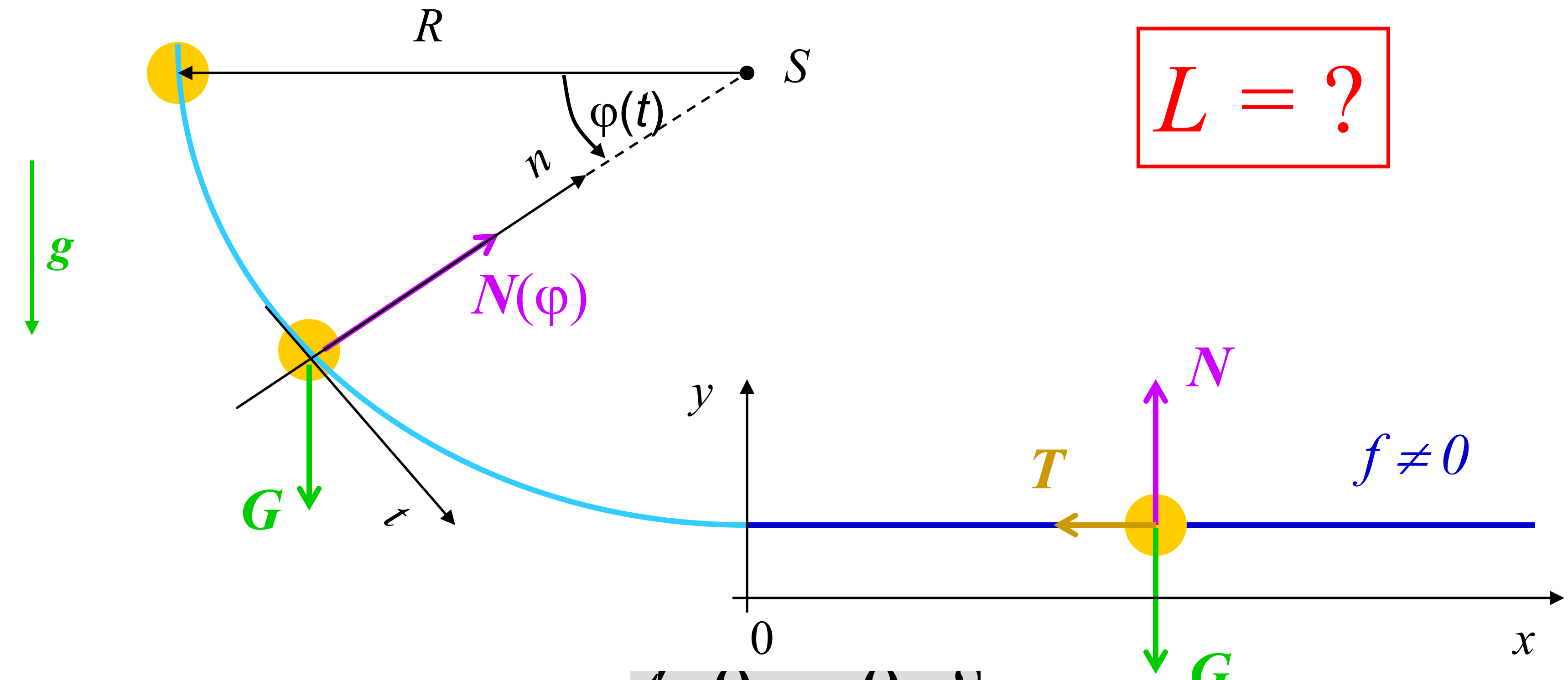


$L = ?$

$t' = 0: x_0 = 0, v_0 = ?$

$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}(\varphi)$

$R\ddot{\varphi}$

$m a_t = m g \cos\varphi$ $\quad \varphi(t) = ?$

$m a_n = -m g \sin\varphi + N(\varphi)$

$R\dot{\varphi}^2$

$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{T}$

$m a_x = 0 + 0 - fN$ $\quad x(t') = ?$

$m a_y = -mg + N + 0$

0

Nový pohled - práce a energie

7

Práce a kinetická energie

8

Potenciální energie
a zákon zachování energie

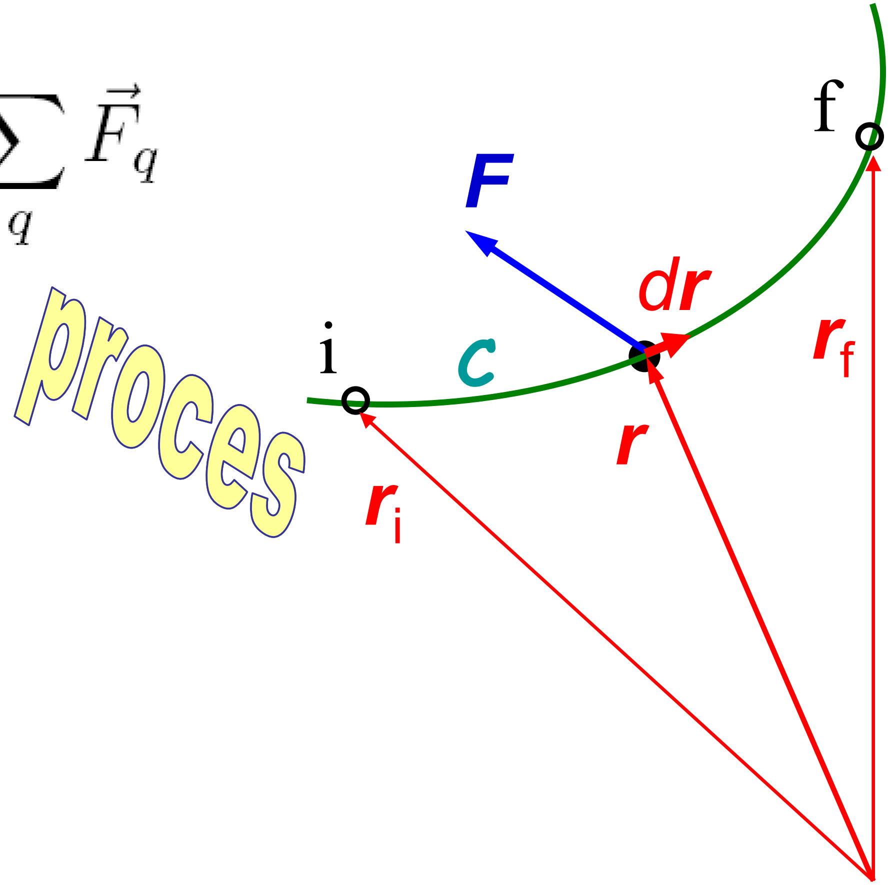
---

3. lekce kurzu *Obecná fyzika I*
Petr Dub, ÚFI VUT (2009)

Už je zase duše smutná po slavnosti
už jste v pracovně a už tu není hostí
tisíc vynálezců udělalo krach
hvězdy se nevyšinuly z věčných drah
pohleďte jak tisíc lidí klidně žije
to není *práce* to je *energie*
je to jako dobrodružství na moři
uzamykati se v laboratoři
pohleďte jak tisíc lidí klidně žije
to není práce to je poezie

