

### 3. ABSTRAKTNÍ POPIS SPOJITÝCH SYSTÉMŮ

#### 3.1. VNĚJŠÍ (VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ) POPIS

##### 3.1.1. Diferenciální rovnice a operátorová přenosová funkce lineárního systému

Určeme matematický popis proudových a napěťových vztahů v elektrickém RLC obvodu zobrazeném na obr.3-1 (viz též kap.1 a obr.1-5).

Podle Kirchhoffova zákona lze pro napětí v obvodu psát

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t). \quad (3.1)$$

Protože platí

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C d\tau \quad \text{a} \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L d\tau, \quad (3.2)$$

je  $i$ , za předpokladu výstupu na prázdko, tj. bez zátěže,

$$i_C = i = -i' = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{a} \quad u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad \text{a tedy} \quad i' = \frac{1}{L} u_L. \quad (3.3)$$

Pak lze psát

$$Ri + Li' + u_C = u_1. \quad (3.4)$$

Po záměně pořadí členů na levé straně a po dosazení za proud  $i$  a jeho derivaci ze vztahu mezi proudem a napětím na kapacitě je

$$LC \cdot u_C''(t) + RC \cdot u_C'(t) + u_C(t) = u_1(t) \quad (3.5)$$

a protože napětí na kapacitě je současně i výstupním napětím, tj.  $u_C(t) = u_2(t)$  lze psát matematický vztah mezi výstupním  $u_2(t)$  a vstupním  $u_1(t)$  napětím obvodu

$$LC \cdot u_2''(t) + RC \cdot u_2'(t) + u_2(t) = u_1(t). \quad (3.6)$$

Počet akumulacních prvků systému určuje řád diferenciální rovnice – v zadaném příkladu má obvod dva akumulacní prvky (C, L), nejvyšší řád derivace výstupní proměnné je rovněž dva.

Protože uvedená diferenciální rovnice popisuje pouze vztah mezi výstupem a vstupem (bez znalosti struktury či hodnot veličin popisujících chování jednotlivých prvků obvodu) považujeme ji za jednu z variant tzv. vstupního/výstupního popisu systému.

Vyjádřeme nyní tuto rovnici pomocí Laplacových obrazů obou veličin. Za **předpokladu nulových počátečních podmínek** pro Laplacův obraz  $n$ -té derivace funkce  $y(t)$  je

$$y^{(n)}(t) \approx s^n Y(p). \quad (3.7)$$

a proto je

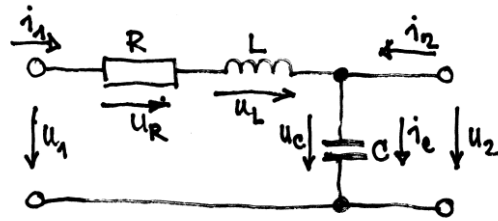
$$LC \cdot p^2 U_2(p) + RC \cdot p U_2(p) + U_2(p) = U_1(p) \quad (3.8)$$

$$(LC \cdot p^2 + RC \cdot p + 1) \cdot U_2(p) = U_1(p)$$

a pro poměr obrazů výstupní a vstupní veličiny můžeme psát

$$F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{LC \cdot p^2 + RC \cdot p + 1} = \frac{1}{LC} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}}. \quad (3.9)$$

Takto definovanou funkci za **nulových počátečních podmínek** označujeme jako **obrazovou přenosovou funkci daného systému**. Obecně je přenosová funkce definována poměrem



Obr.3-1 Seriový pasivní RLC obvod

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + b_{m-2} p^{m-2} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (3.10)$$

Jí odpovídá diferenciální rovnice

$$y^{(n)}(t) + b_{n-1}y^{(n-1)}(t) + b_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \dots + b_1y'(t) + b_0y(t) = a_mx^{(m)}(t) + a_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) \quad (3.11)$$

Pro  $n > m$  má systém popsaný touto diferenciální rovnicí derivační charakter, pro  $n < m$ , integrační charakter. Protože ideální derivační systémy nejsou prakticky realizovatelné musí být u reálných systémů  $n \leq m$ .

