



Fyzika základního kurzu I (hypertextově)

věnováno všem, kteří mají zájem o fyziku a její radostné studium

kolektiv ÚFI FSI

hypertextová verze vycházející z přepracovaných skript Fyzika I a Fyzika II,
autorů: Šantavý, Liška a Peška


Copyright © 2005, ÚFI FSI VUT v Brně

Odkazy jsou v textu označeny modře a kliknutím „odskočíte“ na příslušnou rovnici, obrázek, apod. Pokud se chcete v textu vrátit zpět, použijte klávesové zkratky Alt+Šipka vlevo nebo menu Zobrazení-Jít na-Předcházející zobrazení (nebo ikonku ) , pro dopředný pohyb Alt+Šipka vpravo ().


Ve významných místech označeny symboly:


 odkazy na odpovídající části v knize [1] ve formátu: HRW kapitola, strana.


 odkazy do textů [Vybrané kapitoly z fyziky](#) a [Fyzika 2](#).


 video nebo animace

 simulační program

 dokumentace k programu

 interaktivní příklad

 početní příklad

 interaktivní test

Další texty a pomůcky ke studiu fyziky naleznete na <http://physics.fme.vutbr.cz>.

Obsah

1	Úvod do fyziky	10
1.1	Obsah a metoda fyziky	10
1.1.1	Jak fyzika studuje svět?	10
1.1.2	Jak fyzika poznává svět?	10
1.2	Fyzikální pojmy a veličiny	11
1.2.1	Fyzikální pojmy	11
1.2.2	Fyzikální veličiny	12
1.2.3	Mezinárodní soustava jednotek SI	14
1.2.3.1	Vedlejší jednotky základních veličin	15
1.3	Skalární a vektorové fyzikální veličiny	16
1.3.1	Vztažné soustavy, soustavy souřadnic	17
1.3.2	Hlavní vlastnosti skalárních a vektorových veličin	18
1.3.3	Semikartézské vyjádření vektorů	19
1.3.4	Skalární součin dvou vektorů	22
1.3.5	Vektorový součin dvou vektorů	23
1.4	Derivace a integrály	25
1.4.1	Derivace skalární funkce	26
1.4.2	Vektorová funkce a její derivace	29
1.4.2.1	Vektorová funkce	29
1.4.2.2	Derivace vektorové funkce	29
1.4.3	Integrál skalární funkce	30
1.4.3.1	Primitivní funkce	31
1.4.3.2	Riemannův integrál	31
1.4.3.3	Konkrétní výpočet integrálu (1.25)	33
2	Pohyb částice a hmotné soustavy v silových polích	36
2.1	Kinematika	36
2.2	Kinematika hmotného bodu	38
2.2.1	Polohový vektor \vec{r} . Rychlost \vec{v}	38
2.2.1.1	Hmotný bod	38
2.2.1.2	Polohový vektor \vec{r}	38
2.2.1.3	Trajektorie hmotného bodu	38
2.2.1.4	Rychlost hmotného bodu \vec{v}	39
2.2.1.5	Dráhová rychlost hmotného bodu, v	40
2.2.1.6	Vztah mezi rychlostí $\vec{v}(t)$ a tečnou rychlostí $v_\tau(t)$	41
2.2.2	Zrychlení \vec{a}	41
2.2.2.1	Definice zrychlení	41
2.2.2.2	Zrychlení hmotného bodu při pohybu po kružnici	43

2.2.2.3	Zrychlení hmotného bodu při pohybu na libovolné křivé rovinné trajektorii	45
2.2.3	Rovnoměrný pohyb po křivce	47
2.2.4	Rovnoměrně proměnný pohyb po křivce	47
2.3	Kinematika tuhého tělesa	48
2.3.1	Otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy	48
2.3.1.1	Pohyb hmotného bodu po kružnici	49
2.3.1.2	Rovnoměrný a rovnoměrně proměnný pohyb hmotného bodu po kružnici	52
2.3.1.3	Rotační pohyb tuhého tělesa	53
2.3.2	Translační pohyb tuhého tělesa	54
2.4	Pohybové zákony klasické fyziky	54
2.4.1	První pohybový zákon	54
2.4.2	Druhý pohybový zákon	56
2.4.3	III. pohybový zákon	60
2.4.4	Nejčastější síly	61
2.4.5	Výslednice sil při křivočarém pohybu	62
2.4.6	Vzájemné translační pohyby vztažných soustav	63
2.4.6.1	Obecný translační pohyb	64
2.4.6.2	Rovnoměrný přímočarý translační pohyb	65
2.4.7	Pohyb v neinerciálních soustavách	66
2.4.7.1	Neinerciální soustava vykonávající nerovnoměrný translační pohyb	66
2.4.7.2	Rovnoměrně rotující neinerciální soustava	69
2.4.7.3	Ekvivalence sil skutečných a setrvačných	71
2.5	Časový a dráhový účinek síly	71
2.5.1	Impuls síly	72
2.5.2	Obecně o energii	74
2.5.3	Práce	76
2.5.4	Kinetická energie hmotného bodu, E_k	80
2.5.5	Výkon	82
2.6	Gravitační pole	82
2.6.1	Newtonův gravitační zákon	83
2.6.1.1	Gravitační interakce	83
2.6.1.2	Intenzita gravitačního pole, \vec{K}_g	83
2.6.1.3	Newtonův gravitační zákon.	85
2.6.2	Gravitační energie	88
2.6.2.1	Práce sil gravitačního pole	88
2.6.2.2	Gravitační energie hmotného bodu	89
2.6.2.3	Potenciál gravitačního pole	91
2.6.3	Gravitační pole Země	93
2.6.3.1	Ideální Země	93
2.6.3.2	Skutečná Země	93
2.6.3.3	Tíhové pole u povrchu Země	94
2.7	Mechanická energie hmotného bodu, pohyb hmotného bodu v gravitačním poli	96
2.7.1	Mechanická energie hmotného bodu v tíhovém a gravitačním poli	97
2.7.1.1	Definice mechanické energie	97
2.7.1.2	Práce a mechanické energie	98
2.7.1.3	Zákon zachování mechanické energie hmotného bodu	100
2.7.2	Pohyb hmotného bodu v tíhovém a gravitačním poli	102

2.7.2.1	Pohyb hmotného bodu v homogenním tíhovém poli Země	102
2.7.2.2	Podmínka úniku hmotného bodu z gravitačního pole	105
2.7.2.3	Pohyb hmotného bodu v centrálním gravitačním poli	106
2.7.2.4	Kosmické rychlosti	107
2.8	Mechanika hmotných soustav	109
2.9	Energie hmotných soustav	109
2.9.1	Hmotná soustava, hmotný střed	110
2.9.1.1	Hmotná soustava	110
2.9.1.2	Hmotný střed (těžiště)	111
2.9.2	Kinetická energie hmotné soustavy	113
2.9.3	Potenciální energie hmotné soustavy	116
2.9.3.1	Potenciální energie hmotné soustavy v poli vnějších konzervativních sil	116
2.9.3.2	Potenciální energie hmotné soustavy v poli vnitřních sil	118
2.9.3.3	Celková potenciální energie hmotné soustavy	118
2.9.4	Elastická energie hmotné soustavy	119
2.9.4.1	Elastická energie pružného tělesa	119
2.9.4.2	Elastická energie ideální pružiny	121
2.9.5	Mechanická energie hmotné soustavy	122
2.9.5.1	Mechanická energie hmotné soustavy	122
2.9.5.2	Zákon zachování mechanické energie	124
2.9.6	Kinetická energie tuhých těles	125
2.9.6.1	Kinetická energie rotujícího tělesa. Moment setrvačnosti	125
2.9.6.2	Kinetická energie hmotné soustavy při obecném pohybu s užitím těžišťové soustavy	128
2.9.7	Zákon zachování energie	130
2.10	Pohybové rovnice soustavy částic	131
2.10.1	První pohybová rovnice a první impulsová věta pro hmotné soustavy	131
2.10.1.1	Definice celkové hybnosti hmotné soustavy	131
2.10.1.2	První pohybová rovnice a první impulsová věta pro hmotné soustavy	132
2.10.1.3	Zákon zachování hybnosti hmotné soustavy	134
2.10.1.4	Souvislost změn hybnosti hmotné soustavy s pohybem jejího hmotného středu	135
2.10.2	Druhá pohybová rovnice a druhá impulsová věta pro hmotné soustavy	136
2.10.2.1	Moment hybnosti, moment síly	137
2.10.2.2	Druhá pohybová rovnice a druhá impulsová věta pro hmotnou soustavu	140
2.10.2.3	Zákon zachování momentu hybnosti	144
2.10.3	Pohybová rovnice tuhého tělesa otáčejícího se kolem pevné osy	145
2.10.3.1	Definice hlavních veličin	145
2.10.3.2	Pohybová rovnice pro rotační pohyb tělesa	147
2.11	Příklady k části 1.1	152
2.11.1	Skalární a vektorové veličiny	152
2.11.2	Kinematika	152
2.11.2.1	Polohový vektor $\vec{r}(t)$. Rychlost $\vec{v}(t)$	152
2.11.2.2	Zrychlení \vec{a}	153
2.11.2.3	Rovnoměrný pohyb po křivce	153
2.11.3	Pohybové zákony klasické fyziky	154