V. Nezval, Edison

$$m\vec{a} = \vec{F}_V \qquad \vec{F}_V \equiv \sum_q \vec{F}_q$$



Práce a kinetická energie

$$m\vec{a} = \vec{F}_V \qquad \vec{F}_V \equiv \sum_q \vec{F}_q$$

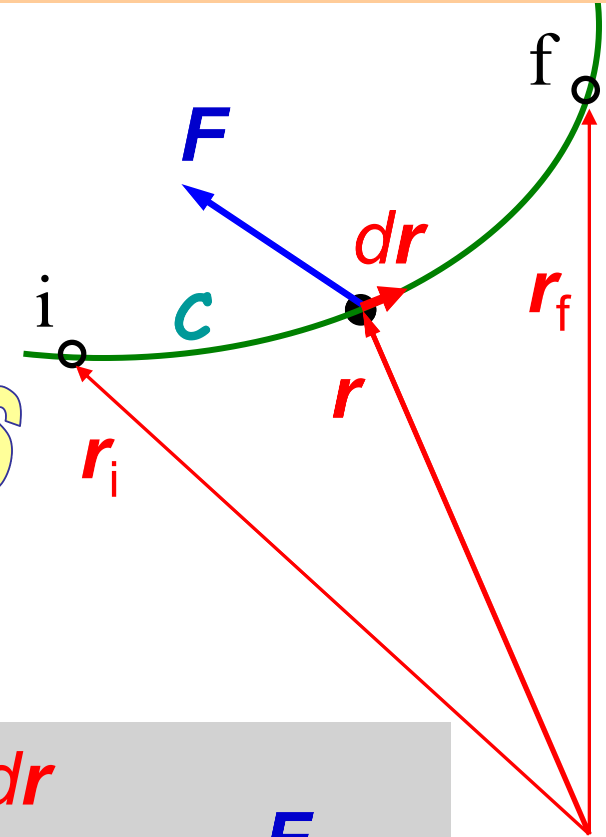
$$\int_C m\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}_V\cdot d\vec{r}$$

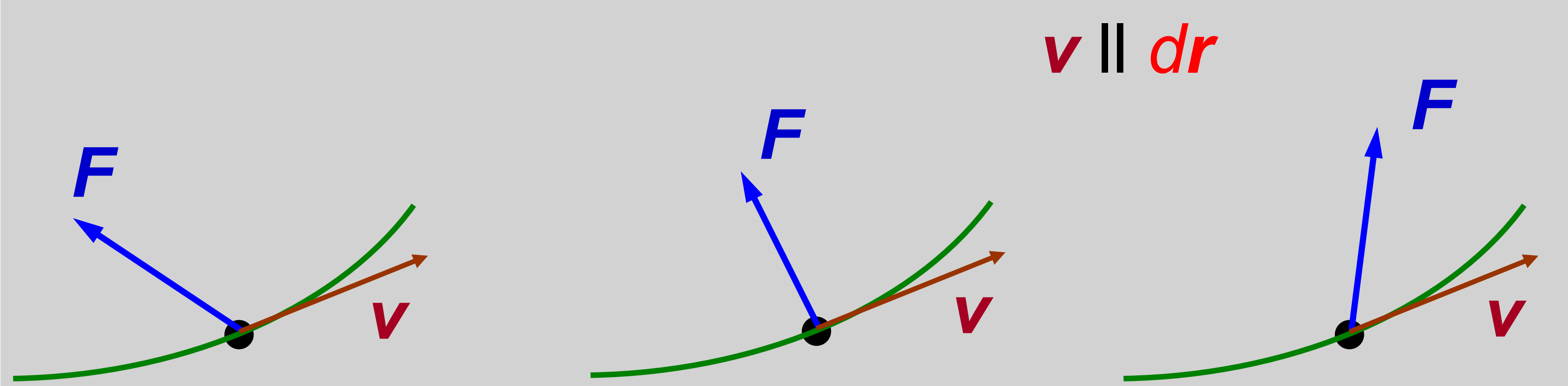
dW

skalární součin – zopakovat!

elementární práce

proces

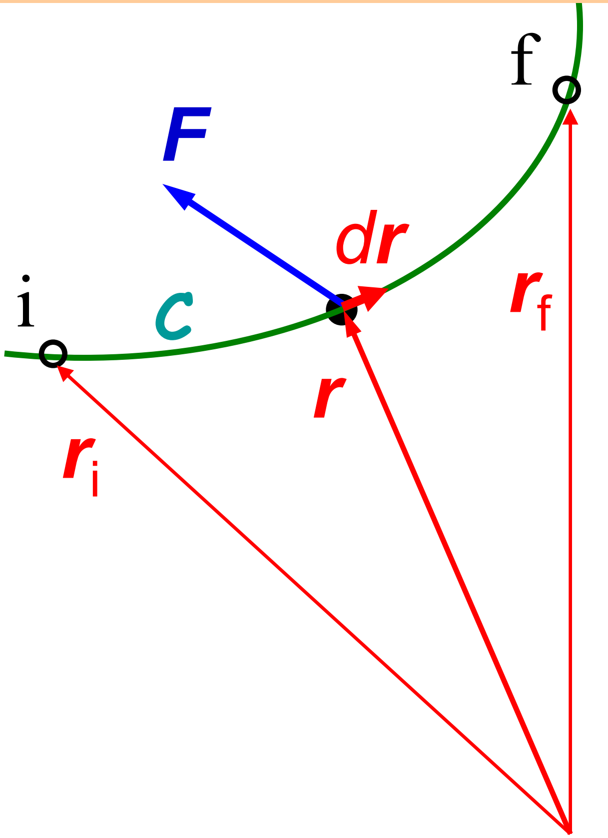




$\vec{F}\cdot d\vec{r} < 0$ $\qquad$ $\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ $\qquad$ $\vec{F}\cdot d\vec{r} > 0$

Práce a kinetická energie

$$m\vec{a} = \vec{F}_V \qquad \vec{F}_V \equiv \sum_q \vec{F}_q$$



$$\int_C m\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}_V\cdot d\vec{r}$$

$$m\int_{t_i}^{t_f}\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = \frac{1}{2}m\int_{t_i}^{t_f} d(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$= \frac{1}{2}m\int_{t_i}^{t_f} d\left(v^2\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{i}}^2 = \int_C \vec{F}_V\cdot d\vec{r}}$$

výsledek

Práce a kinetická energie

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 = \int_C \vec{F}_V \cdot d\vec{r}$$

charakterizuje pohybový stav částice [počáteční (i), konečný (f)]

