Dobrý den

(přepis z folií známého mojeho)

5. přednáška

21.10.2003

Práce & energie: II. část (I. viz prof. DUB)

(Dráhový účinek síly)

→ Práce čeho? ... síly ...

je $\vec{F}(\vec{r})$ všude stejné (pro ∀ $\vec{r}$?)

→ Někdy ano, někdy ne.

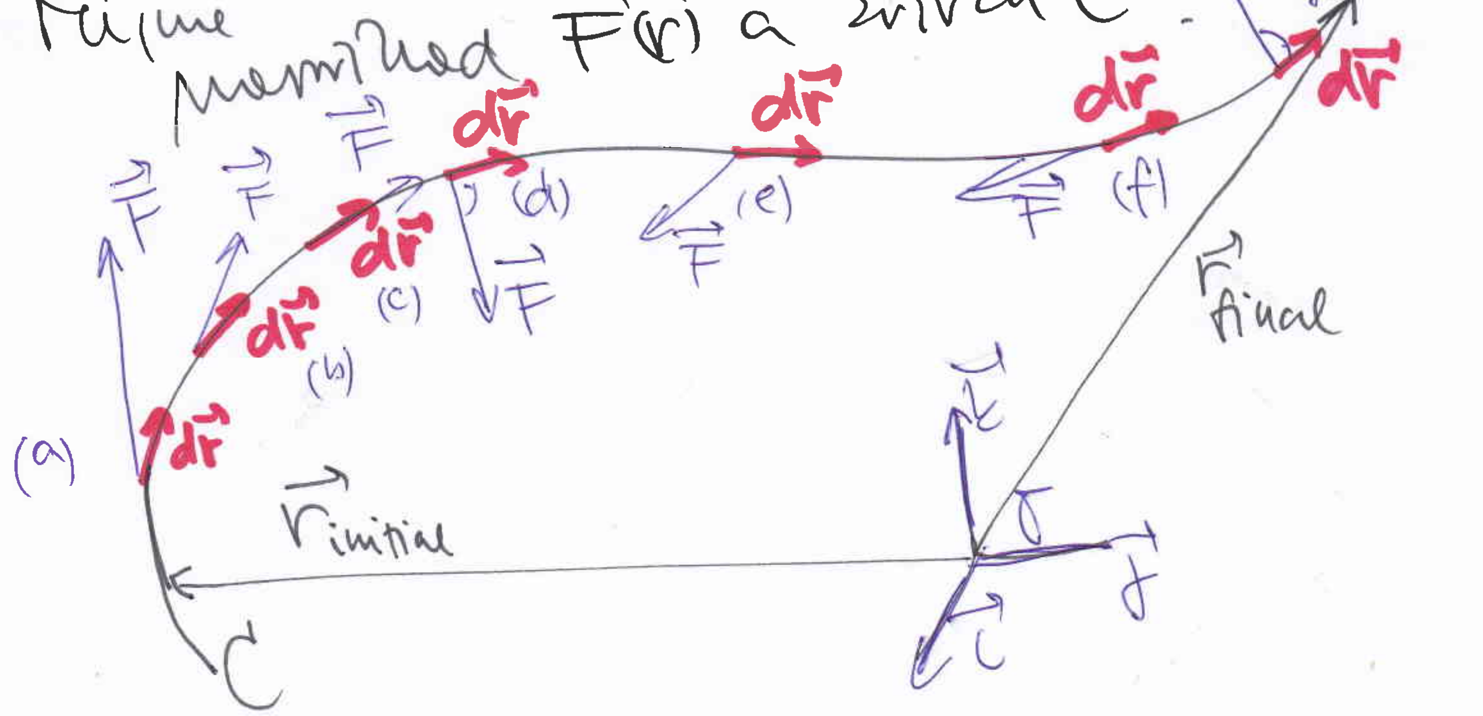
Proto se zabýváme „velmi malou" prací:

$$\boxed{\vec{F}\cdot d\vec{r} = \delta W}$$

co to je? δ d ∂

skalární součin ~ $\cos\angle(\vec{F}, d\vec{r})$ a $|\vec{F}|\,|d\vec{r}|$

Mějme nemilou $\vec{F}(\vec{r})$ a křivku C:



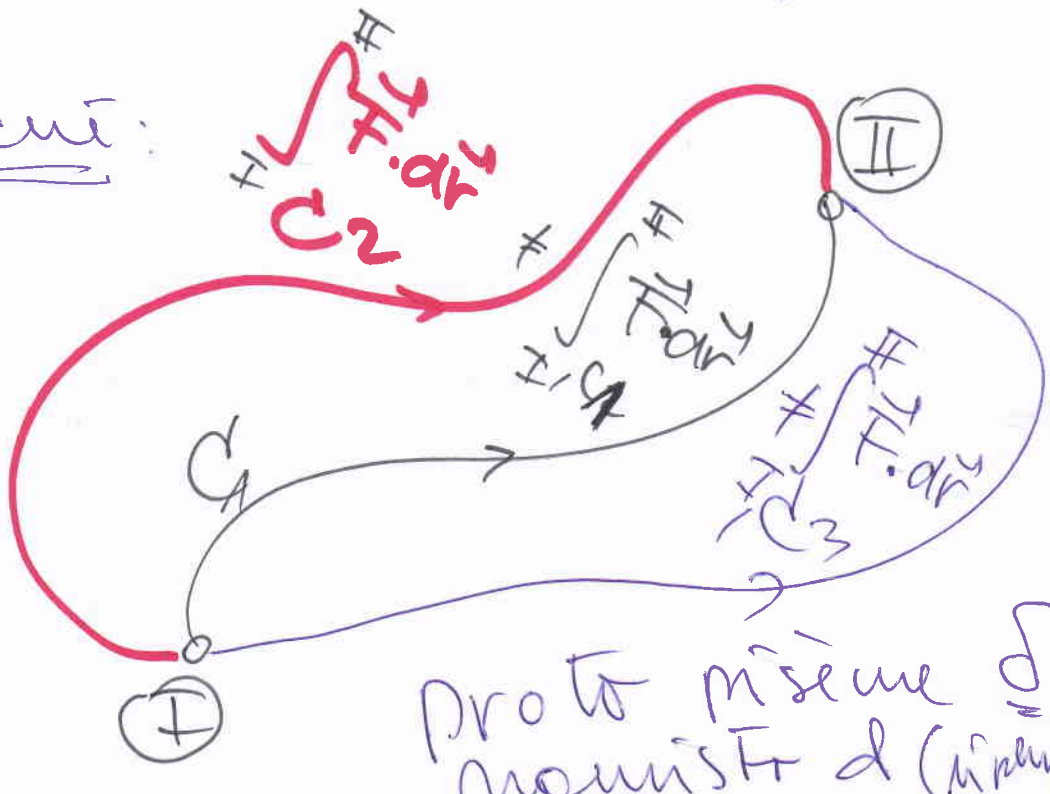
Obecně může hodnota skalárního součinu $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ záviset na „místě", kde síla $\vec{F}$ „posunuje" o $d\vec{r}$.

Na křivce C lze nalézt body $\vec{r}$, kde $\vec{F}_{\vec{r}}\cdot d\vec{r}$ je
- > 0 .. (a, b, c)
- $= 0$ .. (d, g)
- < 0 .. (e, f)

Jaký je „výsledek" práce síly $\vec{F}_{\vec{r}}$ po křivce C ?:

$$W_{\vec{F},\, I\to II} = \int_{I,\,C}^{II} \delta W = \int_{\vec{r}_I,\,C}^{\vec{r}_{II}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Obecně:



Proto píšeme δ (neúplný diferenciál)
nemůžeme d (úplný diferenciál)

Pozn.:

Integrál $\displaystyle\int_{\vec{r}_1, C}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

nelze obecně rozepsat na 3:

$$\int_{r_{1,x}}^{r_{2,x}} F_x \, dx + \int_{r_{1,y}}^{r_{2,y}} F_y \, dy + \int_{r_{1,z}}^{r_{2,z}} F_z \, dz$$

protože (obecně) mícháme x,y,z

$\vec{F} = \left(F_x(x,y,z) ; F_y(x,y,z) ; F_z(x,y,z) \right)$

složky funkcí x, y a z.

musíme <u>parametrizovat</u>:

i) křivku

ii) $\vec{F}(\vec{r})$ $\Big\}$ $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F(r) \, dr \cos\alpha$

iii) $d\vec{r}$

iv) $\cos\alpha$

Pomocí jediného parametru!

Vektorové pole
(pole vektorů)

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r})}$$

V každém bodě $\vec{r}$ je vektor, který má velikost a směr (obecně různé v různých bodech)

„SALÁMEK" ve třídě: $\vec{g}$

Skalární pole
(pole čísel) napoř. $\varphi(\vec{r})$

V každém bodě $(\vec{r})$ popsané různými napoř.