2.11.3.1	I., II. a III. pohybový zákon	154
2.11.4	Časový a dráhový účinek síly	156
2.11.4.1	Hybnost, impuls síly	156
2.11.4.2	Práce, kinetická energie, výkon	157
2.11.5	Gravitační pole	158
2.11.5.1	(Gravitační síla, gravitační energie)	158
2.11.6	Mechanická energie. Pohyb hmotného bodu v gravitačním poli	160
2.11.6.1	(E_m v tíhovém a gravitačním poli Země)	160
2.11.6.2	(Vlastnosti trajektorií v centrálním gravitačním poli)	160
2.11.7	Energie hmotných soustav	162
2.11.7.1	(Hmotný střed)	162
2.11.7.2	(Energie obecné soustavy)	162
2.11.7.3	(ENERGIE TUHÉHO TĚLESA)	163
2.11.8	Pohybová rovnice soustavy částic	164
2.11.8.1	První pohybová rovnice, první impulsová věta	164
2.11.8.2	Druhá pohybová rovnice, druhá impulsová věta	165
3	Speciální teorie relativity	168
3.1	Relativistická kinematika	168
3.1.1	Speciální teorie relativity	168
3.1.2	Relativnost v klasické mechanice	170
3.1.2.1	Galileiho transformace	170
3.1.2.2	Důsledky Galileovy transformace	172
3.1.3	Fyzikální základy speciální teorie relativity	173
3.1.3.1	Invariantnost a kovariantnost	173
3.1.3.2	Postuláty speciální teorie relativity	174
3.1.3.3	Důsledky Einsteinových postulátů speciální teorie relativity	176
3.1.3.4	Kontrakce délek	178
3.1.3.5	Lorentzova transformace	179
3.1.3.6	Důsledky Lorentzovy transformace v příkladech	182
3.1.4	Relativistická dynamika	184
3.1.5	Relativistická hmotnost	184
3.1.6	Relativistická pohybová rovnice	186
3.1.6.1	Síla a zrychlení mají (obecně) různý směr.	187
3.1.6.2	Podélná a příčná hmotnost	187
3.1.6.3	Pro $u \ll c$,	188
3.1.7	Relativistická energie	189
3.1.7.1	Kinetická energie	189
3.1.7.2	Obecný vztah mezi energií a hmotností	191
3.1.8	Zákon zachování energie: $E' = E$, tj.	191
3.1.9	Zákon zachování hmotnosti: $m'_{vsl} = m_{vsl}$ tj.	192
3.1.10	Příklady k části 3	192
4	Základy molekulárně kinetické teorie	196
4.1	Molekulová stavba látek	196
4.2	Ideální plyn	198
4.2.1	Makroskopický popis	198
4.2.2	Mikroskopická definice	198
4.3	Tlak ideálního plynu	199

4.3.1	Hustota toku molekul na stěnu nádoby	200
4.3.2	Kinetický výklad tlaku plynu	202
4.3.3	Střední kvadratická rychlost molekul	205
4.4	Teplota a její kinetická interpretace	206
4.5	Vnitřní energie a tepelná kapacita ideálního plynu	208
4.5.1	Vnitřní energie ideálního plynu	208
4.5.2	Tepelná kapacita ideálního plynu	209
4.5.3	Ekvipartiční teorém	210
4.6	Statistické zákonitosti ideálního plynu	212
4.6.1	Maxwellův zákon rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu	212
4.6.2	Rozdělení počtu částic s výškou – Boltzmannovo rozdělení	216
4.6.3	Střední volná dráha molekul	219
4.6.4	Příklady z molekulárně kinetické teorie	220
5	Termodynamika	225
5.1	Základní pojmy termodynamiky	225
5.1.1	Předmět termodynamika	225
5.1.2	Teplota a její měření	225
5.1.3	Teplo a práce	227
5.2	První princip termodynamiky	229
5.3	Vratné a nevratné děje	231
5.3.1	Stav termodynamické rovnováhy	231
5.3.2	Vratné a nevratné děje	231
5.4	Molová tepelná kapacita plynů při konstantním tlaku	233
5.5	Stavové změny ideálního plynu	234
5.5.1	Změna za stálého objemu – izochorická, $V = \text{konst.}$	234
5.5.2	Změna za stálého tlaku – izobarická, $p = \text{konst.}$	235
5.5.3	Změna za stálé teploty – izotermická, $T = \text{konst.}$	236
5.5.4	Změna adiabatická	237
5.5.5	Změna polytropická	239
5.6	Tepelné stroje a Carnotův kruhový děj	242
5.6.1	Kruhové děje	242
5.6.2	Carnotův kruhový děj	243
5.6.3	Tepelné stroje	245
5.6.4	Absolutní termodynamická stupnice teploty	246
5.6.5	Účinnost nevratných dějů	247
5.7	Druhý princip termodynamiky a entropie	249
5.7.1	Druhý princip termodynamiky	249
5.7.2	Entropie při vratných dějích	250
5.7.3	Entropie při nevratných dějích	253
5.7.4	Volná expanze	253
5.7.5	Vedení tepla	254
5.7.6	Entropie a druhá termodynamická věta	257
5.7.7	Entropie a pravděpodobnost	257
5.7.8	Třetí princip termodynamiky	258
5.8	Reálné plyny	258
5.8.1	Fázové změny	258
5.8.2	Stavová rovnice	259
5.8.3	Van der Waalsova rovnice	262

5.8.4	Kritický a trojný bod	264
6	Kmitání	271
6.1	Hlavní vlastnosti kmitavých pohybů	271
6.1.1	Obecné kmity	271
6.1.1.1	Perioda T a frekvence f (nebo ν) periodických kmitů.	273
6.1.2	Harmonické kmity (harmonický pohyb)	274
6.1.2.1	Definice harmonických kmitů	274
6.2	Lineární harmonický oscilátor	277
6.2.0.2	Rychlost a zrychlení lineárního harmonického oscilátoru	277
6.2.0.3	Fázový posuv	278
6.2.0.4	Diferenciální rovnice harmonického pohybu	278
6.2.0.5	Síly působící na lineární harmonický oscilátor	278
6.3	Vlastní kmity mechanických oscilátorů	280
6.3.1	Netlumené kmity tělesa na pružině	280
6.3.1.1	Těleso na pružině	280
6.3.1.2	Diferenciální rovnice kmitů	281
6.3.1.3	Energie harmonického oscilátoru	282
6.3.2	Fyzické a matematické kyvadlo:	283
6.3.2.1	Diferenciální rovnice fyzického kyvadla:	284
6.3.2.2	Úhlová výchylka:	285
6.3.2.3	Matematické kyvadlo:	286
6.3.3	Tlumené kmity mechanického oscilátoru:	287
6.3.3.1	Vznik tlumení	287
6.3.3.2	Tlumené kmity tělesa na pružině	288
6.3.3.3	Výchylka tlumeného oscilátoru	288
6.4	Netlumený elektrický oscilační obvod	289
6.4.0.4	Diferenciální rovnice kmitů v sériovém obvodu RLC	291
6.4.0.5	Dokonale vodivý obvod LC ($R = 0$)	292
6.5	Skládání kmitů	293
6.5.1	Skládání stejnosměrných harmonických pohybů o stejných frekvencích ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$)	294
6.5.2	Skládání stejnosměrných harmonických pohybů o různých frekvencích, $\omega_1 \neq \omega_2$	296
6.5.2.1	Podmínka periodičnosti	296
6.5.3	Skládání stejnosměrných harmonických pohybů o různých (blízkých) frekvencích, splňujících vztah $\omega_1 \doteq \omega_2$	298
6.5.4	Skládání harmonických kmitů navzájem kolmých	300
6.6	Příklady k části 6	303
7	Vlnění	310
7.1	Postupné mechanické vlnění	310
7.1.1	Co je to vlnění?	310
7.1.1.1	Co je charakteristické pro mechanické vlny?	310
7.1.1.2	Různé druhy vlnění	311
7.1.2	Co se děje v pružné vlně?	311
7.1.2.1	Podélné a příčné vlny	313
7.1.3	Výchylka, rychlost částic, rychlost vlnění, čelo vlny, vlnoplocha	314
7.1.4	Zákon superpozice vlnění	315

7.1.5	Matematické vyjádření postupující vlny	316
7.1.5.1	Sinusové (neboli harmonické) vlny	319
7.1.5.2	Matematické vyjádření postupující harmonické vlny	319
7.1.5.3	Jak se pohybují částice v sinusové vlně?	320
7.1.5.4	Různé vyjádření harmonických vln	321
7.1.5.5	Fázová rychlost	322
7.1.6	Dopplerův jev	323
7.1.6.1	Příklady Dopplerova jevu	323
7.1.6.2	Zdroj v pohybu — vlnová délka	324
7.1.7	Akustické vlnění	328
7.1.7.1	Diferenciální rovnice vlnění	328
7.1.7.2	Vlnění v plynech, tyčích a vláknech	333
7.1.7.3	Energie pružných vln	335
7.1.7.4	Přehled hlavních akustických veličin	337
7.1.8	Interference a ohyb vlnění	338
7.1.8.1	Superpozice a interference vlnění	338
7.1.8.2	Stojaté vlnění	339
7.1.8.3	Interference vlnění ze dvou bodových zdrojů	344
7.1.8.4	Huygensův–Fresnelův princip	346
7.1.9	Příklady – Vlnění	349
8	Optika	354
8.1	Vlnová optika	354
8.1.1	Fyzikální podstata světla	354
8.1.1.1	Rovinná elektromagnetická vlna	354
8.1.1.2	Viditelné světlo	356
8.1.1.3	Koherentní a nekoherentní světlo	358
8.1.1.4	Polarizace světla	361
8.1.2	Interference a ohyb světla	361
8.1.2.1	Interference světla na tenké vrstvě	361
8.1.2.2	Ohyb světla na štěrbině	366
8.1.2.3	Ohyb světla na optické mřížce	371
8.1.2.4	Holografie	372
8.2	Zobrazování čočkou	376
8.2.1	Zobrazovací rovnice	376
8.2.2	Zvětšení	376
8.2.3	Chod paprsků čočkou — paprskový obrazec	377
8.2.3.1	Zobrazování spojnou čočkou	377
8.2.3.2	Zobrazování rozptylnou čočkou	380
9	Výsledky	384
10	Fyzikální a astronomické konstanty	400

1. Úvod do fyziky

1.1 Obsah a metoda fyziky

metodyFyziky}

V této části je stručně připomenut obsah fyziky a poněkud podrobněji je vyložena metoda, kterou fyzika zkoumá přírodu. Ústřední pojem je „fyzikální model“. Vztah fyzikálního modelu k realitě a metoda fyziky jsou přehledně znázorněny ve schématu 1.1. Pochopení tohoto schématu je velmi užitečné pro pochopení metody vědecké práce ve všech oblastech lidské činnosti.