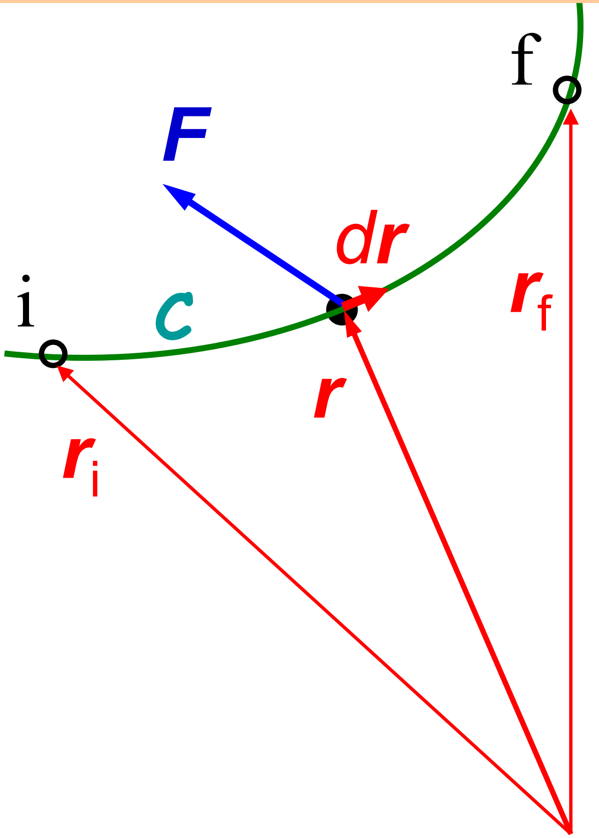
$$E_\mathrm{k} \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

definice kinetické energie

charakterizuje vliv okolí při pohybu částice po určité trajektorii

$$W \equiv \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

definice práce síly ***F*** (závisí i na trajektorii C): proces

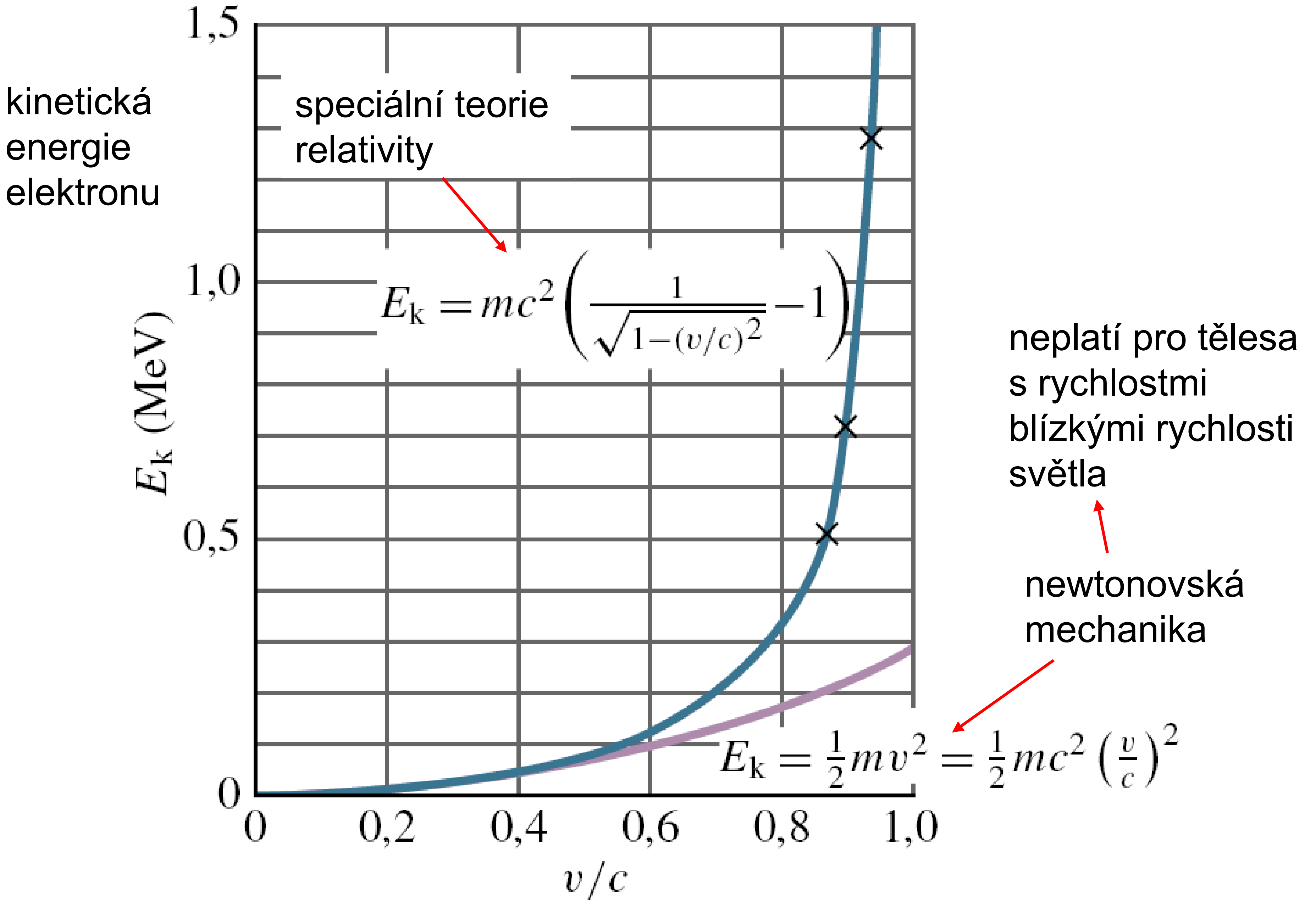


$$m\vec{a} = \vec{F}_V$$

$$\Delta E_\mathrm{k} \equiv E_\mathrm{k,f} - E_\mathrm{k,i} = W_V$$

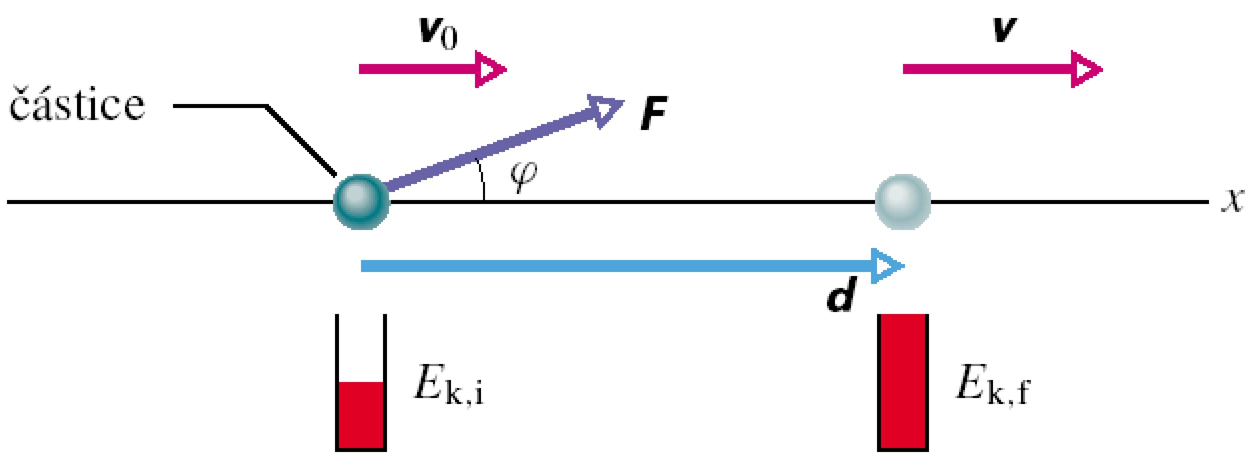
přírůstek kinetické energie
= práce výslednice sil