teplota (číslo) $T(\vec{r})$

tlak $p(\vec{r})$

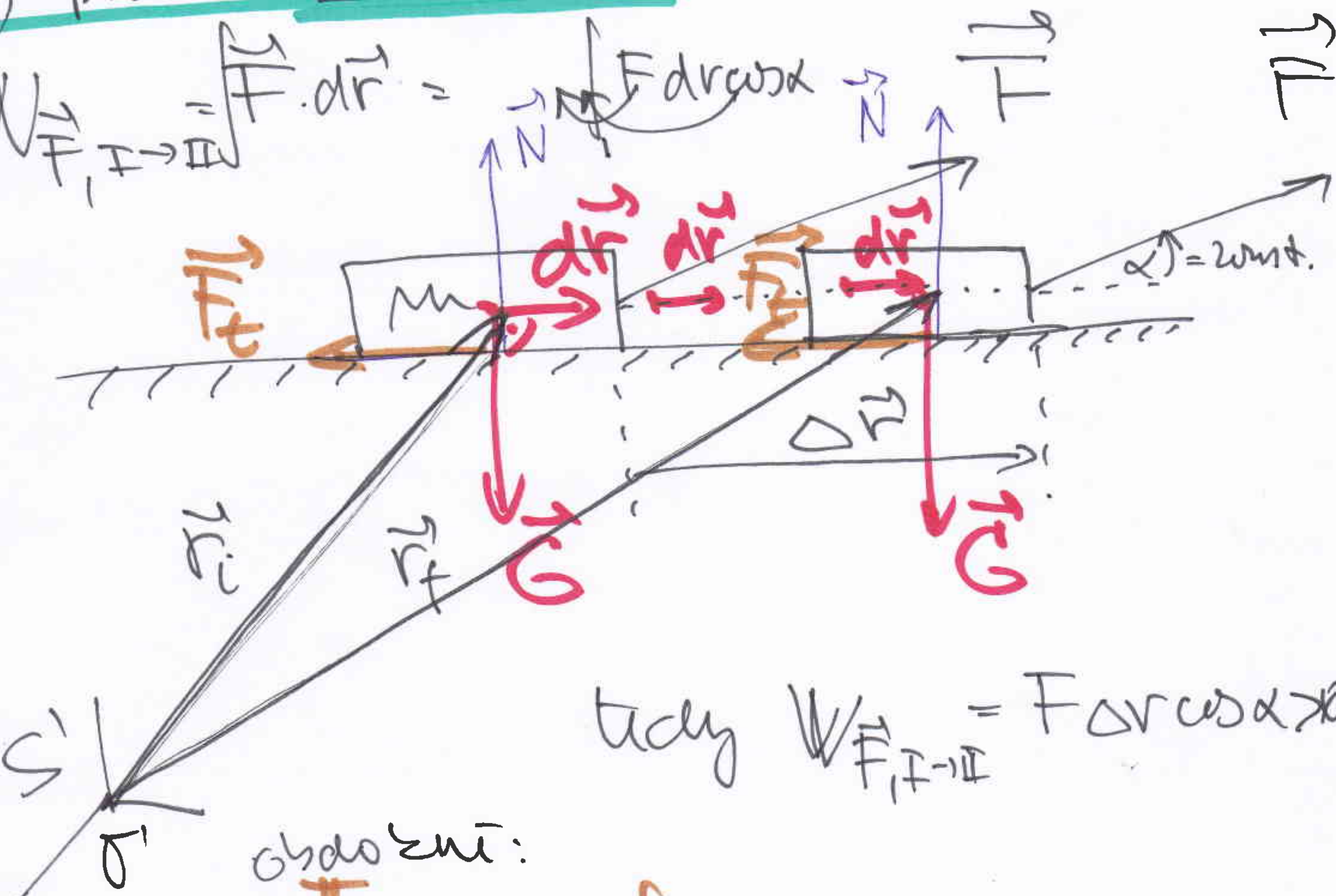
výška od země (nadmořská) $h(\vec{r})$

Vyjádření

práce „speciálních" sil

i) práce konstantní síly

$$W_{\vec{F},I\to II} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int F\,dr\cos\alpha$$



tedy $W_{\vec{F},I\to II} = F\Delta r\cos\alpha > 0$

obdobně:

$$W_{\vec{F}_t,I\to II} = \int_I^{II} \vec{F}_t\cdot d\vec{r} = \int |\vec{F}_t||d\vec{r}|\cos 180^\circ =$$

$$= \int_I^{II} mgf_d(-1)\,dr = -mgf_d\int_{r_I}^{r_{II}} dr$$

$$= -mgf_d\Delta r < 0$$

$W_{\vec{G},I\to II} = 0$, protože $\vec{G}\perp d\vec{r}$ všude

(to samé pro $W_{\vec{N},I\to II} = 0$, $\vec{N}\perp d\vec{r}$)

ii) práce výslednice sil $W_{\vec{F}_V, I \to II}$

$$W_{\vec{F}_V, I \to II} = \int_I^{II} \vec{F}_V \cdot d\vec{r} \overset{II. NPZ}{=} \int_I^{II} m\vec{a} \cdot d\vec{r} =$$

skalární součin

$$= m \int_I^{II} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_I^{II} d\vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= m \int_{\vec{v}_I}^{\vec{v}_{II}} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

$2v\,dv = \vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$

skalární součin mezi $\vec{v}$ a $d\vec{v}$

$$= m \int_{v_I}^{v_{II}} v\,dv = m \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v_I}^{v_{II}} =$$

obyčejný součin velikosti rychlosti a dv

kinetická energie

$$= \frac{1}{2} m v_{II}^2 - \frac{1}{2} m v_I^2 = E_{k,II} - E_{k,I} = \Delta E_k$$

tedy výslednice sil zajišťuje změnu kinetické energie $\begin{pmatrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{pmatrix}$, (ať se skládá z jakýchkoliv sil)!

$$\boxed{W_{\vec{F}_V, I \to II} = \Delta E_k}$$

iii) práce „konzervativních" sil

Co to je konzervativní síla?