Cíl: I) Porozumět schematickému znázornění metody fyziky 1.1 a jeho hlavním myšlenkám.

1.1.1 Jak fyzika studuje svět?

Předmět zkoumání fyziky zná v hrubých rysech každý absolvent střední školy. Připomeňme: Fyzika zkoumá nejobecnější zákonitosti dějů, které probíhají v neživé i živé přírodě, tj. v látkách (to je ta forma hmoty, která je složena z molekul a atomů) a ve fyzikálních polích (to je ta forma hmoty, která sestává z částic s nulovou klidovou hmotností — např. elektromagnetické pole, gravitační pole). Zákony, které se ve fyzice vyslovují, jsou obecné v tom smyslu, že platí — za stanovených podmínek — ve všech dějích, nezávisle na tom, zda probíhají v živé nebo neživé přírodě, ve strojních mechanismech, elektrických zařízeních atd.

Tato obecnost fyziky je na jedné straně výhodou fyziky (proto je fyzika zařazena v programu studia téměř na všech vysokých školách), na druhé straně však i její nevýhodou v tom, že nemůžeme zacházet — alespoň na úrovni základního kurzu — do příliš velkých podrobností, jejichž studium člověka často upoutá víc než studium věcí obecných. O tom, jak je důležitá znalost fyziky pro dnešního inženýra, není třeba dlouho hovořit. Stačí např. podívat se do studijních textů pro vyšší ročníky kterékoliv technické fakulty, abychom viděli, že ve většině z nich se rozvádějí, aplikují a v určitých směrech prohlubují fyzikální výsledky, jež jsou předmětem studia posluchačů v prvních semestrech.

Jestliže někdo porozumí fyzice, neznamená to ovšem ještě nutně, že bude dobrým inženýrem. Na druhé straně však dnes nemůže být dobrým inženýrem ten, kdo nerozumí fyzice.

1.1.2 Jak fyzika poznává svět?

Přečtete-li si a promyslíte následující část, máte velkou naději, že se budete dívat na fyziku i na jiné předměty nebo oblasti vědy moudřeji než dosud.

Hlavní myšlenka tohoto odstavce je: Příroda, všechny objekty kolem nás a všechny děje jsou neobyčejně složité a mnohotvárné, jejich postupné poznávání je náročný a dlouhodobý proces. Fyzika, podobně jako všechny jiné vědy, musí při jejich zkoumání vždy vybrat jen jejich část a uvažovat jen o určitých stránkách dějů a jen o určité části vlivů, které se v nich uplatňují. Fyzik zanedbává drtivou většinu stránek ostatních, těch, o nichž se přesvědčil, anebo o nichž se pouze domnívá, že nejsou za dané situace a za daných podmínek podstatné.

Zjednodušený objekt, který takto ze skutečnosti fyzik „vypreparuje“ a který je jistým obrazem skutečnosti, se nazývá „fyzikální model“ skutečného objektu nebo děje. Fyzik pak zkoumá vlastnosti tohoto modelu. Všechny fyzikální zákony, které kdy byly a které budou vysloveny, platí

1.2. FYZIKÁLNÍ POJMY A VELIČINY

a budou platit pouze pro fyzikální modely, nikoliv pro přírodu samotnou. S rozvojem našeho poznání odrážejí tyto modely skutečnost stále dokonaleji.

Uvedeme příklady:

1. Povrch každého skutečného tělesa je tvořen molekulami. Je nerovný, neurčitý a nestálý. Molekuly vykonávají neuspořádaný tepelný pohyb, jsou bombardovány molekulami okolního plynu nebo kapaliny, některé molekuly se uvolňují, jiné se v něm zachycují (oxidace, koroze), atd. Jestliže tedy ve fyzice nebo mechanice považujeme při zkoumání pohybu těles jako celku jejich povrch za hladký, uvažujeme o modelu těchto těles, nikoliv o nich samých.
2. Dotknou-li se dvě tělesa obecného tvaru, charakterizujeme jejich vzájemné působení veličinou „síla“ a působišťem v bodě dotyku. Ve skutečnosti se na interakci podílí obrovské množství molekul v oblasti styku, tělesa se více nebo méně deformují, deformace postupuje tělesy konečnou rychlostí atd. Všechny tyto děje v části mechaniky zvané „Mechanika tuhého tělesa“ zanedbáváme, namísto o skutečných tělesech a skutečných dějích uvažujeme o jejich fyzikálním modelu.

Fyzikálním modelem často rozumíme nejen zjednodušenou představu o fyzikálním objektu, nýbrž i celou soustavu postulátů nebo axiomů, jimiž je model definován, včetně všech zákonitostí, které v rámci modelu platí. Nejznámějším takovým modelem je „Bohrův model atomu“. Ve skutečnosti ovšem všechny části fyziky — mechanika, vlnění, elektromagnetismus atd. — jsou v tomto smyslu nauky o modelech.

Vztah mezi zkoumanými objekty a ději na straně jedné a fyzikálním modelem na straně druhé je zřejmý ze schématu 1.1:

Zkoumáme-li jeden a tentýž objekt z různých hledisek za různých podmínek a pro různé typy dějů, setkáváme se často s různými modely téhož objektu. Např.: dokonale tuhé těleso, dokonale pružné těleso, plastické těleso, struktura látky tělesa, těleso jako termodynamická soustava atd.

Nelze se pak divit, že někdy mohou vést dva různé modely téhož objektu a děje k různým teoretickým výsledkům. Plyne to z metody vědecké práce. Stane-li se to, postupuje se podle předešlého schématu.

1.2 Fyzikální pojmy a veličiny

Vytváření fyzikálních pojmů, zavádění (definování) fyzikálních veličin a jejich jednotek. Důležité pojmy: jednotka fyzikální veličiny, její číselná hodnota, rozměr fyzikální jednotky. Uzákoněná soustava jednotek SI je vysvětlena relativně podrobně, je nejdůležitější.

Cíl: I) Vysvětlit co je fyzikální pojem a fyzikální veličina, vyložit jejich hlavní vlastnosti.

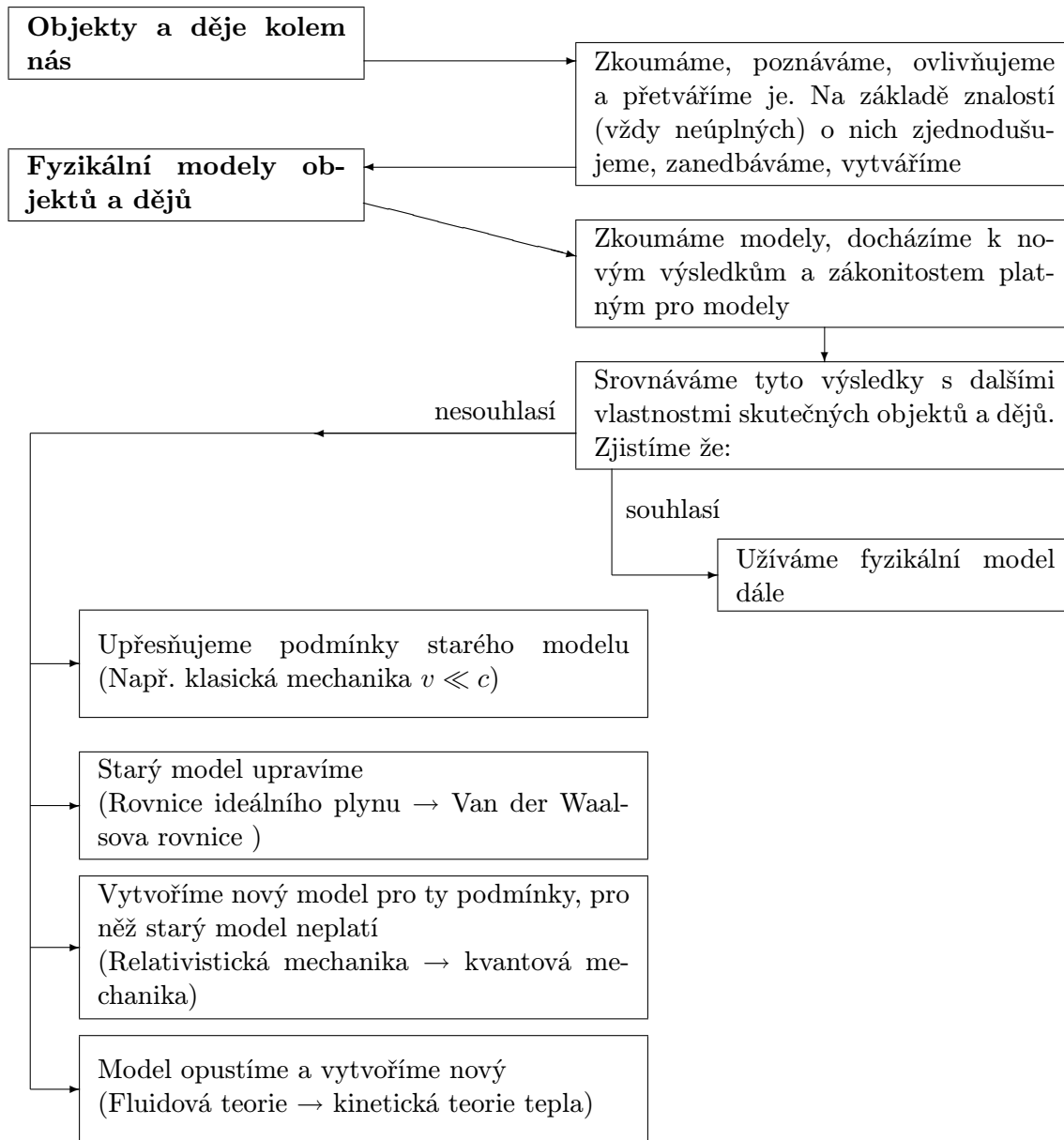
II) Vysvětlit soustavu jednotek SI, zejména: vyjmenovat základní veličiny, základní jednotky, odvozené veličiny a jednotky, odvodit rozměr jednotek.