Poznámka: Kinetická energie při vysokých rychlostech



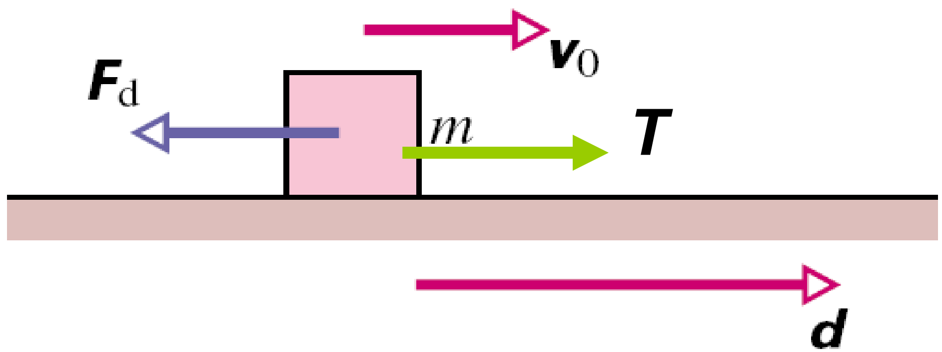
Příklad 1: Práce a kinetická energie

$$\boxed{\Delta E_k = F d \cos \varphi.}$$



Obr. 7.2 Na částici působí stálá síla $\boldsymbol{F}$, která svírá s vektorem $\boldsymbol{d}$ posunutí částice úhel φ. Rychlost částice se změní z $\boldsymbol{v}_0$ na $\boldsymbol{v}$. „Měrka kinetické energie" ukazuje, že došlo ke změně kinetické energie částice z hodnoty $E_{k,i}$ na hodnotu $E_{k,f}$.

Příklad 2: Práce a kinetická energie



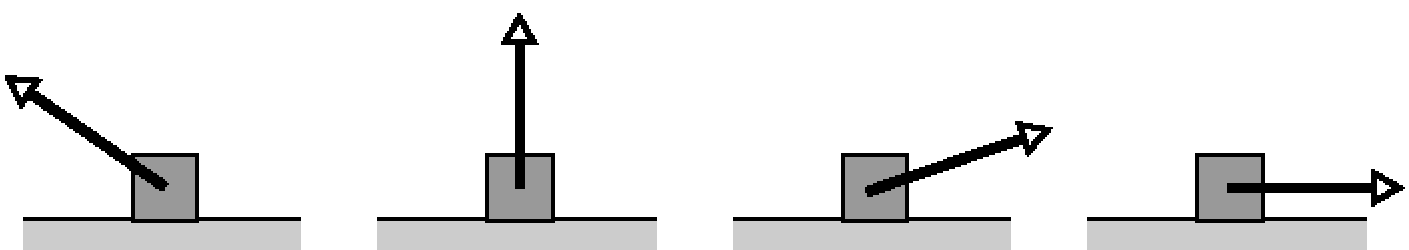
$$\overset{0}{m\vec{a}} = \vec{T} + \vec{F}_d + \underbrace{\vec{G} + \vec{N}}_{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} = -\vec{F}_d$$

$$W_T = \vec{T}\cdot\vec{d} = Td\cos 0^\circ > 0$$

$$W_{F_d} = \vec{F}_d\cdot\vec{d} = F_d d\cos 180^\circ = -W_T < 0$$

$$W = \underset{0}{\vec{F}_V}\cdot\vec{d} = W_T + W_{F_d} = 0 \Leftrightarrow v_0 = \text{kon}$$

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje čtyři možnosti působení síly na kostku, která klouže po vodorovné dokonale hladké podložce směrem vpravo. Velikosti sil jsou stejné, různé orientace jsou schematicky vyznačeny v obrázcích. Uspořádejte obrázky podle práce (sestupně), kterou působící síla vykoná při posunutí kostky o vzdálenost d.



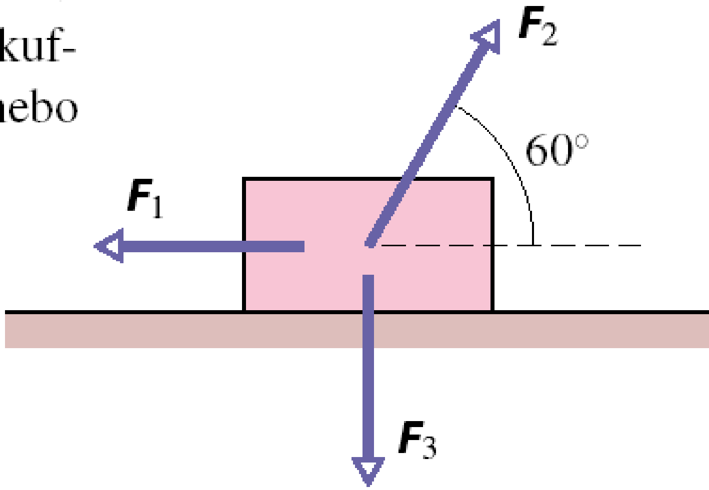
(a) (b) (c) (d)

Práce vykonaná více silami

$$W_V = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \left(\sum_q \vec{F}_q \right) \cdot d\vec{r} = \sum_q \int_C \vec{F}_q \cdot d\vec{r} = \sum_q W_q$$

práce součtu sil = součet prací těchto sil

16Ú. Na obr. 7.30 jsou znázorněny tři síly působící na kufr, který se posune o 3,00 m vlevo po dokonale hladké podlaze. Velikosti sil jsou $F_1 = 5{,}00\,\mathrm{N}$, $F_2 = 9{,}00\,\mathrm{N}$ a $F_3 = 3{,}00\,\mathrm{N}$. (a) Jaká je celková práce těchto sil při uvedeném posunutí kufru? (b) Rozhodněte, zda kinetická energie kufru vzroste, nebo poklesne.



Práce síly

křivkový integrál

$$W = \int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}W = \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathscr{C}} (F_x \,\mathrm{d}x + F_y \,\mathrm{d}y + F_z \,\mathrm{d}z),$$

Konzervativní síla – práce nezávisí na trajektorii

- tíhová síla
- gravitační síla
- síla pružiny
- …

Nekonzervativní síla – práce závisí na trajektorii

- třecí síla
- odpor prostředí
- …

Práce konzervativní síly a potenciální energie

$$\mathcal{C}:\ x = x(q),\quad y = y(q),\quad z = z(q),\quad q \in \langle q_i, q_f \rangle$$

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}W = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{C}} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z),$$

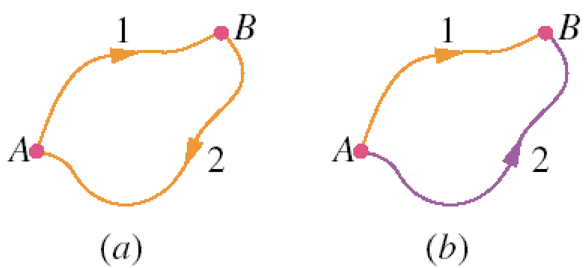
$$\mathrm{d}W = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z$$

totální diferenciál

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \qquad \vec{F} = -\operatorname{grad} E_p$$

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \qquad \mathrm{d}W = -\mathrm{d}E_p$$

$$W = \int_{C_{AB}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B}$$



Obr. 8.4 (a) Částice, na niž působí mj. konzervativní síla $\boldsymbol{F}$, se pohybuje po okruhu z bodu A do bodu B po cestě 1 a vrací se zpět po cestě 2. (b) Částice může přejít z bodu A do bodu B jak po cestě 1, tak po cestě 2.

