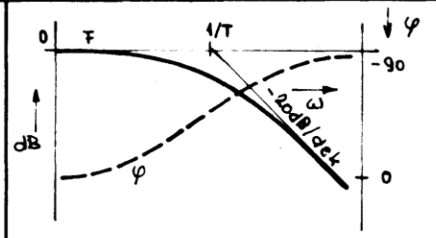
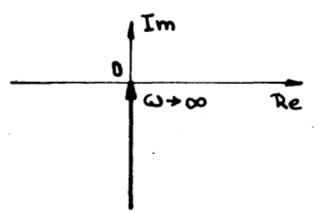
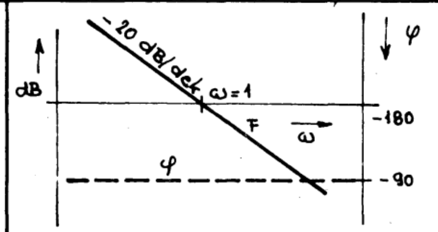
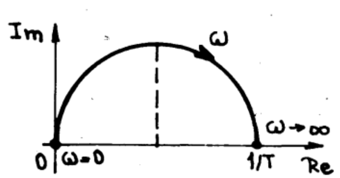
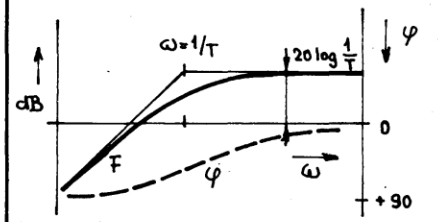
Tento způsob popisu je výhodný v případech, kdy je přenosová funkce systému určena součinem dílčích přenosových funkcí

$$F(j\omega) = F_1(j\omega).\ F_2(j\omega).\ \ldots\ .\ F_k(j\omega);$$

pak platí

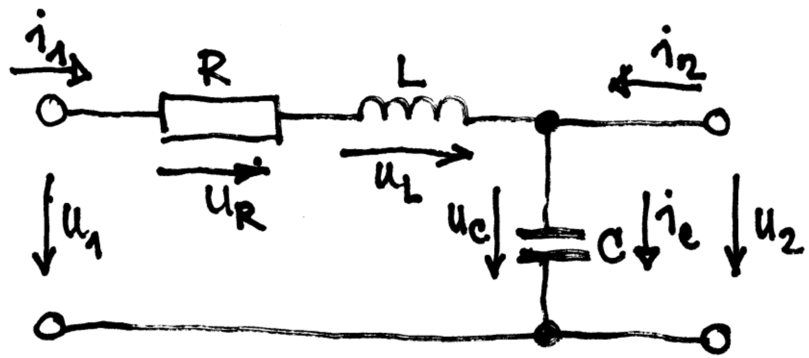
$$|F(j\omega)|.e^{j\varphi(\omega)} = |F_1(j\omega)|.\ |F_2(j\omega)| \ldots\ |F_k(j\omega)|.e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k)}$$

MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

přenos	$F(j\omega)$	$F_{dB} = 20 \log \lvert F(j\omega) \rvert$; $\varphi(\omega)$
$\frac{1}{Tp+1}$		
$\frac{1}{p}$		
$\frac{p}{Tp+1}$		

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

nyní předpokládejme, že kapacita C závisí na napětí na kondenzátoru



$$u_R(t) + (t) + (t) = (t)$$

$$u_C = \frac{1}{C(u_C)} \int^{t} i_C \, d\tau \quad \text{a} \quad i_L = \frac{1}{L} \int^{t} u_L \, d\tau$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$u_L = \cdot\frac{di}{dt} = \cdot\frac{di}{dt} \quad \text{a tedy } i_1 = \frac{1}{\cdot} u_L$$

a tedy i

$$R i_1 + \quad 1 + \quad =$$

Pak se poněkud komplikuje určení $i_1 = i_C$ ze vztahu

$$u_C = \frac{1}{C(u_C)} \int_{-}^{t} i_C \, d\tau$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

Platí, že

$$\int_{-}^{t} i_C(\tau)\,d\tau = C(u_C)\,u_C$$

Potom pro i_C platí

$$i_C = \left(C(u_C)\,u_C\right)' = C'(u_C)\,u'_C\,u_C + C(u_C)\,u'_C$$

Pro jednoduchost, nechť je $C(u_2) = k.u_2$ a tedy $C'(u_2) = k$; pak

$$i_1 = \dots = k\,u_C\,u'_C + k\,u_C\,u'_C = 2k\,u_C\,u'_C$$

$$i'_1 = \dots = 2k\,u'_C\,u'_C + 2k\,u_C\,u''_C = 2k\,{u'_C}^2 + 2k\,u_C\,u''_C$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

A po dosazení dostáváme

$$2kRu_Cu'_C + Lu'^2_C + 1Lu_Cu''_C + \ldots =$$

Protože $C(u_C) = k.u_C$, můžeme psát

$$2RC(u_C)u'_C + C'(u_C)u_Cu'_C + C(u_C)u''_C + \ldots =$$
$$2LC(u_C)u''_C + RC(u_C) + LC(u_C)u'_Cu_C + \ldots =$$

A tedy obecně

$$b_n(\bullet).y^{(n)} + b_{n-1}(\bullet).y^{(n-1)} + \ldots + b_0(\bullet).y =$$
$$= a_m(\bullet).x^{(m)} + a_{m-1}(\bullet).x^{(m-1)} + \ldots + a_0(\bullet).x$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$b_n(\bullet).y^{(n)} + b_{n-1}(\bullet).y^{(n-1)} + \ldots + b_0(\bullet).y =$$
$$= a_m(\bullet).x^{(m)} + a_{m-1}(\bullet).x^{(m-1)} + \ldots + a_0(\bullet).x$$

$(\bullet)$ znamená závislost na určité (dané, zvolené) proměnné popisující chování systému – její průběh, ale obecně závisí na vstupním signálu

$$\Downarrow$$

(1)Vlastnosti nelineárního systému nezávisí jen na systému samém, nýbrž i na jeho vstupu (buzení)

(2) Laplacovu transformaci součinu funkce a derivace proměnné lze počítat (zda-li) jen pro konkrétní případ a tedy nelze obecně stanovit tvar operátorové přenosové funkce nelineárního systému