III) Znat a vysvětlit pojmy, veličiny a výsledky uvedené v tomto textu.

1.2.1 Fyzikální pojmy

Podobně jako v běžném životě vytváříme a užíváme při myšlení a dorozumívání myšlenkové útvary zvané pojmy — např. úsilí, stůl, dovolená atd. — vytváříme a užíváme v odborné činnosti navíc pojmy nové, pro danou oblast činnosti specifické. Ve fyzice jsou to pojmy fyzikální — např.

1.2. FYZIKÁLNÍ POJMY A VELIČINY



{schema1} Obr. 1.1: Schematické znázornění metody fyziky

setrvačnost, gravitační pole, jaderná syntéza atd. Jsou obvykle přesněji vymezeny, tj. definovány než pojmy běžného života.

Pojmy charakterizují určitý objekt, nebo děj, nebo vlastnost atd. po stránce kvalitativní, tj. říkají, o co jde. Vysvětlí se to při jejich zavádění (definování). Např. fyzikální pojem „setrvačnost“ charakterizuje tu vlastnost těles, že bez působení okolních těles a fyzikálních polí nemění (v inerciální vztažné soustavě) rychlost, tj. setrvávají ve stálém pohybovém stavu.

1.2.2 Fyzikální veličiny

Fyzikální veličiny jsou, podobně jako fyzikální pojmy, myšlenkové útvary, které vytváříme při myšlení a dorozumívání ve fyzice. Odrážejí přírodu a její vlastnosti i naše znalosti o ní. Jsou to

1.2. FYZIKÁLNÍ POJMY A VELIČINY

vyšší útvary než fyzikální pojmy, od nichž se liší zejména tím, že je definujeme a) téměř vždy přesně, b) tak, že jim přiřazujeme určité číslo, které nazýváme číselná hodnota fyzikální veličiny. Např. měrnou hustotu ρ homogenního tělesa o hmotnosti m a objemu V definujeme vztahem

$$\{1.1-1\} \quad \rho = \frac{m}{V}. \quad (1.1)$$

Číselná hodnota veličiny ρ závisí na jednotkách, v nichž jsou udány veličiny m, V a v nichž je pak dána i jednotka veličiny ρ . Přitom jednotkou fyzikální veličiny rozumíme zcela určitou fyzikální veličinu téhož druhu, kterou prohlásíme za jednotkovou — např. kilogram, metr, atd. Jednotku fyzikální veličiny X značíme $[X]$, její číselnou hodnotu $\{X\}$. Můžeme tedy psát

$$X = \{X\} \cdot [X],$$

např.

$$m = 5 \text{ kg},$$

nebo

$$\rho = 8,00 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$
$$\rho = \{\rho\} \cdot [\rho].$$

Číselná hodnota fyzikální veličiny závisí na její jednotce. Např.

$$\{1.1-2\} \quad v = 7,2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 7,2(10^3 \text{ m}) \cdot (3,6 \cdot 10^3 \text{ s})^{-1} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (1.2)$$

Zřejmé: je-li jednotka $[X]$ fyzikální veličiny X k -násobkem jednotky $[X]'$, tj. platí-li $[X] = k[X]'$, platí pro odpovídající číselné hodnoty vztah $\{X\} = k^{-1}\{X\}'$. Rovnice (1.2) naznačuje i metodu převádění jednotek.

Fyzikální veličina má dvě stránky: a) kvalitativní (vyjadřuje, podobně jako fyzikální pojem, o co jde), b) kvantitativní (vyjadřuje číselně mohutnost, případně stupeň, nebo rozsah uvažované vlastnosti, děje atd.).

Veličinu ρ jsme definovali vztahem (1.1) s užitím veličin m, V , které jsme přitom (mlčky) pokládali za známé. Všechny veličiny takto definovat nelze, z některých musíme vyjít a považovat je tak za známé, které nemusíme definovat pomocí veličin jiných, nýbrž jen vysvětlíme a popíšeme, co máme na mysli a udáme předpis, jak jim přiřadíme číslo, tj. číselnou hodnotu. Takovéto veličiny, kterých je konečný počet, nazýváme veličiny základní. Ostatní pak nazýváme veličiny odvozené.

Volba základních veličin není jednoznačná, nýbrž je věcí dohody, neboli konvence. Takové konvence se provádějí v mezinárodním měřítku. Základní veličiny se volí podle mnoha kritérií, z nichž nejdůležitější požadují, aby:

1. ze základních veličin bylo možno definovat všechny ostatní veličiny,
2. jim bylo možno měřením přiřadit číselnou hodnotu s přesností co největší,
3. jejich jednotky byly stálé (tj. s časem co nejméně proměnné) a daly se relativně snadno realizovat.

Proto např. v elektromagnetismu byl za základní veličinu zvolen „elektrický proud“ s jednotkou „ampér“, i když z hlediska fyzikálního fundamentální veličinou je elektrický náboj, protože „elektrický proud“ charakterizuje pohybující se elektrické náboje.

Soubor zvolených základních veličin a určitým způsobem definovaných odvozených veličin se nazývá soustava měřicích jednotek.

1.2. FYZIKÁLNÍ POJMY A VELIČINY

Soustavy měřicích jednotek užívané dříve v různých státech se lišily a v průběhu času měnily. Výsledkem snah o jejich zjednodušení a sjednocení v mezinárodním měřítku je, že ve většině zemí byla přijata tzv. Mezinárodní soustava měřicích jednotek (SI), (Système International d'Unités). U nás je uzákoněna v normě ČSN 01 1300. Zde uvedeme pouze základní informace o ní. Obširnější informace jsou uvedeny v [2, 3].

1.2.3 Mezinárodní soustava jednotek SI

Základní veličiny a jim příslušné hlavní jednotky, tzv. základní jednotky soustavy SI jsou:

1. délka — metr,
2. hmotnost — kilogram,
3. čas — sekunda,
4. elektrický proud — ampér,
5. termodynamická teplota — kelvin,
6. látkové množství — mol,
7. svítivost — kandela.

Doplňkové veličiny a jejich hlavní jednotky, tzv. doplňkové jednotky, soustavy SI jsou

1. rovinný úhel — radián,
2. prostorový úhel — steradián.

Definice:

Metr (m) je délka rovnající se 1 650 763,73 vlnové délky záření odpovídajícího přechodu mezi hladinami $2p_{10}$ a $5d_5$ atomu kryptonu 86 ve vakuu¹.

Kilogram (kg) je hmotnost mezinárodního prototypu kilogramu.

Sekunda (s) je doba trvání 9 192 631 770 period záření, které přísluší přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu atomu cesia 133².

Ampér (A) viz definice v části 1.4.2.3 textu [Fyzika II](#).

Kelvin (K) je $1/273,16$ část termodynamické teploty trojného bodu vody — viz část 5.1.2.

Mol (mol) je látkové množství soustavy sestávajících ze stejných částic (atomů, molekul atd.), v níž počet částic je roven počtu atomů v 0,012 kg uhlíku ^{12}C .

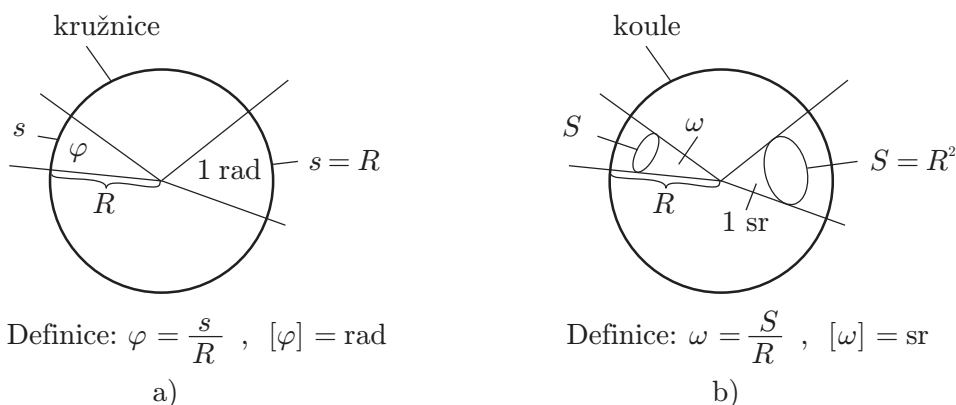
Kandela (cd) je svítivost jistého prototypu (viz [2, 3]).

Radián (rad) je rovinný úhel sevřený dvěma radiálními polopaprsky, které vytínají na kružnici o poloměru R oblouk délky $s = R$ (viz obr. 1.2a.)

Steradián (sr) je prostorový úhel daný kuželem, který na kouli o poloměru R se středem ve vrcholu kužele vytíná plochu o obsahu $S = R^2$ (viz obr. 1.2b)

¹Přibližně se rovná vzdálenosti dvou vrypů na dříve užívaném normálu a 10^{-7} délky čtvrtiny poledníku Země.
²„Astronomická“ definice pomocí tropického roku byla nahrazena definicí „pozemskou“. Poznamenejme, že Země rotuje nepravidelně — její úhlová rychlost kolísá a v průměru se zmenšuje.