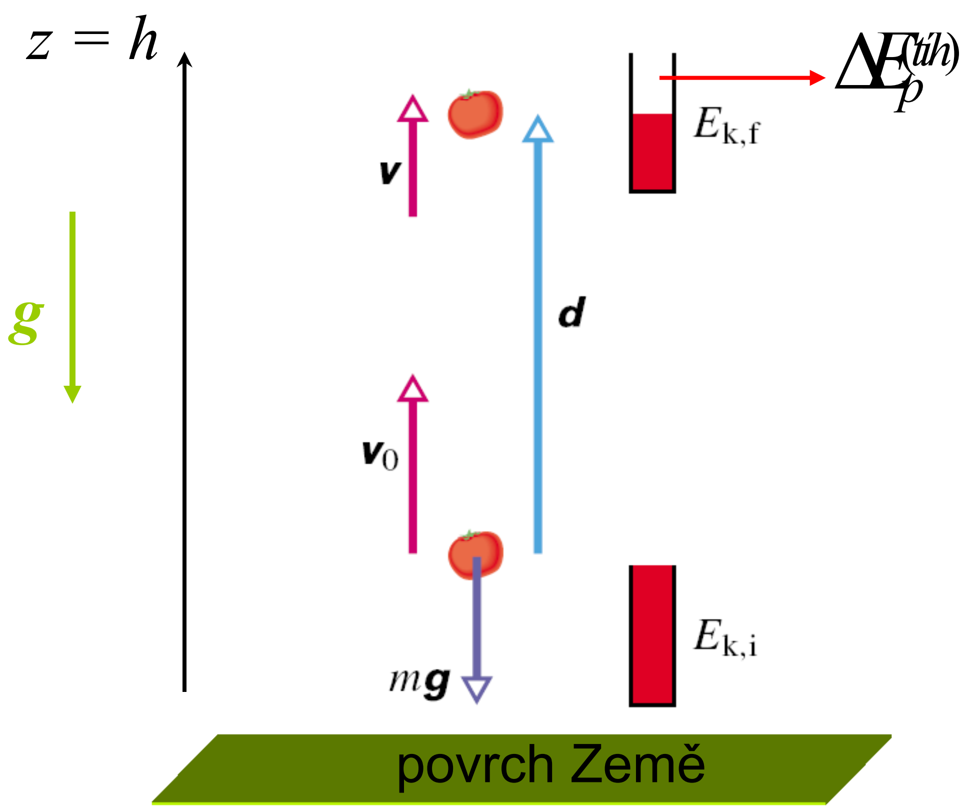
Práce tíhové síly a tíhová potenciální energie

$$\vec{G} = (0, 0, -mg)$$

$$W_G = \int_{C_{if}} \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

$$W_G = \int_{z_i}^{z_f} (-mg)\, dz = \underbrace{mgz_i}_{E_{p,i}} - \underbrace{mgz_f}_{E_{p,f}}$$

$$E_p^{(\text{tíh})} = mgz + \cancel{C}$$

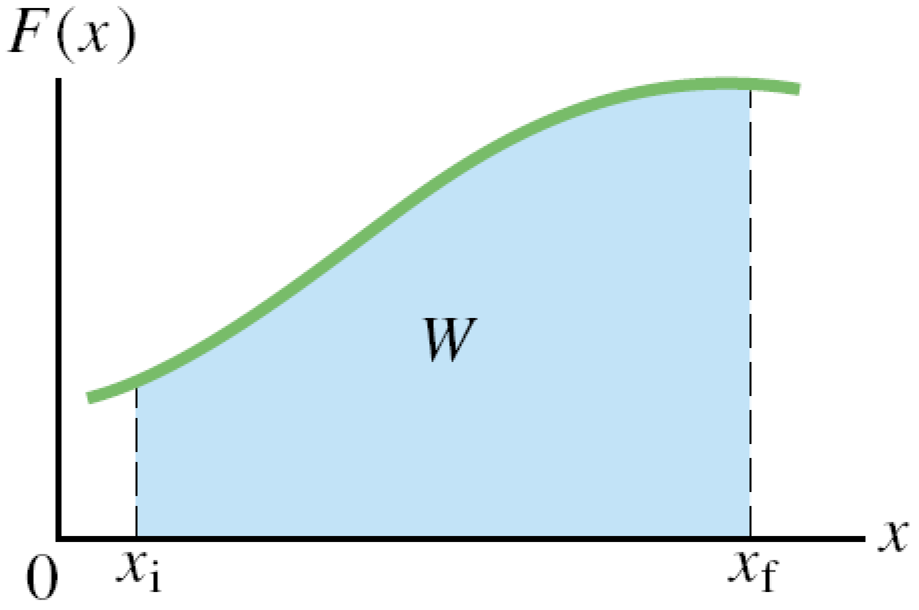


$$\boxed{E_{k,f} - E_{k,i} = W_G}$$

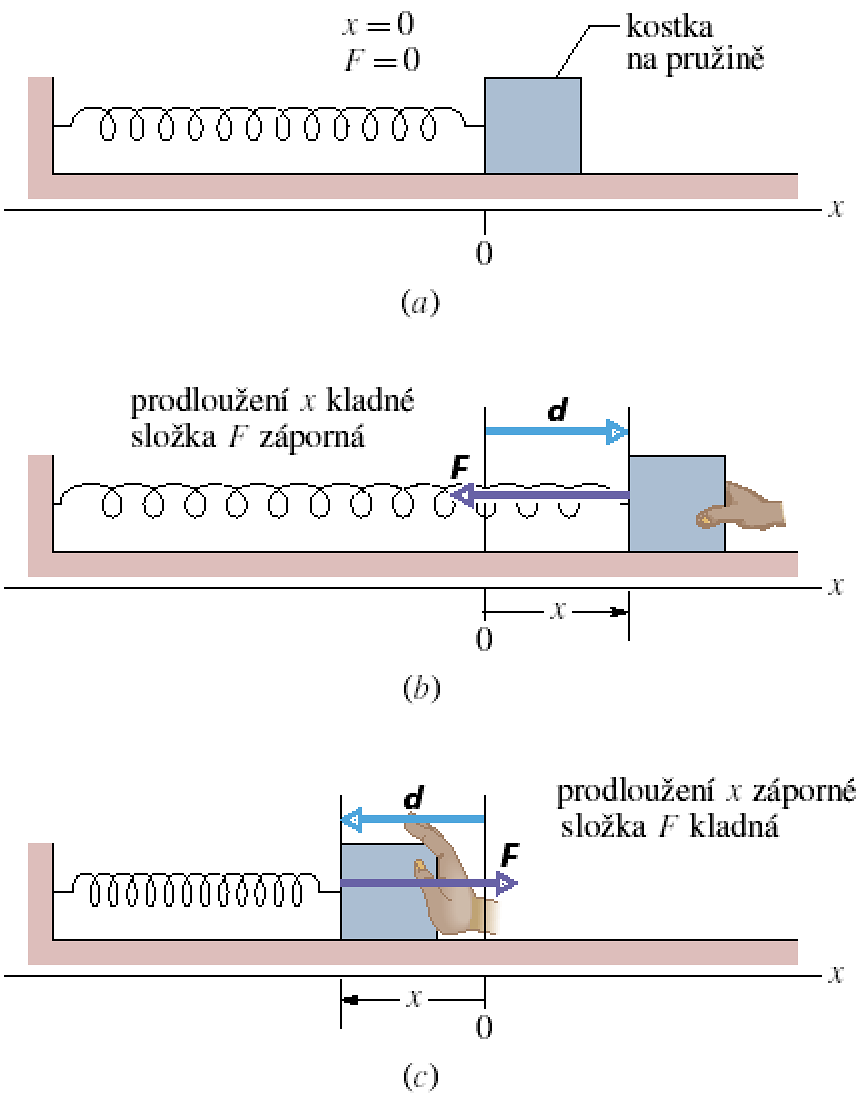
$$(\vec{r}_f, \vec{v}_f) \quad \boxed{E_{k,f} + E_{p,f} = E_{k,i} + E_{p,i}} \quad (\vec{r}_f, \vec{v}_f)$$