Polynom ve jmenovateli přenosové funkce

$$p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0 \quad (3.12)$$

nazýváme **charakteristickým polynomem systému**. Jeho stupeň určuje **řád systému**. Rovnici

$$p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (3.13)$$

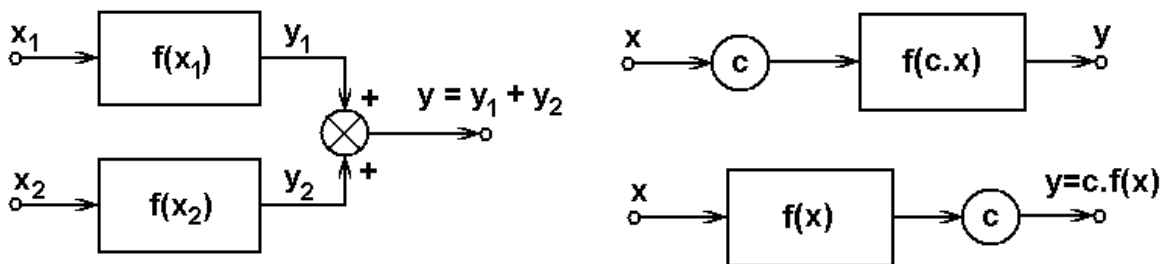
označujeme jako **charakteristickou rovnici systému**.

Jsou-li parametry systému  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_{n-1}$  konstantní je systém lineární.

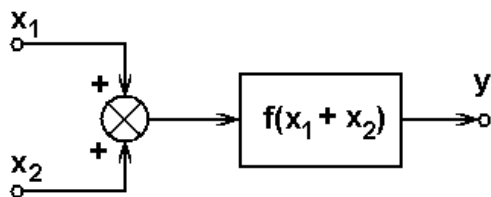
Lineární systém je takový systém, pro nějž platí princip superpozice.

Podle principu superpozice pro lineární systémy s převodní funkcí  $y = f(x)$  platí:

1.  $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1+x_2)$
  2.  $c \cdot f(x) = f(c \cdot x)$
- (3.14)

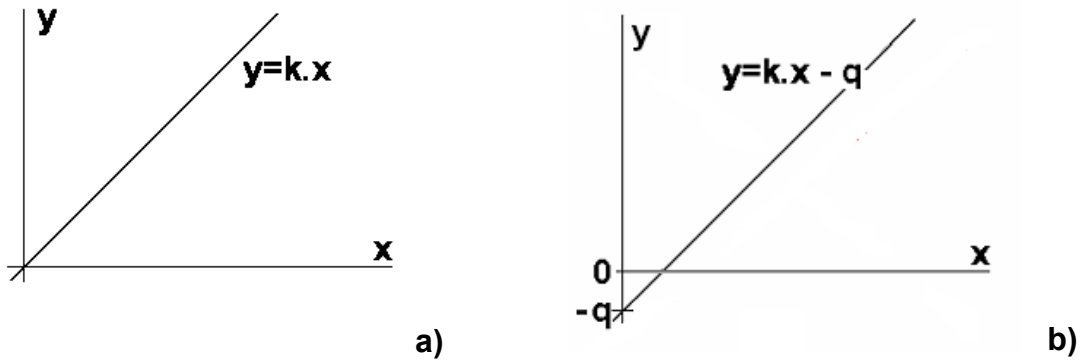


Obr.3-2 Princip superpozice



Příklad:

Ověřte linearitu systémů s převodními funkcemi podle obr.3-3.