1.2. FYZIKÁLNÍ POJMY A VELIČINY



{obr1.1-1}

Obr. 1.2: Definice rovinného úhlu φ a prostorového úhlu ω

1.2.3.1 Vedlejší jednotky základních veličin

Kromě uvedených hlavních jednotek je povoleno v SI užívat tzv. vedlejších jednotek, které jsou uvedeny v obr. 1.3.

Veličina	Vedlejší jednotky			Veličina	Jednotka	
	Název	Jednotka	Značka		Název	Značka
čas	minuta		1 min	objem	litr	1 l
	hodina		1 h	hmotnost	tuna	1 t
	den		1 d		Celsiova teplota	Celsiův stupeň
rovinný úhel	(úhlový) stupeň		1 °	energie	elektronvolt	1 eV
	(úhlová) minuta		1 ′	hmotnost	atomová hmotnostní konstanta	1 u
	(úhlová) vteřina		1 ″			

{obr1.1-2}

Obr. 1.3: Vedlejší jednotky SI.

Povoleny jsou násobné a dílčí jednotky tvořené násobkem $10^{\pm 3}, 10^{\pm 6}, \dots$ základních a odvozených jednotek. Jejich názvy se tvoří předsunutím předpony a jejich značky předsunutím znaku podle schématu

Předpona	tera	giga	mega	kilo	mili	mikro	nano	piko	femto	atto
Značka	T	G	M	k	m	μ	n	p	f	a
Význam	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

Např.: 1 megavolt = 1 MV = 10^6 V, 1 nanometr = 1 nm = 10^{-9} m.

Kromě toho je povoleno užívat tyto jednotky: $\text{cm}^2, \text{km}^2, \text{dm}^2, \text{mm}^2, \text{dm}^3, \text{cm}^3, \text{mm}^3$.

Odvozené veličiny v soustavě SI jsou všechny takové veličiny (bez omezení počtu), které jsou součinem (kladných i záporných) mocnin základních a doplňkových veličin. Jim příslušné hlavní jednotky, tzv. odvozené jednotky, jsou součinem mocnin hlavních jednotek základních a doplňkových veličin. Číselný faktor v uvedených vztazích je roven jedné. Např.

1.3. SKALÁRNÍ A VEKTOROVÉ FYZIKÁLNÍ VELIČINY

$$p = \frac{F}{S}, 1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2} = 1 \text{ m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$$

Takto zavedené odvozené jednotky i hlavní jednotky veličin základních a odvozených se nazývají koherentní.

Rozměr (neboli dimenze) fyzikální veličiny X se značí $D(X)$ nebo (X) a je definován:

- pro základní veličiny: rozměr délky je délka, zápis $D(l) = L$,
- pro odvozené veličiny je jejich rozměr roven součinu mocnin rozměrů základních veličin, daný vztahem mezi nimi. Např. rozměr tlaku je

$$D(p) = L^{-1} \cdot M \cdot T^{-2},$$

kde L je jednotka délky, M jednotka hmotnosti a T jednotka času.

Veličínová rovnice je rovnice mezi fyzikálními veličinami, např.

$$U = R \cdot I, \quad \text{např. } 6 \text{ V} = 2 \Omega \cdot 3 \text{ A}.$$

Jsou-li všechny veličiny udány v hlavních (tj. koherentních) jednotkách, plynou odtud rovnice

$[U] = [R] \cdot [I],$	tj. $V = \Omega \cdot A$	rovnice pro jednotky
$\{U\} = \{R\} \cdot \{I\},$	tj. $6 = 2 \cdot 3$	rovnice pro číselné hodnoty
$D(U) = D(R) \cdot D(I),$	tj. $L^2 M T^{-3} I^{-1} = L^2 M T^{-3} I^{-2} \cdot I$	dimenzionální rovnice

Vztah jednotky odvozené veličiny k základním jednotkám vyjadřuje rovnice typu $1 \text{ N} = 1 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$, nebo $1 \text{ V} = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$ atd. Někdy (ne zcela správně, ale velmi často) se pravá strana nazývá rozměrem (dimenzí) jednotky.

Rozměr základních veličin: délka $l, D(l) = L$; hmotnost $m, D(m) = M$; čas $\tau, D(\tau) = T$; elektrický proud $I, D(I) = I$; teplota $t, D(t) = \Theta$; látkové množství $n, D(n) = N$; svítivost $I, D(I) = J$.

1.3 Skalární a vektorové fyzikální veličiny

oveVeliciny}

Vyloženy budou pojmy „vztažná soustava“, „souřadnicová soustava“, „dráhová souřadnice“. Ve výkladu vektorů se předpokládá, že je čtenář zná v rozsahu textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#), část „[Vektory](#)“. Základní vlastnosti vektorů jsou připomenuty. Nově je vyloženo semikartézské vyjádření vektorů a operace „skalární součin“ a „vektorový součin“.

- Cíl:**
- Vyložit vlastnosti vektorových veličin a pravidla počítání s vektory v rozsahu skript [6], část „[Vektory](#)“, zejména umět jich užít.
 - Pracovat s vektory v semikartézském vyjádření.
 - Pracovat s vektorovými rovnicemi a převádět je na rovnice skalární.
 - Vyslovit definice skalárního a vektorového součinu dvou vektorů, vyložit jejich vlastnosti a pracovat s nimi.
 - Uvedené vztahy a výsledky definovat a vysvětlit pojmy a veličiny zvýrazněné v tomto textu.

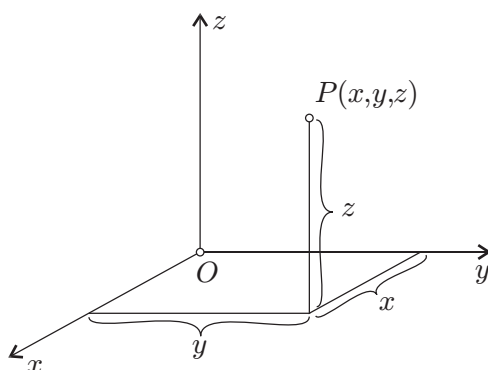
{1.1.3A}

1.3.1 Vztažné soustavy, soustavy souřadnic



Fyzikální děje — např. mechanické pohyby těles, šíření světla, elektromagnetické děje atd. — zkoumáme a popisujeme vždy tak, že nejprve zvolíme (někdy jen podvědomě) vztažnou soustavu, tj. nějaké vhodné těleso (nebo skupinu těles), a pohyby ostatních těles i jiné děje vztahujeme k této soustavě. Vztažnou soustavou může být např. laboratoř, v níž provádíme pokusy a měření, povrch Země, kabina letadla, stator motoru atd. Velmi vhodnou vztažnou soustavou je např. ideální „dokonale tuhé“ těleso, jehož elementy mají stálou vzájemnou vzdálenost.

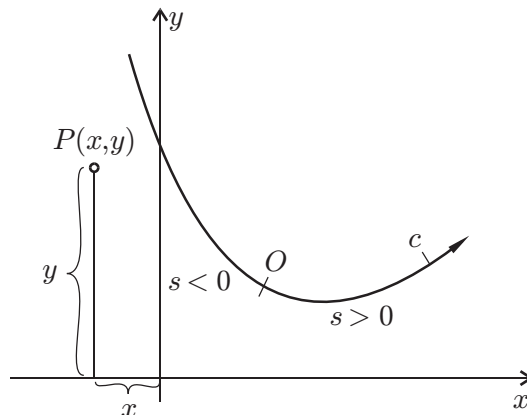
Abychom mohli popisovat a vyšetřovat kvantitativně polohy a pohyby těles, nebo zkoumat elektromagnetické pole, nebo vyšetřovat šíření vlnění atd., zavádíme navíc soustavu souřadnic spojenou se vztažnou soustavou. Při zkoumání prostorových pohybů zavádíme nejčastěji trojrozměrnou pravotočivou soustavu pravoúhlých orientovaných os $Oxyz$, tzv. kartézskou soustavu souřadnic. Polohu obecného bodu P pak charakterizujeme trojicí jeho souřadnic (x, y, z) . Užíváme zápisu $P(x, y, z)$, obr. 1.4.



Obr. 1.4: Význam trojice souřadnic (x, y, z) charakterizujících polohu bodu $P(x, y, z)$ v trojrozměrné pravotočivé soustavě pravoúhlých souřadnic $Oxyz$.

{obr1.1-3}

V této soustavě zavedeme ještě čas t tak, že ve vztažné soustavě umístíme vhodné časoměrné přístroje — hodiny. Hodiny umístěné v různých místech seřídíme tak, aby ukazovaly stejný čas — synchronizujeme je. Čas t nazýváme někdy časová souřadnice, na rozdíl od prostorových souřadnic x, y, z .



Obr. 1.5: Geometrický význam dráhové souřadnice s (krátce dráha) popisující polohu hmotného bodu na libovolné křivce k .

{obr1.1-4}

Soustavu souřadnic budeme spojovat vždy s nějakým vztažným tělesem a budeme užívat i pro ni název „vztažná soustava“.

1.3. SKALÁRNÍ A VEKTOROVÉ FYZIKÁLNÍ VELIČINY

Při zkoumání rovinných pohybů relativně malých těles, tzv. hmotných bodů, zavádíme obvykle jen dvojrozměrnou soustavu souřadnic s osami Ox, Oy . Příklady: pohyb loďky na vodní hladině, pohyb družice kolem Země, šikmý vrh atd.