Práce proměnné síly

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F_x(x)\,\mathrm{d}x$$



Práce pružné síly a pružná potenciální energie



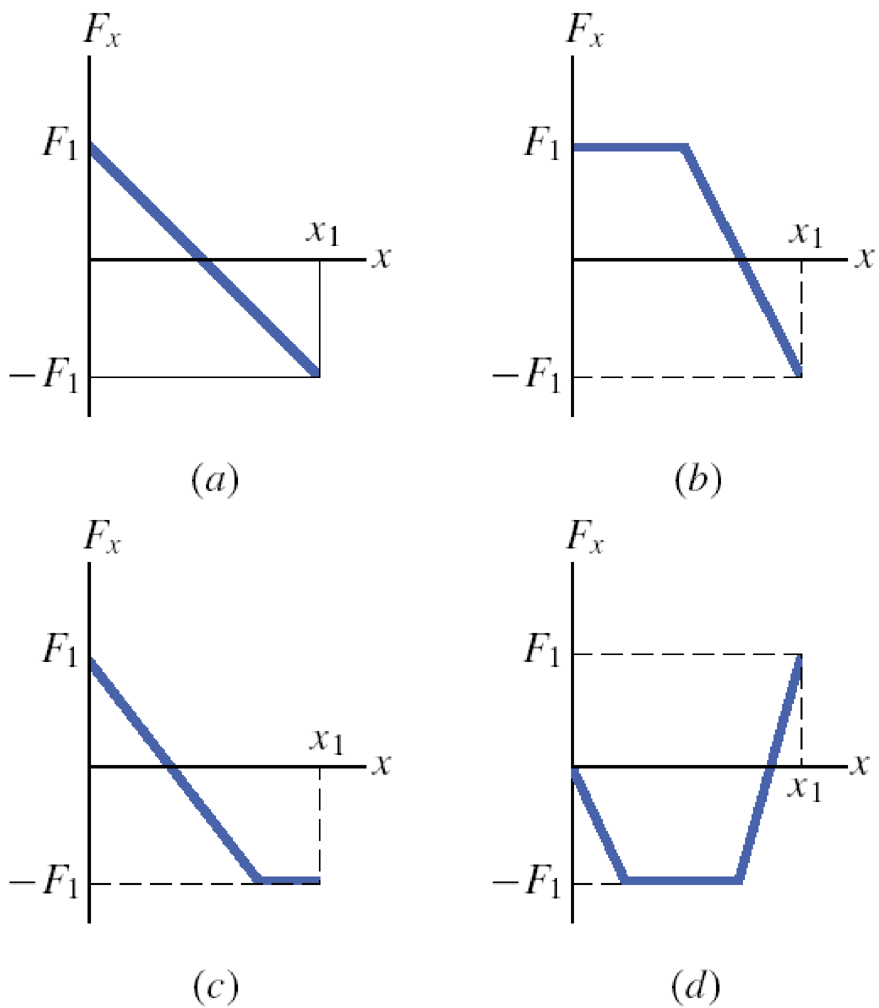
$$\boxed{\vec{F}_p = (-kx, 0, 0)}$$

$$W_p = \int_{C_{if}} \vec{F}_p \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

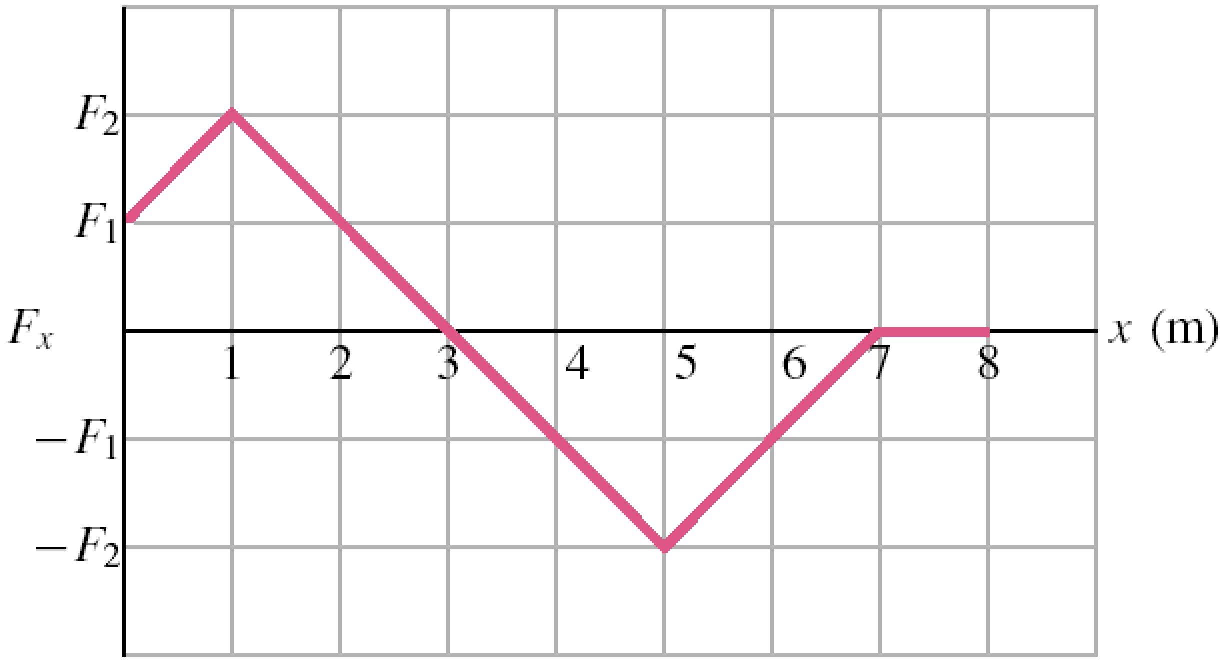
$$W_p = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{2}kx_i^2}_{E_{p,i}} - \underbrace{\frac{1}{2}kx_f^2}_{E_{p,f}}$$

$$E_p(\text{pruž}) = \frac{1}{2}kx^2 + \cancel{C}$$

12. Na obr. 7.23 jsou znázorněny čtyři grafy závislosti proměnné síly $\boldsymbol{F}$, působící na částici pohybující se podél osy x, na poloze této částice. Poloha je určena souřadnicí x, síla $\boldsymbol{F}$ má směr osy x. Stupnice na odpovídajících si osách grafů jsou stejné. Seřaďte grafy sestupně podle hodnoty práce, kterou síla $\boldsymbol{F}$ vykonala při posunutí částice z polohy $x = 0$ do polohy x_1.