——"—— pole?

Něčím jsou výjimečné → něco zachovávají...

Příklady (volněji podrobněji později)

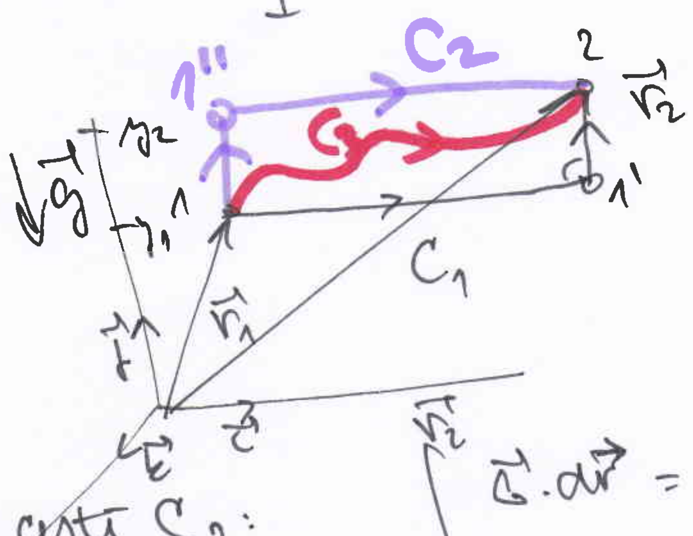
$\vec{F}_k$: konzervativní síla (vektorové pole)	E_p: odpovídající pole (skalární)
$\vec{G}$ tíhová síla	tíhové pole; $E_{p,t}$
$\vec{F}_g$ gravitační síla	gravitační pole; $E_{p,g}$
$\vec{F}_p$ síla pružiny	pole pružiny; $E_{p,p}$
$\vec{F}_e$ elektrostatická síla (Coulombova)	elektrostatické pole $E_{p,e}$

Příklad výpočtu práce konzervativní síly (tíhové)

iii a) práce tíhové (konz.) síly $\vec{G}$:

$$W_{\vec{G}, I \to II} = \int_{I}^{II} \vec{G}\cdot d\vec{r}$$

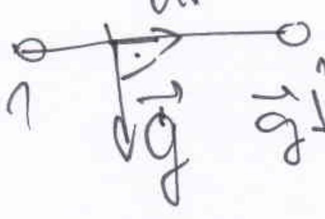
odr.:



Máme 3 různé cesty (C_1, C_2, C_3) ze stejného $\vec{r}_1$ do stejného $\vec{r}_2$

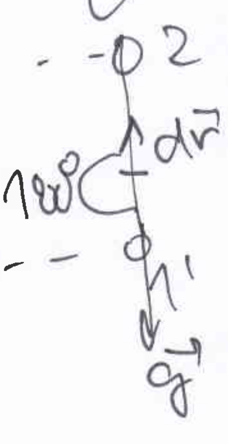
1) po cestě C_1:

$$\int_{\vec{r}_1, C_1}^{\vec{r}_2} \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_{1}^{1'} \vec{G}\cdot d\vec{r} + \int_{1'}^{2} \vec{G}\cdot d\vec{r}$$



$\vec{g}\cdot d\vec{r} = 0$

$\vec{g} \perp d\vec{r} \Rightarrow$ všude od 1→1'



$\vec{g}\cdot d\vec{r} = -g\,dr$

$g\,dr(-1)$

cos 180°

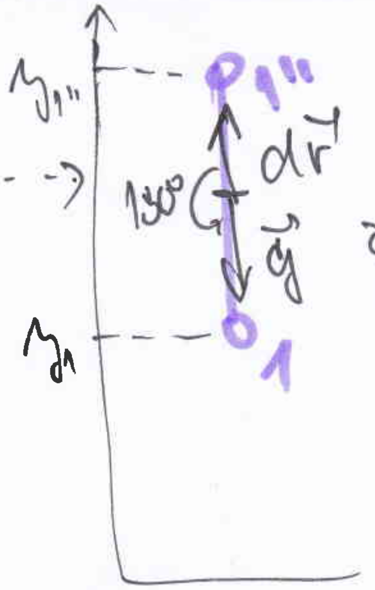
všude od 1' do 2

$$= 0 - \int_{y_1' = y_1}^{y_2} mg\,dr = -mg(y_2 - y_1)$$

2) po cestě C_2:

$$\int_{\vec{r}_1, C_2}^{\vec{r}_2} \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_{1}^{1''} \vec{G}\cdot d\vec{r} + \int_{1''}^{2} \vec{G}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{1}^{1''} \vec{G}\cdot d\vec{r} = \dots$$