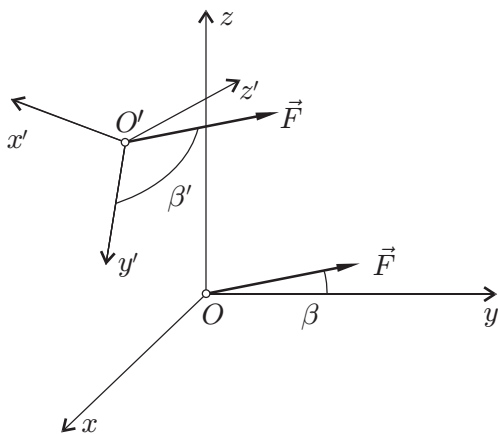
Chceme-li udat polohu hmotného bodu, o němž víme, že se pohybuje po určité předem známé křivce — např. automobil po dálnici Praha – Brno, můžeme postupovat takto: Na křivce k (obr. 1.5) volíme libovolně (vhodně) počátek O , křivku orientujeme (tj. vyznačíme směr, který považujeme za kladný) a polohu hmotného bodu na ní charakterizujeme veličinou (souřadnicí) $s \geq 0$, podobně jako na souřadnicové ose Ox . Veličinu s budeme nazývat dráhová souřadnice, krátce dráha.

Vztažnou a souřadnicovou soustavu bychom měli zakreslovat do všech obrázků znázorňujících fyzikální děje. V situacích, kdy je zřejmé, o co jde, se to však obvykle nemusí provádět.

1.3.2 Hlavní vlastnosti skalárních a vektorových veličin

Skalární a vektorové fyzikální veličiny se probírají na středních školách. O čtenáři se předpokládá, že je s nimi seznámen v rozsahu daném obsahem části „**Vektory**“ textu [6], viz také [7].

Z hlediska popisu určitého fyzikálního děje s užitím různých navzájem se nepohybujících soustav souřadnic (obr. 1.6) je užitečné si uvědomit, že skalární veličiny — např. teplota, objem, hmotnost tělesa atd. — mají v takových soustavách ($Oxyz, O'x'y'z'$ v obr. 1.6) stejné číselné hodnoty. Vektorové veličiny však (jež lze znázornit orientovanou úsečkou), např. síla \vec{F} , svírají s odpovídajícími si osami (např. $Ox, O'x'$) různé úhly, takže jejich průměty do os $Ox, O'x'$ atd. mají různé hodnoty.



Obr. 1.6: Dvě vůči sobě vzájemně se nepohybující vztažné soustavy souřadnic ($Oxyz$ a $O'x'y'z'$) a jejich rozdílný popis téhož vektoru \vec{F} .

{obr1.1-5}

Uvedeme zde některé další vlastnosti vektorových veličin v rozsahu potřebném k dalšímu výkladu. Budeme při tom užívat často názoru a náš výklad tedy nebude přesný. V matematice si čtenář poznatky o matematických objektech i operacích zde probíraných upřesní. Doporučená matematická literatura: [3], [4], [6].

Vektorové veličiny zde budeme značit obvyklými symboly, např. $\vec{F}, \vec{v}, \vec{p}$ atd. a budeme je nazývat většinou krátce vektory. Vektor o počátečním bodě A a koncovém bodě B budeme značit \overrightarrow{AB} . Počáteční bod vektoru budeme nazývat umístění vektoru. Umístění síly se nazývá působíště. Každou vektorovou veličinu lze napsat ve tvaru, který uvedeme na příkladu síly \vec{F} :

$$\vec{F} = 3 \text{ newtony} \cdot \vec{F}^0 = 3 \text{ N} \cdot \vec{F}^0.$$

Zde je

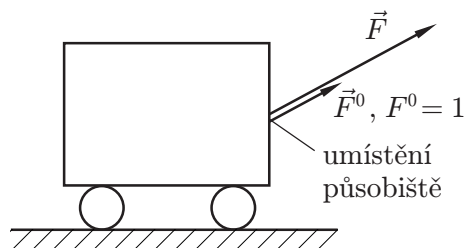
1.3. SKALÁRNÍ A VEKTOROVÉ FYZIKÁLNÍ VELIČINY

newton N jednotka síly \vec{F} . Značí se $[F] = \text{N}$;

3 číselná hodnota síly \vec{F} (v uvedených jednotkách). Značí se $\{F\} = 3$;

3 N velikost síly \vec{F} (jiné názvy: modul, absolutní hodnota). Značí se $F = 3 \text{ N}$ (nebo $|\vec{F}| = 3 \text{ N}$);

$\vec{F}^0 = \vec{F}/F$ jednotkový vektor ve směru síly. Platí $|\vec{F}^0| = 1$ (obr. 1.7).



{obr1.1-6}

Obr. 1.7: Význam jednotkového vektoru \vec{F}^0 ve směru vektoru síly \vec{F} .

Při kreslení vektorů se délky úseček volí tak, aby byly úměrné velikostem znázorněných veličin. Lze tedy psát $\vec{F} = \{F\} \cdot [F] \cdot \vec{F}^0$.

Dvě vektorové veličiny \vec{a}, \vec{b} jsou si rovny ($\vec{a} = \vec{b}$) právě tehdy, když

- jsou shodné po stránce kvalitativní
- mají stejnou velikost
- mají stejný směr.

Informace:

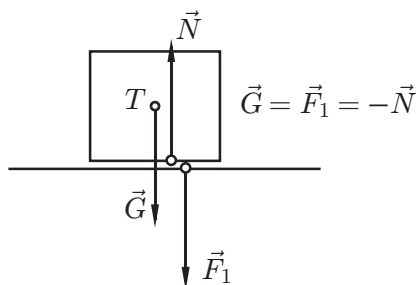
- Nesplňují-li dvě vektorové veličiny všechny tři uvedené podmínky, nejsou stejné. Je-li např. \vec{F}_1 síla vodorovného směru o velikosti $F_1 = 5 \text{ N}$ a síla \vec{F}_2 o velikosti $F_2 = 5 \text{ N}$ je svislá, nejsou to stejné síly, tj. $\vec{F}_1 \neq \vec{F}_2$. Platí ovšem $F_1 = F_2$;
- Dva vektory \vec{a}, \vec{b} , které splňují uvedené podmínky a), b), c) jsou stejné, i když mají různé umístění;
- Jsou-li dvě vektorové veličiny stejné, neznamená to, že jsou zcela shodné po stránce fyzikální. Příklad: Na těleso T , které leží v klidu na vodorovné podložce, působí síla tíhová \vec{G} a síla \vec{N} od podložky (obr. 1.8). Těleso působí na podložku silou \vec{F}_1 . Síly \vec{G}, \vec{F}_1 se liší původem (\vec{G} je způsobeno tíhovým polem, \vec{F}_1 je způsobeno tělesem T) i působištem. Platí však $\vec{G} = \vec{F}_1$;
- Z vektorové rovnice $\vec{a} = \vec{b}$ plyne $a = b, \vec{a}^0 = \vec{b}^0$ (a naopak).

1.3.3 Semikartézské vyjádření vektorů

Při vyšetřování vztahů mezi vektorovými veličinami s užitím kartézské soustavy souřadnic se zavádějí některé další pojmy a operace:

- Kolmé průměty (krátce: Průměty) vektorové veličiny \vec{a} do souřadnicových os (viz [6]). Značí se a_x, a_y, a_z (obr. 1.9) a jsou definovány vztahy

1.3. SKALÁRNÍ A VEKTOROVÉ FYZIKÁLNÍ VELIČINY



Obr. 1.8: Tíhová síla \vec{G} a síla \vec{F}_1 , kterou působí těleso na podložku. Obě vektorové veličiny jsou shodné, avšak nejsou zcela totožné po stránce fyzikální.

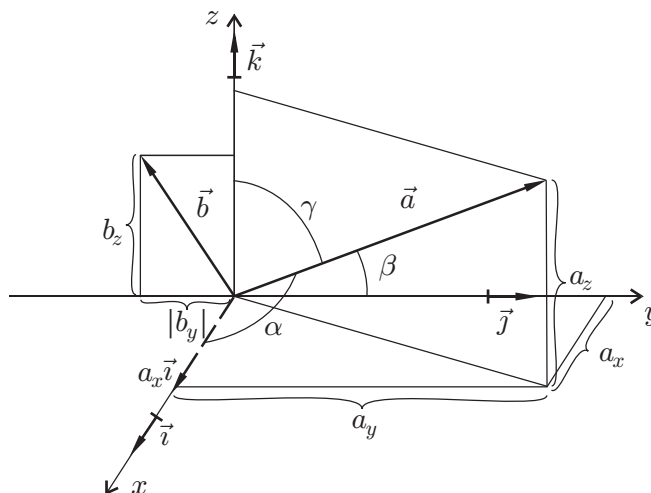
{obr1.1-7}

{1.1-3}

$$a_x = a \cos \alpha, a_y = a \cos \beta, a_z = a \cos \gamma. \quad \text{souřadnice vektoru } \vec{a} \quad (1.3)$$

{ram-1}

Tyto veličiny se nazývají rovněž souřadnice vektoru \vec{a} . Ze vztahu (1.3) plyne $a_x > 0$ pro $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $a_x = 0$ pro $\alpha = \pi/2$, $a_x < 0$ pro $\pi/2 < \alpha \leq \pi$. Užívá se zápisu $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Vektor \vec{a} a jeho souřadnice mají stejné jednotky.



Obr. 1.9: Vyjádření vektorů \vec{a} a \vec{b} pomocí jejich složek a_x, a_y, a_z (resp. $b_x(=0), b_y, b_z$) a jednotkových vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. V obrázku jsou rovněž vyznačeny úhly, které svírá vektor \vec{a} se souřadnicovými osami.