13. Síla ***F*** rovnoběžná s osou x působí na částici pohybující se ve směru osy x. Obr. 7.24 znázorňuje závislost této síly na



poloze částice, zadané souřadnicí x. V počáteční poloze $x = 0$ byla částice v klidu. Jaká je její poloha v okamžiku, kdy má (a) největší kinetickou energii, (b) největší rychlost, (c) nulovou rychlost? (d) Jaký je směr pohybu částice při jejím průchodu bodem o souřadnici $x = 6$ m?

Výkon

Jak rychle koná síla ***F*** práci

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \text{(průměrný výkon).} \qquad (7.44)$$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(okamžitý výkon).} \qquad (7.45)$$

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \text{(okamžitý výkon).} \qquad (7.50)$$

KONTROLA 5: Kostka je uvázána na provaze a pohybuje se rovnoměrně po kružnici, v jejímž středu je druhý konec provazu upevněn. Rozhodněte, zda je výkon tahové síly provazu kladný, záporný, nebo nulový.

Výkon

Jak rychle koná síla ***F*** práci

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \text{(průměrný výkon).} \qquad (7.44)$$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(okamžitý výkon).} \qquad (7.45)$$

$$\boxed{\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

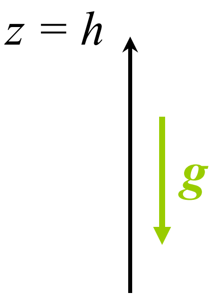
$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \text{(okamžitý výkon).} \qquad (7.50)$$

Výkon magnetické síly

$$\vec{F}_B = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

Potenciální energie

tíhová



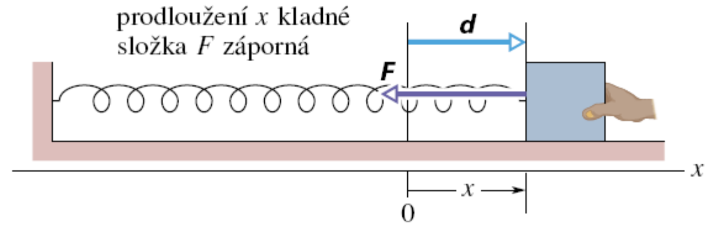
$$\vec{G} = (0, 0, -mg)$$

$$W_G = \int_{C_{if}} \vec{G}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W_G = \int_{z_i}^{z_f} (-mg)\,\mathrm{d}z = \underbrace{mgz_i}_{E_{p,i}} - \underbrace{mgz_f}_{E_{p,f}}$$

$$E_p^{(\text{tíh})} = mgz + \underbrace{C}_{=0}$$

pružná



$$\vec{F}_p = (-kx, 0, 0)$$

$$W_p = \int_{C_{if}} \vec{F}_p\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W_p = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{2}kx_i^2}_{E_{p,i}} - \underbrace{\frac{1}{2}kx_f^2}_{E_{p,f}}$$

$$E_p^{(\text{pruž})} = \frac{1}{2}kx^2 + \underbrace{C}_{=0}$$

Potenciální energie

Práce konzervativní síly působící na částici při jejím pohybu mezi dvěma body je nezávislá na trajektorii částice.

Tj. práce konzervativní síly závisí pouze na počáteční a konečné poloze (konfiguraci)

$\Rightarrow$ lze ji vyjádřit pomocí nové funkce – potenciální energie

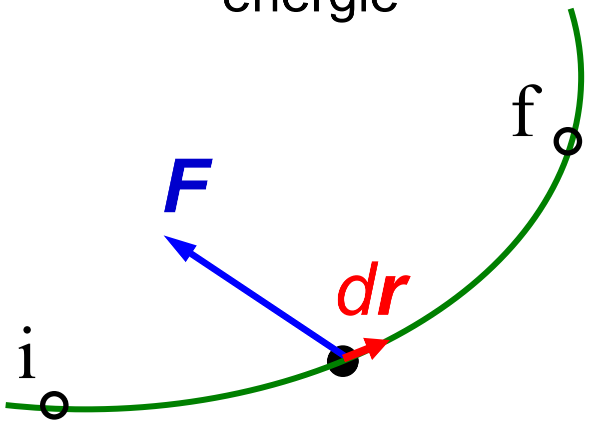
$$W = -(E_{\mathrm{p,f}} - E_{\mathrm{p,i}}) \equiv -\Delta E_{\mathrm{p}}$$

přírůstek potenciální energie

práce nějaké konzervativní síly

potenciální energie v konečné (*f*) a počáteční (i) poloze

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = -W = -\int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$



Fyzikální význam má pouze **změna** potenciální energie. Potenciální energie není jednoznačně určena, lze k ní přičíst libovolnou konstantu, tj. zvolit si referenční konfiguraci, ve které je potenciální energie nulová.

Práce a kinetická energie

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 = \int_C \vec{F}_V \cdot d\vec{r}$$

charakterizuje pohybový stav částice [počáteční (i), konečný (f)]

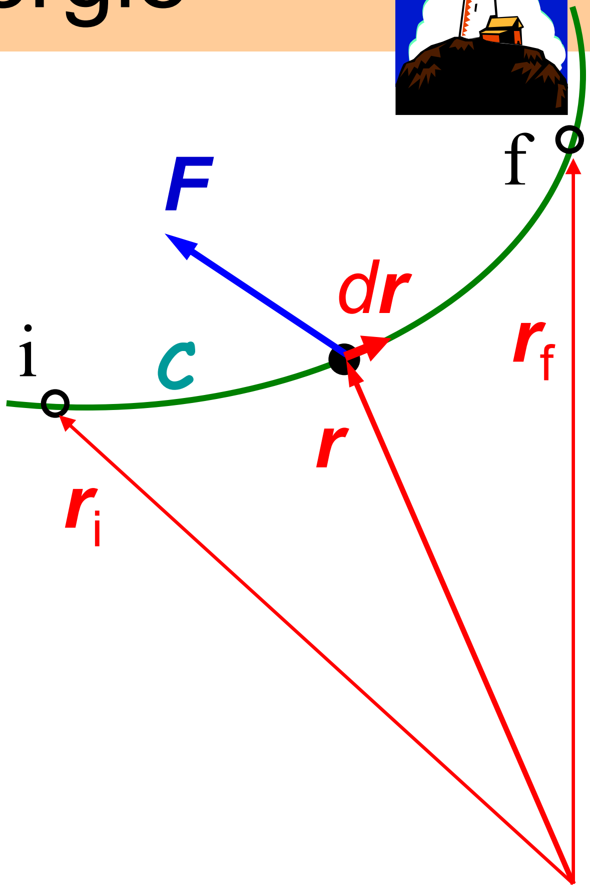
charakterizuje vliv okolí při pohybu částice po určité trajektorii

$$E_\mathrm{k} \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

definice kinetické energie

$$W \equiv \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

definice práce síly ***F*** (závisí i na trajektorii *C*): proces



$$m\vec{a} = \vec{F}_V$$

$$\Delta E_\mathrm{k} \equiv E_\mathrm{k,f} - E_\mathrm{k,i} = W_V$$

The work-energy theorem

přírůstek kinetické energie = práce výslednice sil

Mechanická energie

$$\boxed{\Delta E_\mathrm{k} = W_V} = W^{(\mathrm{K})} + W^{(\mathrm{N})} = -\Delta E_\mathrm{p} + W^{(\mathrm{N})}$$