Obr.3-3 Příklady převodních charakteristik systémů

a)

$$y_{I+} = k \cdot x_1 + k \cdot x_2 = k \cdot (x_1 + x_2) = y_{II+} \quad (3.15)$$

$$y_{Ic} = k \cdot (c \cdot x) = c \cdot k \cdot x = y_{IIc}$$

Systém s převodní funkcí podle obr.3-3a splňuje princip superpozice, je tedy lineární.

b)

$$y_{I+} = k \cdot x_1 - q + k \cdot x_2 - q = k \cdot (x_1 + x_2) - 2q \neq k \cdot (x_1 + x_2) - q = y_{II+} \quad (3.16)$$

$$y_{Ic} = k \cdot (c \cdot x) - q = ckx - q \neq c \cdot (k \cdot x - q) = ckx - cq = y_{IIc}$$

Systém s převodní funkcí podle obr.3-3b nespĺňuje princip superpozice, tedy lineární není, přestože jeho převodní funkce má lineární charakter. □□□

### 3.1.2. Vnější popis nelineárního systému

Předpokládejme nyní, že kapacita  $C$  není konstantní, ale závisí na napětí na kondenzátoru, je tedy  $C = C(u_C) = C(u_2)$ . (Tento stav můžeme považovat za reálný a běžný v případě, že uvedený model charakterizuje poměry v úseku cévy - objemová kapacita pružné cévy závisí na tlaku krve, která jí proudí.) Za tohoto předpokladu stále platí

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t), \quad (3.17)$$

ale

$$u_C = \frac{1}{C(u_C)} \int_{-\infty}^t i_C d\tau \quad \text{a} \quad u_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L d\tau \quad (3.18)$$

a

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{di_1}{dt} \quad \text{a tedy} \quad i_1 = \frac{1}{L} \int u_L dt \quad (3.19)$$

Po dosazení do rovnice (3.17) dostáváme

$$R \cdot i_1 + L \cdot i_1' + u_C = u_1, \quad (3.20)$$

Výpočet proudu  $i_1$  se ale poněkud komplikuje. Z prvního vztahu z dvojice (3.18) máme

$$\int_{-\infty}^t i_C d\tau = \lambda(u_C) \cdot u_C, \quad (3.21)$$

a derivací obou stran tohoto vztahu získáváme

$$i_C = \lambda(u_C) \cdot u_C' = \lambda'(u_C) \cdot u_C \cdot u_C + \lambda(u_C) \cdot u_C'. \quad (3.22)$$

Pro zjednodušení dalších výpočtů předpokládejme, že je závislost C na  $u_2$  lineární, tj.  $C(u_2) = k \cdot u_2$  a tedy  $C'(u_2) = k$ . Potom

$$i_1 = i_c = i \cdot u'_c \cdot u_c + i \cdot u_c \cdot u'_c = 2k \cdot u_c \cdot u'_c \quad (3.23)$$

a

$$i'_1 = i'_c = 2k \cdot u_c \cdot u'_c + k \cdot u'_c \cdot u'_c + k \cdot u_c \cdot u''_c = 2k \cdot u'_c \cdot u'_c + k \cdot u_c \cdot u''_c.$$

Po dosazení za  $i_1$  a  $i'_1$  do vztahu (3.20) dostaneme

$$2k \cdot R \cdot u_c \cdot u'_c + k \cdot L \cdot u''_c + k \cdot L \cdot u_c \cdot u''_c + i_c = i_1 \quad (3.24)$$

a protože předpokládáme, že  $C(u_2) = k \cdot u_2$ , můžeme psát

$$\begin{aligned} 2R \cdot C(u_c) \cdot u'_c + L \cdot C'(u_c) \cdot u'_c \cdot u'_c + L \cdot C(u_c) \cdot u''_c + i_c &= i_1; \\ 2L \cdot C(u_c) \cdot u''_c + 2R \cdot C(u_c) + 2L \cdot C'(u_c) \cdot u'_c \cdot u'_c + i_c &= i_1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

případně

$$u''_c + \frac{2R \cdot C(u_c) + 2L \cdot C'(u_c) \cdot u'_c \cdot u'_c}{2L \cdot C(u_c)} \cdot u'_c + i_c = \frac{i_1}{2L \cdot C(u_c)}. \quad (3.26)$$