{obr1.1-8}

Je-li dán vektor svými souřadnicemi, např. $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, lze určit jeho velikost a úhly, které svírá se souřadnicovými osami, s užitím vztahů plynoucích z obr. 1.9:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

2. Semikartézské vyjádření vektoru.

Jednotkové vektory ve směru souřadnicových os Ox, Oy, Oz budeme značit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tyto vektory jsou navzájem kolmé (obr. 1.9) a platí pro ně $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Vektory $a_x \vec{i}, a_y \vec{j}, a_z \vec{k}$

1.3. SKALÁRNÍ A VEKTOROVÉ FYZIKÁLNÍ VELIČINY

a o velikostech $|a_x|, |a_y|, |a_z|$ se nazývají složky vektoru \vec{a} v souřadnicových osách. Platí pro ně

$$\{1.1-4\} \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{semikartézské vyjádření} \quad (1.4)$$

{ram-2}

To je tzv. semikartézské vyjádření vektoru \vec{a} .

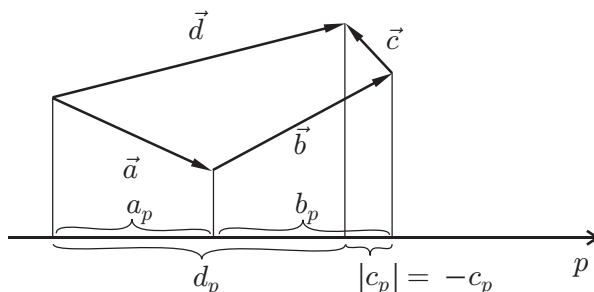
Informace: Většina fyzikálních veličin, které nejsou skalární, jsou veličiny vektorové a lze je vyjádřit ve tvaru (1.4). Trojice vektorů $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se nazývá báze vektorového prostoru tvořeného těmito veličinami. Počet vektorů báze se nazývá dimenze vektorového prostoru. Poznamenejme, že v matematice a v teoretických úvahách v oblasti techniky se pojem vektoru zobecňuje a uvažuje se obecně o n -dimenzionálních vektorových prostorech. (viz např. [8]).

3. Souvislost vektorových a skalárních rovnic. Z definičních vztahů (1.3) a z věty o průmětech (viz [6]) plyne: Jsou-li S_1, S_2, \dots, S_n skalární veličiny a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektorové veličiny takové, že platí vztah (1.5), pak platí i vztahy (1.6) a naopak, tj.

$$\{1.1-5\} \quad s_1 \vec{v}_1 + s_2 \vec{v}_2 + \dots + s_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad (1.5)$$

$$\{1.1-6\} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 v_{1x} + s_2 v_{2x} + \dots + s_n v_{nx} = 0 \\ s_1 v_{1y} + s_2 v_{2y} + \dots + s_n v_{ny} = 0 \\ s_1 v_{1z} + s_2 v_{2z} + \dots + s_n v_{nz} = 0 \end{array} \right\}. \quad (1.6)$$

To značí: vektorová rovnice (s vektory trojdimenzionálního prostoru) a tři skalární rovnice pro průměty do souřadnicových os jsou ekvivalentní.



{obr1.1-9}

Obr. 1.10: Průmět d_p součtu vektorů $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ do orientované přímky p .

Připomeňme obsah zmíněné věty o průmětech vektorů: Uvažujme o vektorových veličinách $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ a o jejich součtu $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (obr. 1.10). Utvořme průmět vektoru \vec{d} do libovolné orientované přímky p . Z obr. 1.10 je zřejmé, že platí

$$d_p = a_p + b_p - |c_p| = a_p + b_p + c_p.$$

Tedy

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow d_p = a_p + b_p + c_p,$$

slovy: průmět součtu vektorů do orientované přímky p je roven součtu jejich průmětů do p . Obecně pak platí:

$$\{1.1-7\} \quad \vec{b} = \sum c_k \vec{a}_k \Rightarrow b_p = \sum c_k a_{kp}, \quad (1.7)$$

kde c_k jsou skalární veličiny takové, že $c_k \vec{a}_k$ jsou vektorové veličiny stejného druhu.

1.3. SKALÁRNÍ A VEKTOROVÉ FYZIKÁLNÍ VELIČINY

{pr1.1-1} **KP 1.3-1** _____

Vektory \vec{a}, \vec{b} jsou dány svými souřadnicemi $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$. Vektor \vec{c} je dán vztahem $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Určete 1. c_x, c_y, c_z ; 2. c .

Řešení:

1. Z rovnice (1.6) plyne

$$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} \Rightarrow c_x = a_x - 2b_x, c_y = a_y - 2b_y, c_z = a_z - 2b_z;$$

2.

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{(a_x - 2b_x)^2 + \dots}$$

1.3.4 Skalární součin dvou vektorů

Skalární součin $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dvou (libovolných) vektorových veličin \vec{a}, \vec{b} je skalární veličina c daná vztahem

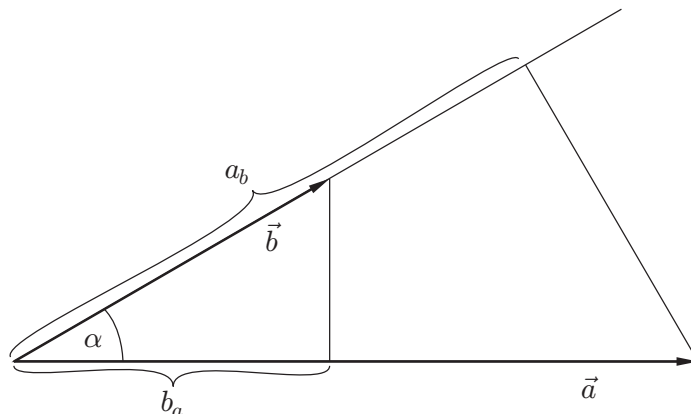


{1.1-8}

$$c(= \vec{a} \cdot \vec{b}) = ab \cos \alpha, \quad \text{definice skalárního součinu} \quad (1.8)$$

{ram-3}

kde α je dutý nebo přímý úhel sevřený vektory a, b (obr. 1.11).



{obr1.1-10}

Obr. 1.11: Geometrický význam skalárního součinu $\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \alpha (= a_b b = b_a a)$.

Informace:

1. Jednotky: $[c] = [a] \cdot [b]$;

2. Platí: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

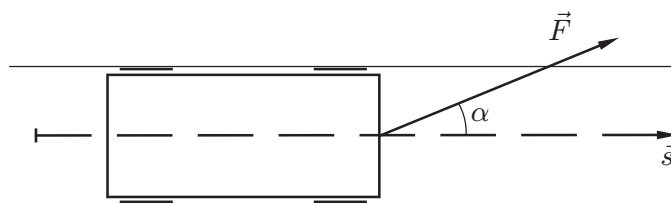
3. Platí: $\vec{a} \cdot \vec{b} \begin{cases} > 0 & \text{pro } 0 \leq \alpha < \pi/2 \\ = 0 & \text{pro } \alpha = \pi/2 \\ < 0 & \text{pro } \pi/2 < \alpha \leq \pi \end{cases}$

4. S užitím průmětů $a_b = a \cos \alpha, b_a = b \cos \alpha$ lze psát

{1.1-9}

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b b = b_a a \quad (1.9)$$

1.3. SKALÁRNÍ A VEKTOROVÉ FYZIKÁLNÍ VELIČINY



Obr. 1.12: Příklad KP 1.3-2.

{obr1.1-11}

{pr1.1-2}

KP 1.3-2

Vagon je tažen na přímém úseku délky $s = 20$ m lanem, které svírá se směrem rychlosti vagonu úhel $\alpha = 20^\circ$ a které je napínáno silou o velikosti $F = 800$ N. Vyjádřete práci W vykonanou silou \vec{F} pomocí skalárního součinu a vypočtete ji.

Řešení:

Zavedeme vektor \vec{s} podle obr. 1.12. Pak

$$\begin{aligned} W &= F_s s = F \cdot (\cos \alpha) \cdot s = \vec{F} \cdot \vec{s}, \\ W &= \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha = 800 \text{ N} \cdot 20 \text{ m} \cdot \cos 20^\circ = 1,50 \cdot 10^4 \text{ J}. \end{aligned}$$

5. S užitím vztahů (1.7), (1.8) lze dokázat: Pro libovolné vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ a skaláry A, B, C, D takové, že splňují vztahy $[A\vec{a}] = [B\vec{b}], [C\vec{c}] = [D\vec{d}]$, platí

$$(A\vec{a} + B\vec{b}) \cdot (C\vec{c} + D\vec{d}) = AC\vec{a} \cdot \vec{c} + AD\vec{a} \cdot \vec{d} + BC\vec{b} \cdot \vec{c} + BD\vec{b} \cdot \vec{d}. \quad (1.10)$$

Analogický výsledek platí pro libovolný počet sčítanců a součinitelů.

{pr1.1-3}

KP 1.3-3

Vyjádřete skalární součin vektorů $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ pomocí jejich souřadnic.

Řešení:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + \dots + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \end{aligned}$$

neboť

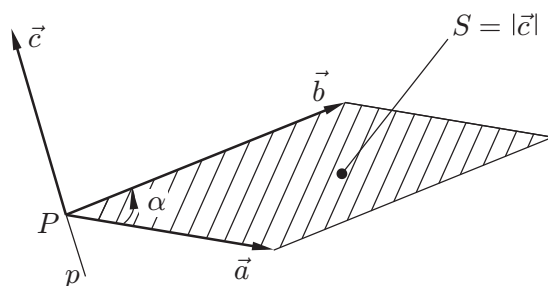
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{atd.}$$

1.3.5 Vektorový součin dvou vektorů

Vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$ dvou (libovolných) vektorových veličin \vec{a}, \vec{b} je vektorová veličina \vec{c} , definovaná takto: Oba vektory \vec{a}, \vec{b} umístíme do jednoho (libovolného) bodu (bod P v obr. 1.13). Pak vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ má:



1.3. SKALÁRNÍ A VEKTOROVÉ FYZIKÁLNÍ VELIČINY



Obr. 1.13: Geometrický význam vektorového součinu $\vec{a} \times \vec{b}$.