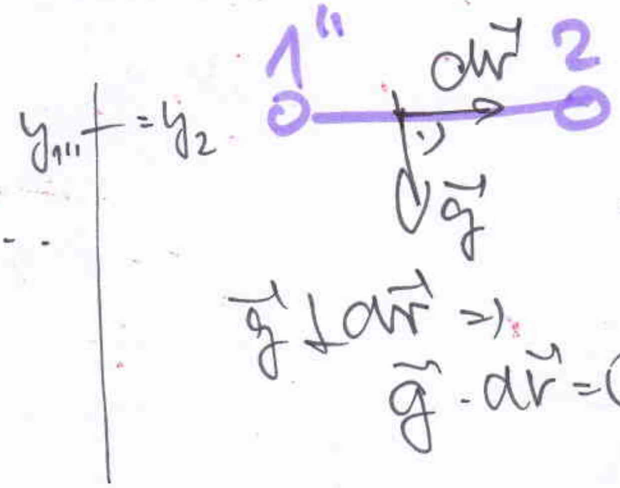
$\vec{g}\cdot d\vec{r} = -g\,dr$

$$\dots = -\int_{y_1}^{y_{1''}} mg\,dr$$

$$= -mg(y_{1''}-y_1)$$

obdobně

$$\int_{1''}^{2} \vec{G}\cdot d\vec{r} = \dots$$

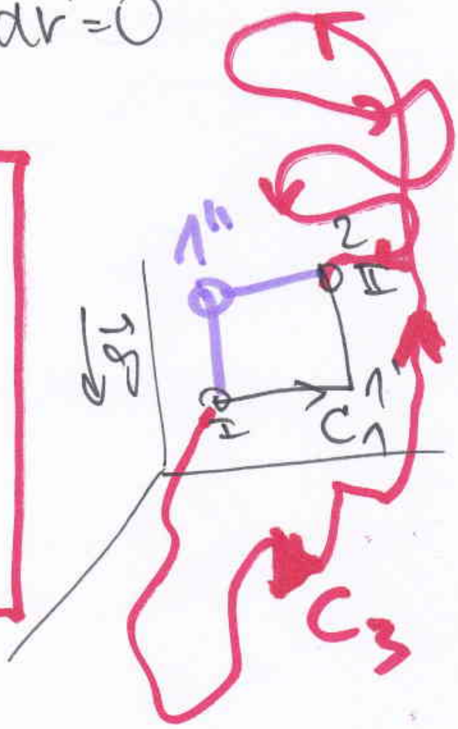


$$\dots = 0$$

$\vec{g} \perp d\vec{r} \Rightarrow \vec{g}\cdot d\vec{r} = 0$

tedy

$$\boxed{\int_{\vec{r}_1, C_1}^{\vec{r}_2} \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1, C_2}^{\vec{r}_2} \vec{G}\cdot d\vec{r} =}$$



rovněž:

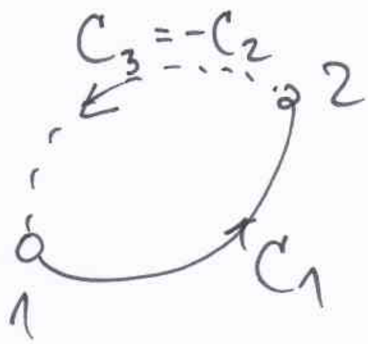
$$= \int_{\vec{r}_1, C_3}^{\vec{r}_2} \vec{G}\cdot d\vec{r}$$

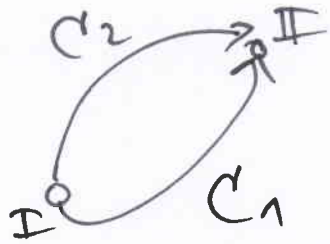
Práce konzervativní síly nezávisí na cestě (dráze), ale pouze na tom, odkud kam.

další možný tvar podmínky pro „konzervativnost" síly:

$$\oint \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = 0$$

uzavřená křivka





$$\int_{I,C_1}^{II} \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = \int_{I,C_2}^{II} \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = -\int_{II,C_3}^{I} \vec{F}_k \cdot d\vec{r}$$

$$\underbrace{\int_{I,C_1}^{II} \vec{F}_k \cdot d\vec{r} + \int_{II,C_3}^{I} \vec{F}_k \cdot d\vec{r}}_{C_1 + C_3 = \circlearrowleft} = 0 \Rightarrow \oint \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = 0$$

tedy $\boxed{\oint \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0}$

Zavedení pojmu:

Potenciální energie E_p

→ schopnost konat práci

souvisí s konfigurací (vzájemnou polohou) soustavy (těles)

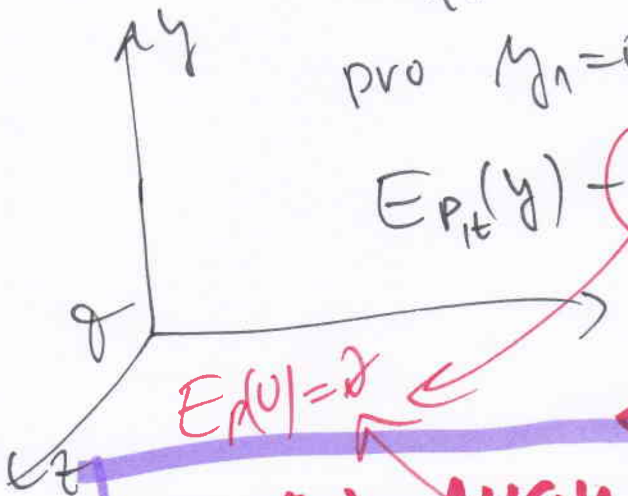
Potenciální energie tíhová: $E_{p,t}$

$$\Delta E_{p,t} = E_{p,t_{II}} - E_{p,t_{I}} = -\int_{I}^{II} \vec{G}\cdot d\vec{r}$$

↗ nárůst $E_{p,t}$ ↘ pokles (záporná) práce $\vec{G}$

tedy $E_{p,t}(y_2) - E_{p,t}(y_1) = -\left(-mg(y_2 - y_1)\right)$

pro $y_1 = 0$ a $y_2 \to y$



$E_{p,t}(y) - E_{p,t}(0) = mgy - mg0$

→ volba referenční hladiny $y=0$

→ volba $E_{p,t}$ v referenční hladině (třeba 0)

$E_p(0) = 0$

tedy $\boxed{E_{p,t}(y) = mgy}$

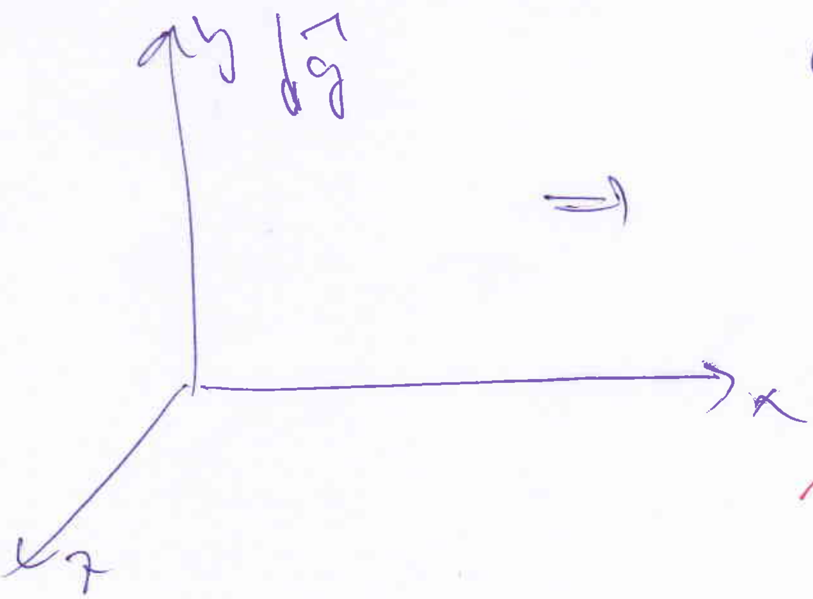
„Kuchařka" pro stanovení potenciální energie E_p ze známé $\vec{F}_k$:

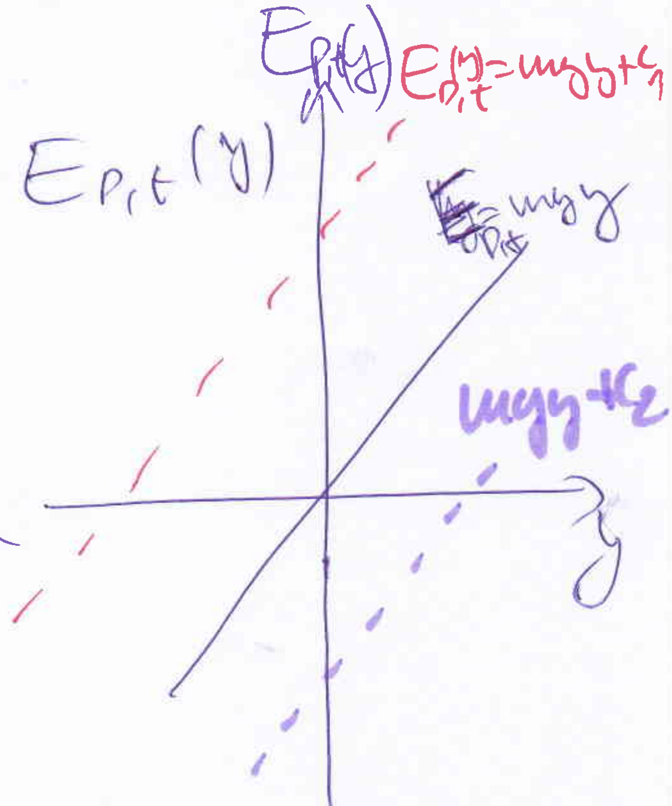
1) $\Delta E_p = -\int_{I}^{II} \vec{F}_k \cdot d\vec{r} \rightarrow$