Zobecníme-li výsledek odvozování reprezentovaný vztahem (3.26), platí

$$y^{(n)} + b_{n-1}(\bullet) \cdot y^{(n-1)} + \dots + b_0(\bullet) \cdot y = a_m(\bullet) \cdot x^{(m)} + a_{m-1}(\bullet) \cdot x^{(m-1)} + \dots + a_0(\bullet) \cdot x, \quad (3.27)$$

kde symbol  $(\bullet)$  vyjadřuje komplexní závislost nejen na požadované veličině, tj. v našem případě napětí  $u_c$ , ale jejím prostřednictvím i na dalších veličinách popisujících stav systému, např. i vstupním napětím, jak je dáno vztahem (3.17).

Z toho plynou závěry pro popis nelineárních systémů:

- (1) **Vlastnosti nelineárního systému nezávisí jen na systému samém, nýbrž mohou být ovlivněny i jeho vstupem (buzením)**
- (2) **Laplacovu transformaci součinu funkce a derivace proměnné lze počítat (zda-li) jen pro konkrétní případ a tedy nelze obecně stanovit tvar operátorové přenosové funkce nelineárního systému tak, jak tomu je v případě lineárních systémů.**

### 3.1.4. Frekvenční charakteristiky

Laplacova proměnná  $p$  má obecně komplexní charakter, tedy nabývá tvaru  $p = \sigma + j\omega$ , kde  $\sigma$  je koeficient tlumení a  $\omega = 2\pi f$  je kruhová frekvence. Budeme-li předpokládat nulový koeficient tlumení, tj.  $\sigma = 0$ , pak po dosazení za  $p = j\omega$  do vztahu (3.10) pro operátorovou přenosovou funkci máme

$$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{a_m \cdot (j\omega)^n + a_{m-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + a_{m-2} \cdot (j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0}{(j\omega)^l + b_{n-1} \cdot (j\omega)^{l-1} + b_{n-2} \cdot (j\omega)^{l-2} + \dots + b_1 \cdot (j\omega) + b_0} = \tilde{F}(j\omega) \cdot e^{j\phi \cdot \omega}. \quad (3.28)$$

Funkce  $F(j\omega)$  je funkcí komplexní proměnné  $\omega$  **frekvenční přenosovou funkcí systému**. Pro jednoduchost budeme v jejím argumentu ale budeme vynechávat komplexní jednotku  $j$ , takže nadále budeme psát

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \tilde{F}(\omega) \cdot e^{j\phi \cdot \omega}. \quad (3.29)$$

Grafické vyjádření frekvenční přenosové funkce systému (geometrické místo koncových bodů vektoru přenosu pro frekvence, prakticky z intervalu  $0 \leq \omega < \infty$ ) nazýváme **frekvenční charakteristikou systému**. Frekvenční charakteristiky zpravidla znázorníme dvěma způsoby:

a) **frekvenční charakteristika v komplexní rovině**

$$F(\omega) = \text{Re} [F(\omega)] + j \cdot \text{Im} [F(\omega)]. \quad (3.30)$$

b) **modulová (amplitudová) a fázová frekvenční charakteristika**

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.31)$$

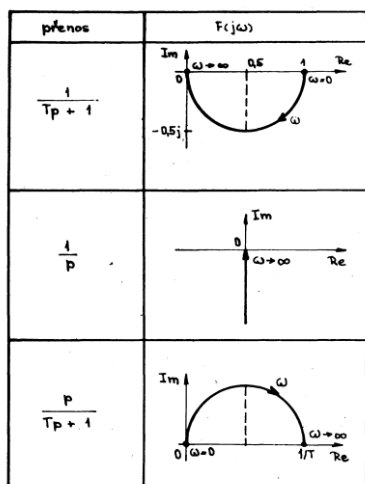
ad a)

V tomto případě kreslíme frekvenční charakteristiku v komplexní rovině, do které vynášíme reálnou a imaginární složku přenosu; frekvenční vlastnosti systému vyjadřuje křivka v komplexní rovině, jejímž parametrem je kruhová frekvence  $\omega$  (obr.3-4 pravý sloupec).