přírůstek kinetické energie

práce všech působících sil

práce konzervativních sil

přírůstek potenciální energie

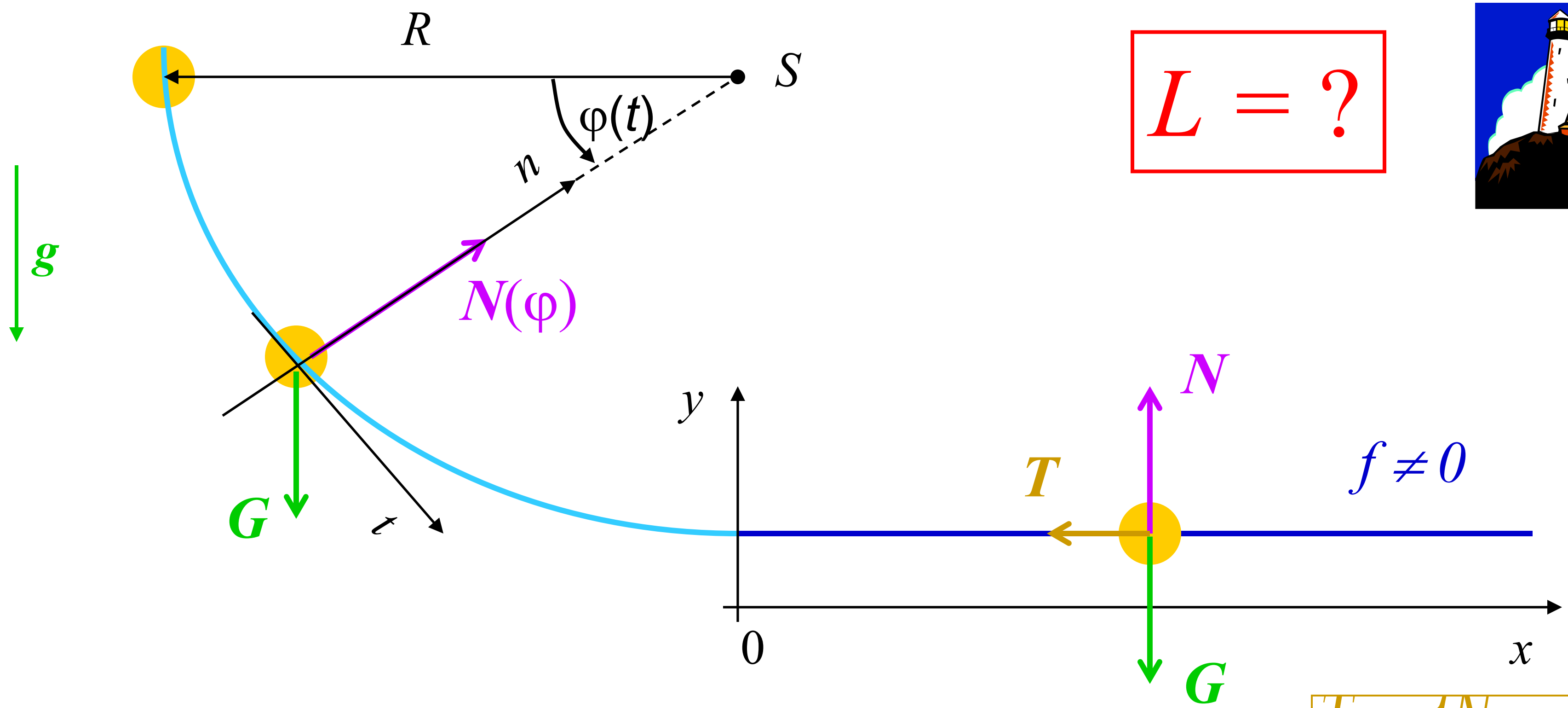
práce nekonzervativních sil

$$\boxed{\Delta E \equiv \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p} = W^{(\mathrm{N})}}$$

$E \equiv E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p}$ mechanická energie ↔ $(\vec{r}, \vec{v})$ stav

Změna mechanické energie = práce nekonzervativních sil

E_m



$$\boxed{L = ?}$$

$$T = fN = fmg$$

$$E_i = E_{k,i} + E_{p,i} = mg$$
$$E_f = E_{k,f} + E_{p,f} = 0$$

$$W^{(N)} = W_T = TL\cos 180$$

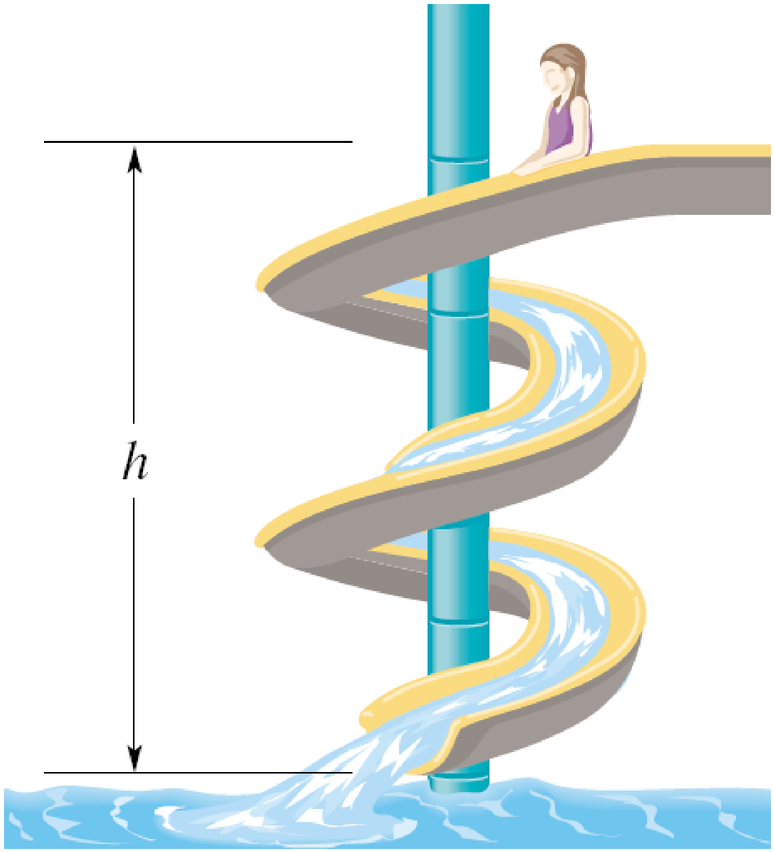
$$\Delta E = W^{(N)}$$

$$\vec{N}(\varphi) \perp \vec{v} \wedge \vec{N} \perp \vec{v}$$
$$\Rightarrow W_N = 0$$

$$L = R/f$$

Zákon (?) zachování mechanické energie

pokud práce nekonzervativních sil je 0



$$\Delta E \equiv \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p} = W^{(\mathrm{N})}$$

0

$$\Delta E \equiv \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{p} = 0$$

$$E_{\mathrm{k},2} + E_{\mathrm{p},2} = E_{\mathrm{k},1} + E_{\mathrm{p},1}$$

Pokud je práce nekonzervativních sil působících na částici rovna nule mechanická energie částice se zachovává.

Konec první části