$$\int_{I}^{II} \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = E_{p,I} - E_{p,II}$$

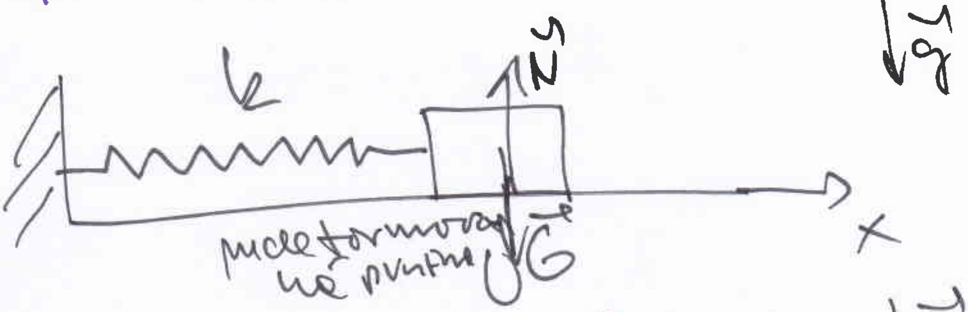
2) Volba referenční hladiny a v ní zvolit hodnotu $E_p(\text{ref}) = $ (třeba 0 J, lépe se počítá, ale nemusí.)

Případ tíhového pole:

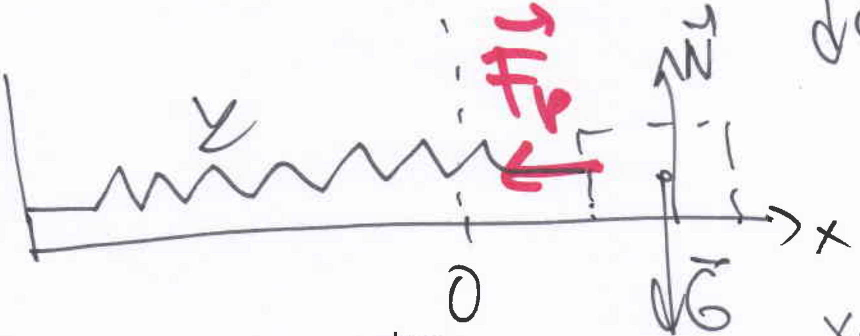




Použijeme zadání k stanovení potenciální energie pružiny: $\vec{F}_k = \vec{F}_p$



$$\vec{F}_p = -kx\,\vec{i}$$



$$d\vec{r} = dx\,\vec{i}$$

$\vec{F}_p$ pro $x>0$

a) Stanovme $W_{\vec{F}_p, I\to II} = \int_{I=0}^{II\sim x} \vec{F}_p \cdot d\vec{r} = \int_{x_i=0}^{x_f=x>0} |\vec{F}_p|\,|d\vec{r}| \cos 180° =$

$d\vec{r} \mapsto$

I: $x=0$ ~ initial

II ~ $x>0$, final

$$\Rightarrow W_{\vec{F}_p, 0\to x>0} = \int_0^{x>0} kx\,dx \underbrace{\cos 180°}_{-1} =$$

$$= -k\int_0^x x\,dx = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (-)$$

Víme, že:

$$\underset{\text{pružiny}}{\Delta E_{p,p}} = -W_{\vec{F}_{p, I\to II}} \Rightarrow \underbrace{E_{p,x_f>0} - E_{p,x_i=0} = \frac{1}{2}kx_f^2}$$

tedy:

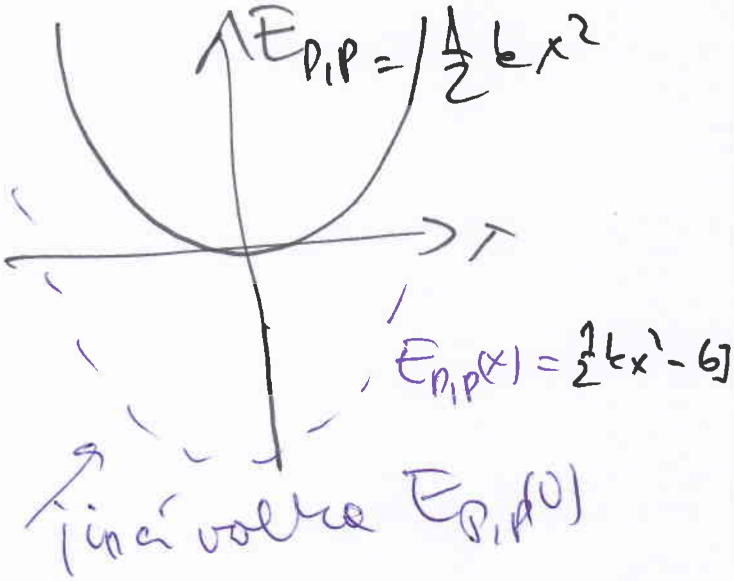
$$E_{p,p}(x) - E_{p,p}(0) = \frac{1}{2}kx^2$$

$\{$ volba hodnoty $E_{p,p}$ v referenční hladině $x=0$

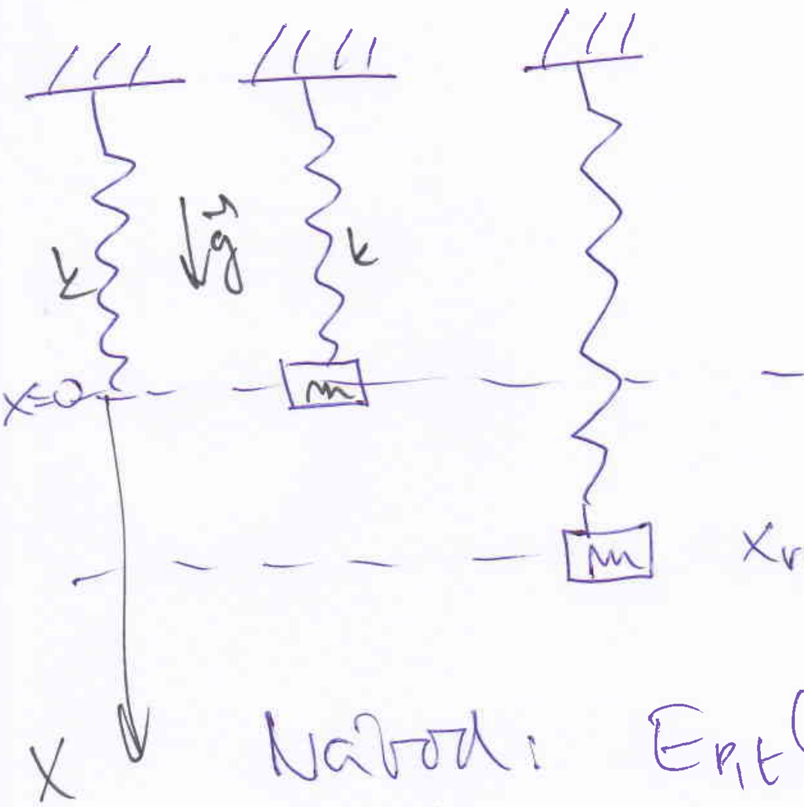
např. 0]

pak:

$$E_{p,p}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



DÚ:



$x_{obrat,1}$

$x_{obrat,2}$

Amplituda?

$x_{rovn} = ?$

Návod: $E_{p,t}(x)$ i $E_{p,p}(x)$; „počítat si" na definici E_M (ze cvičení)

ZÁKON ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE: E_M

15/16

ZZME: změna je nulová! i.e. $\boxed{\Delta E_M = 0}$

Rozdělíme výslednici $\vec{F}_V$ na síly konzervativní a jiné (nekonz...)

$$\vec{F}_V = \vec{F}_k + \vec{F}_j$$

práce: $\int_{I,C_1}^{II} \vec{F}_V \cdot d\vec{r} = \int_{I,\cancel{C}}^{II} \vec{F}_k \cdot d\vec{r} + \int_{I,C_1}^{II} \vec{F}_j \cdot d\vec{r}$

nezávisí na cestě

ji nenahrazeme, musíme znát $\vec{F}_j$, a kudy mají nohy směřovat

$$\Delta E_k = -\Delta E_p + W_{\vec{F}_j, I \to II}$$

Tj.:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \int_I^{II} \vec{F}_j \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta(\underbrace{E_k + E_p}_{E_M}) = W_{\vec{F}_j, I \to II} \Rightarrow \boxed{\Delta E_M = W_{\vec{F}_j, I \to II}}$$

Veličina $E_M = E_k + E_p$ se nazývá mechanická energie

kinetická — potenciální

DŮLEŽITÁ OTÁZKA:

KDY PLATÍ ZÁKON ZACHOVÁNÍ MECHANICKÉ ENERGIE

(tedy kdy je $\Delta E_m = 0$)

?