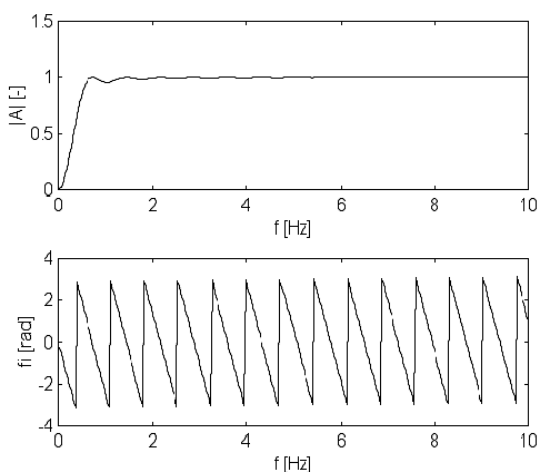
ad b)

Frekvenční vlastnosti systému určují dvě funkce - závislost modulu frekvenčního přenosu na frekvenci a závislost fáze frekvenčního přenosu na frekvenci (obr.3-5).

$$F_m(\omega) = |F(\omega)| \quad \text{a} \quad F_\varphi(\omega) = e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.32)$$



Obr.3-4 Frekvenční charakteristiky vybraných systémů v komplexní rovině



Obr.3-5 Modulová a fázová frekvenční charakteristika systému

V některých případech se využívá pro znázornění těchto modulové a fázové frekvenční charakteristiky logaritmické měřítka – amplitudu pak vyjadřujeme v decibelech

$$|F(\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log |F(\omega)| \quad (3.33)$$

Tento způsob popisu je výhodný v případech, kdy je přenosová funkce systému určena součinem dílčích přenosových funkcí

$$F(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \cdot \dots \cdot F_k(\omega); \quad (3.34)$$

pak platí

$$|F(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} = |F_1(\omega)| \cdot |F_2(\omega)| \dots |F_k(\omega)| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k)} \quad (3.35)$$

Charakteristiky tohoto typu nazýváme **Bodeho charakteristiky**.

Příklad:

Určete Bodeho charakteristiky systému s přenosovou funkcí

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} \quad (3.36)$$

Řešení:

□□□

Podle tvaru modulové frekvenční charakteristiky rozdělujeme systémy na čtyři základní typy:

- **dolní propust** (obr.3-6) - systém přenáší nízkofrekvenční složky signálu, zatímco vysoké frekvence potlačuje; (a - frekvenční charakteristika, b - původní signál, c- vyfiltrovaný signál)

- **horní propust** (obr.3-7) - systém tohoto typu přenáší složky signálu s vyššími frekvencemi, složky nízkofrekvenční potlačuje;
- **pásmová propust** (obr.3-8) - systémem jsou přenášeny pouze frekvence z určitého frekvenčního pásma; složky signálu s frekvencemi nižšími i vyššími než je přenášené pásmo jsou potlačeny
- **pásmová zádrž** (obr.3-9) - systém potlačuje frekvenční složky signálu z určitého, často relativně úzkého kmitočtového pásma; frekvenční složky signálu, které nespádají do tohoto pásma systém přenáší.

Frekvenční charakteristiky můžeme experimentálně stanovit pomocí buzení systému harmonickými signály o různých frekvencích a zkoumat vliv systému na průběh výstupního signálu, tj. jakým způsobem se změnila amplituda a fáze výstupu ve srovnání se vstupním signálem.

### 3.1.4. Reprezentace lineárního systému pomocí rozložení nul a pólů

Řešením charakteristické rovnice (3.13)

$$p^n + \iota_{n-1} \cdot p^{n-1} + \iota_{n-2} \cdot p^{n-2} + \dots + \iota_1 p + \iota_0 = 0$$

dostaneme n jejích obecně komplexních kořenů  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , které nazýváme **póly operátorové přenosové funkce**. Podobně řešením rovnice, která vznikne položením polynomu v čitateli přenosové funkce nule, tj.

$$a_m p^m + \iota_{m-1} \cdot p^{m-1} + \iota_{m-2} \cdot p^{m-2} + \dots + \iota_1 p + \iota_0 = 0 \quad (3.37)$$

získáme m obecně komplexních kořenů  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , které nazýváme **nuly operátorové přenosové funkce** systému. Nuly i póly přenosové funkce nabývají buď reálných nebo komplexně sdružených hodnot.

Za tohoto předpokladu můžeme psát přenosovou funkci systému ve tvaru

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \iota_m \cdot \frac{(p - \iota_1)(p - \iota_2) \dots (p - \iota_m)}{(p - \iota_1)(p - \iota_2) \dots (p - \iota_n)} \quad (3.38)$$

Ze vztahu (3.38) plyne, že pouze ze znalosti rozložení všech nul a pólů přenosové funkce nemůžeme určit přenosovou funkci beze zbytku, schází znalost zesílení systému, definovaného koeficientem  $a_m$ .

### 3.1.5. Reprezentace lineárního systému pomocí časových charakteristik

#### Impulsní charakteristika

Obrazová přenosová funkce systému  $F(p)$  je podle vztahu (3.10) definována jako poměr obrazů výstupního a vstupního signálu

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

za předpokladu nulových počátečních podmínek. Z toho plyne, že obraz výstupního signálu můžeme spočítat za předpokladu, že známe přenosovou funkci a obraz vstupního signálu, jako jejich součin, tj.

$$Y(p) = F(p) \cdot X(p) \quad (3.39)$$

Dále, v kap.2.3.4 jsme zavedli pojem konvoluce, který vyjadřoval vztah mezi dvěma funkcemi (signály) téhož argumentu. Podle vztahu (2.44) platí pro funkce  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$ , že

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau,$$

přičemž bylo dále uvedeno, že v Laplacově i Fourierově doméně platí (vztah (2.48))

$$\mathcal{L}(x_1(t) * x_2(t)) = X_1(p) \cdot X_2(p);$$

resp.

$$\mathcal{F}(x_1(t) * x_2(t)) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega),$$

tedy, že Laplacův, resp. Fourierův obraz konvoluce je roven součinu obrazů obou funkcí, které do konvoluce vstupují.

Jestliže vztah (3.39) říká, že obraz  $Y(p)$  výstupního signálu  $y(t)$  systému je dán součinem přenosové funkce systému s obrazem vstupního signálu, pak musí platit, že časový průběh výstupního signálu můžeme určit pomocí konvoluce vstupního signálu s nějakou časovou funkcí, která by dokázala charakterizovat vlastnosti systému. Otázkou je, jaká je to časová funkce?

Předpokládejme, že obrazem vstupního signálu  $X(p) = 1$ . V tom případě je

$$Y(p) = \bar{r}(p) \cdot X(p) = \bar{r}(p) \cdot 1 = \bar{r}(p). \quad (3.40)$$

Z toho vyplývá, že přenosová funkce se rovná obrazu výstupního signálu systému, který je vybuzen signálem s jednotkovým Laplacovým obrazem (případně ekvivalentně Fourierovým obrazem). Takový signál je jednotkový skok. Tedy obrazová přenosová funkce spojitého systému je rovna Laplacovy transformace odezvy systému na jednotkový impuls  $g(t)$ ,

$$F(p) = \mathcal{L}(g(t)) \quad (3.41)$$

případně naopak

$$g(t) = y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)). \quad (3.42)$$

Systém tedy můžeme charakterizovat odezvou na jednotkový impuls  $g(t)$ , která je určena zpětnou Laplacovou transformací obrazové přenosové funkce (zpětnou Fourierovou transformací frekvenční přenosové funkce). Protože tato odezva charakterizuje vlastnosti systému nazýváme ji **impulsní charakteristikou** systému. Na rozdíl od všech dříve uvedených způsobů popisu lineárního systému má impulsní charakteristika vlastnosti časové funkce.

Z uvedeného také dále vyplývá, že odezvu systému na buzení libovolným vstupním signálem můžeme počítat jako konvoluci časového průběhu vstupního signálu s impulsní charakteristikou systému. Je proto

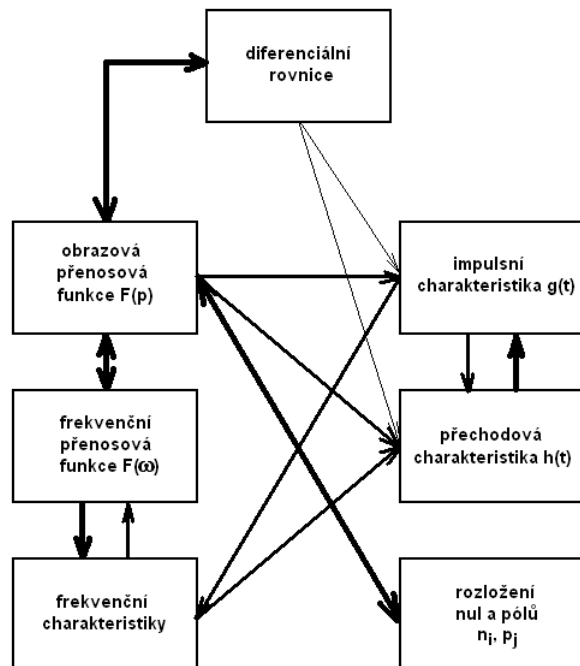
$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_0^t g(\tau) \cdot x(t - \tau) \cdot d\tau = \int_0^t g(t - \tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau, \quad (3.43)$$

Jednotkový impuls má nekonečně široké konstantní spektrum, tedy přivedení tohoto signálu na vstup systému se rovná přivedení úplné směsi harmonických signálů o frekvencích do 0 do  $\infty$  Hz se stejnými amplitudami. Takový signál ovšem není žádný reálný systém schopen převést bez deformace. Impulsní charakteristiku tedy vnímáme jako systémem zdeformovaný Diracův impuls a podle průběhu či vlastností takto zdeformovaného signálu můžeme usuzovat na vlastnosti systému.

### Přechodová charakteristika

Podobně jak je impulsní charakteristika odezvou systému na jednotkový impuls, je možné popsat vlastnosti i pomocí odezvy na druhý základní jednorázový signál, tj. na jednotkový skok. Tuto odezvu nazýváme přechodovou charakteristikou systému a označujeme ji  $h(t)$ . Protože Laplacovým obrazem jednotkového skoku je  $\mathcal{L}(\sigma(t)) = 1/p$ , je

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p) \cdot 1/p). \quad (3.42)$$



Obr.3-10 Vzájemné převody různých forem vnějšího popisu lineárních systémů

### 3.1.5. Vzájemné vztahy mezi různými formami vnějšího popisu lineárního systému

Na obr.3-10 je zobrazeno všech sedm způsobů vnějšího popisu lineárních systémů. Používané vzájemné převody jsou v obrázku vyznačeny spojnici mezi jednotlivými způsoby popisu, čím jednodušší a používanější převod, tím je spojnice mezi popisy silněji vyznačena. Obecně lze konstatovat, že všechny způsoby vnějšího popisu lineárních systémů jsou si vzájemně ekvivalentní (kromě rozložení nul a pólů), je jen otázka jak potřeba, jak praktické a jak obtížné jsou vzájemné převody.

Mnohé z těchto převodů jsme uvedli v kapitolách pojednávajících o jednotlivých formách popisu. Elementární a velice často používaný je převod mezi diferenciální rovnicí a obrazovou přenosovou funkcí, vycházející z Laplaceova obrazu derivace. Podobná situace je převodem obrazové přenosové funkce na frekvenční přenosovou funkci a naopak, resp. dále na frekvenční charakteristiky. Obtížnější je určení analytické přenosové funkce (frekvenční, obrazové) z naměřených hodnot frekvenčních charakteristik, většinou se tak děje přibližnou aproximací, je-li zadán předpokládaný či známý řád systému nebo alespoň požadavek na přesnost aproximace. Jednoduchý je i převod mezi časovými charakteristikami (impulsní charakteristika je derivací přechodové charakteristiky) a převod mezi časovými charakteristikami a přenosovými funkcemi. Vztahy mezi frekvenční a časovou oblastí již tak jednoduché nejsou.

### 3.2. VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

Nyní použijme veličiny, které popisují integrační (akumulační) charakter obou prvků, tj. napětí na kapacitě  $u_C(t)$  a proud indukčnosti  $i_L(t)$ , k popisu dějů uvnitř obvodu (stavového popisu).

Z definice napětí na kapacitě je

$$u'_C = \frac{1}{C} \cdot i_C = \frac{1}{C} \cdot i \quad (3.12)$$

a z rovnice

$$R \cdot i + \dots \cdot i' + I_C = I_1 \quad (3.13)$$

dostáváme po normalizaci a separaci derivace proudu

$$i' = -\frac{1}{L} \cdot u_C - \frac{R}{L} \cdot i + I_1 \quad (3.14)$$

Vytvoříme-li vektor veličin  $\mathbf{s} = [u_C, i]^T$  a jejich derivací  $\mathbf{s}' = [u'_C, i']^T$ , pak můžeme zapsat obě výše uvedené rovnice v maticové tvaru

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -R/L & -1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Vektor  $\mathbf{s} = [u_C, i]^T$  je stavový vektor systému.

Obecně lze výše uvedenou rovnici zapsat jako soustavu  $n$  diferenciálních rovnic 1. řádu ( $n$  je počet stavových akumulacích proměnných,  $n$  je řád celého systému) jako

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}'_1 \\ \mathbf{s}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \dots & \mathbf{b}_{1m} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \dots & \mathbf{b}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{n1} & \mathbf{b}_{n2} & \dots & \mathbf{b}_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$$

kde  $[\mathbf{s}] = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$  je stavový vektor (vektor stavových veličin), matice  $\mathbf{A}$  je matice dynamiky systému (matice vnitřních vazeb, matice zpětných vazeb, matice systému) a matice  $\mathbf{B}$  je matice vstupních vazeb systému (vstupní matice). Tento zápis definuje tzv. první stavovou rovnici systému.



Druhá stavová rovnice definuje vztah mezi výstupními veličinami systému a jeho stavovými a vstupními veličinami. Tedy

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$y = \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$$

kde  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_r]$  je vektor výstupních veličin, matice  $\mathbf{C}$  je matice vazeb stavu systému na výstup (výstupní matice systému) a matice  $\mathbf{D}$  je matice přímých vstupně-výstupních vazeb.

Protože v zadaném příkladu je výstupní napětí  $u_2$  definováno pomocí stavových a vstupních veličin jednoduchým vztahem

$$u_2 = u_C, \quad (3.18)$$

má druhá (výstupní) stavová rovnice zadaného elektrického obvodu tvar

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_0 \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} + \mathbf{U}_1 \mathbf{I}_1. \quad (3.19)$$