{obr1.1-12}

1. Velikost:

$$|\vec{c}| = ab \sin \alpha,$$

tj. platí

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha,$$

kde α je tupý nebo přímý úhel sevřený vektory \vec{a}, \vec{b} .

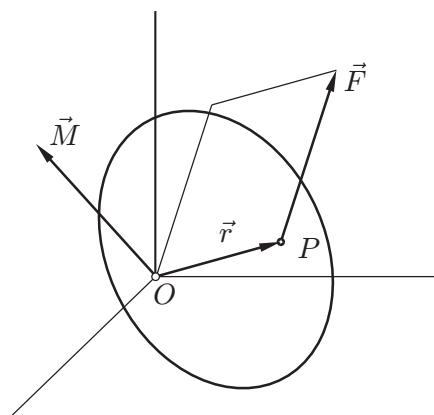
2. Směr: kolmý na rovinu danou vektory \vec{a}, \vec{b} tak, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (v uvedeném pořadí) tvoří pravotočivý trojhran (nebo: pravotočivý šroub — otáčení kolem přímky p od \vec{a} do \vec{b} nejkratší cestou, vektor \vec{c} má směr postupu šroubu) — obr. 1.13.

Proč právě takto se přiřazuje dvěma vektorům \vec{a}, \vec{b} třetí vektor \vec{c} ?

Odpověď je jednoduchá: protože se ve fyzice a v technice veličiny tohoto typu často vyskytují. Příklady:

(a) Na elektricky nabitou částici o náboji Q , pohybující se rychlostí \vec{v} v magnetickém poli o magnetické indukci \vec{B} , působí magnetická síla $\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$.

Úkol: volte libovolně vektory \vec{v}, \vec{B} a zakreslete směr \vec{F} pro $Q > 0$ a pro $Q < 0$.



Obr. 1.14: Příklad užití vektorového součinu: otáčivý moment \vec{M} síly \vec{F} působící na těleso v bodě P , jehož polohový vektor je \vec{r} , je roven $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

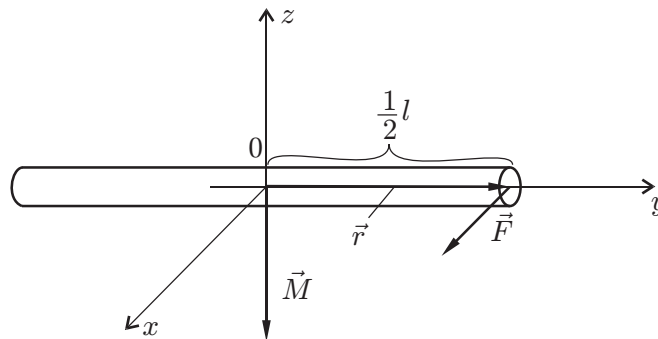
{obr1.1-13}

(b) Síla \vec{F} působící na těleso v bodě P vyvozuje vzhledem k počátku souřadnic otáčivý moment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, kde \vec{r} je polohový vektor bodu P (obr. 1.14).

1.4. DERIVACE A INTEGRÁLY

Informace:

1. Velikost vektoru \vec{c} , tj. $c = ab \sin \alpha$, je rovna plošnému obsahu kosodélníka vyšrafovaného v obr. 1.13.
2. Jednotky $[c] = [a][b]$;
3. Z definice vektoru $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ plyne
 - a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
 - b) $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$;
 - c) $\vec{a} \times (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{b}_2$.



Obr. 1.15: Kříklad KP 1.3-4.

{obr1.1-14}

{pr1.1-4}

KP 1.3-4

Na konci tyče délky l působí síla $\vec{F} \uparrow \uparrow Ox$ podle obr. 1.15. Určete otáčivý moment síly \vec{F} vzhledem k počátku O . (Pozn.: symbolem $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ vyjadřujeme, že vektory \vec{a}, \vec{b} jsou souhlasně rovnoběžné, tj. paralelní. Symbol $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ vyjadřuje, že vektory \vec{a}, \vec{b} jsou nesouhlasně rovnoběžné, tj. antiparalelní).

Řešení:

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Vektor \vec{M} zakreslíme v bodě O , směr je zřejmý z obr. 1.15. Platí

$$M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2} l F.$$

Řešte příklady KP 1.1-10 až KP 1.1-15 v textu Vybrané kapitoly z fyziky; KP 1.3-5.

1.4 Derivace a integrály

veAIntegrály

Ve fyzice i v technice má vzrůstající význam matematika. Věnujte se jejímu studiu, co vám síly stačí. Nezapomeňte však na to, že matematika je pro inženýra účinný nástroj pro studium technických dějů, jimž musí rozumět především po stránce fyzikální — musí vždy vědět, o co jde. Ve fyzice na technických fakultách se předpokládá, že student ovládá matematiku na gymnaziální úrovni, viz např. [8]. Přesto zde raději vyložíme ty matematické pojmy a operace, bez nichž se ve fyzice neobejdeme. Výklad je založen na názornosti a je zaměřen tak, aby student věcem porozuměl v rozsahu potřebném ke studiu fyziky. Důkazy uváděných výsledků a podmínky jejich platnosti si upřesní student v matematice. Zde vyložíme pojmy: derivace skalární a vektorové funkce, diferenciál, integrál.

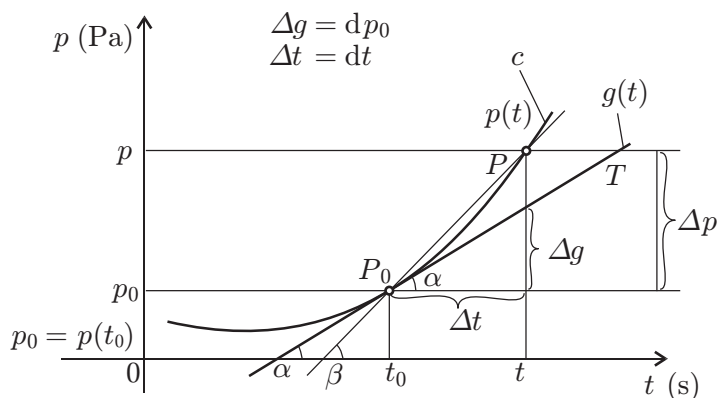
Cíl:

1.4. DERIVACE A INTEGRÁLY

- I) Vyložit pojem derivace skalární funkce, vyslovit její definici a vysvětlit její geometrický význam;
- II) Porozumět pojmu diferenciál a umět vyložit jeho hlavní význam v aplikacích;
- III) Vysvětlit a na příkladech ilustrovat pojem vektorové funkce skalárního argumentu, vyslovit a vyložit definici derivace vektorové funkce;
- IV) Vyložit pojem primitivní funkce, pojem Riemannova integrálu a jejich souvislosti;
- V) Umět použít vztahy a výsledky zde v textu uvedené, definovat a vysvětlit pojmy a veličiny.
- VI) Samostatně řešit příklady řešené v tomto textu.

1.4.1 Derivace skalární funkce

Fyzikální veličiny — skalární i vektorové — se při fyzikálních a technických dějích (obecně) mění. Např. při běhu pístového motoru se ve válci mění objem plynu, jeho tlak i teplota. Vzájemná souvislost libovolných dvou veličin z p, V, T, t (kde t jsme označili čas) může být ve většině případů znázorněna graficky. Např. v obr. 1.16 je křivkou c znázorněna závislost tlaku p na čase t , tj. funkce $p(t)$. Přitom předpokládáme, že veličiny jsou udány v hlavních jednotkách SI, tj. p v pascálech a t v sekundách.



Obr. 1.16: Geometrický význam derivace skalární funkce. Příklad závislosti tlaku p na čase t , která je popsána křivkou c . V bodě P_0 je ke křivce c sestrojena tečna T , vyjadřující graf lineární závislosti na čase (tj. popsána lineární funkcí času) $g(t)$.

{obr1.1-15}

Většinu funkcí, jimiž jsou vyjádřeny souvislosti fyzikálních veličin při technických dějích, lze znázornit křivkami sestávajícími z úseků, k nimž lze sestrojít v každém jejich bodě tečnu a tato tečna mění při postupu dotykového bodu po křivce svůj směr plynule. Takové úseky se nazývají hladké křivky.

Pro posouzení průběhu děje znázorněného křivkou c v obr. 1.16 v některém čase t_0 není důležitá jen hodnota funkce $p(t_0)$, kterou označíme p_0 , nýbrž i to, jaký má funkce $p(t)$ průběh v časech blízkých k t_0 — zda a jak rychle stoupá nebo klesá s měnícím se t . Předpokládejme, že křivka c je hladká a veďme k ní v bodě $P_0(t_0, p_0)$ tečnu (T v obr. 1.16). Tato tečna má stejný sklon jako křivka c v bodě P_0 . Tečnou T je znázorněna lineární funkce času, kterou označíme např. $g(t)$. Její analytické vyjádření je

$$\{1.1-11\} \quad g(t) = g(t_0) + K(t - t_0), \quad \text{kde } g(t_0) = p_0 \quad (1.11)$$

{ram-4}

a kde K je jistá konstanta. Tato konstanta K se nazývá derivace funkce $p(t)$ v čase t_0 (nebo v bodě t_0). Značí se obvykle $\dot{p}(t_0)$ nebo symbolem $\frac{dp(t_0)}{dt}$, tj. $K = \dot{p}(t_0)$. Na základě vztahu (1.11) můžeme pro $t \neq t_0$ psát

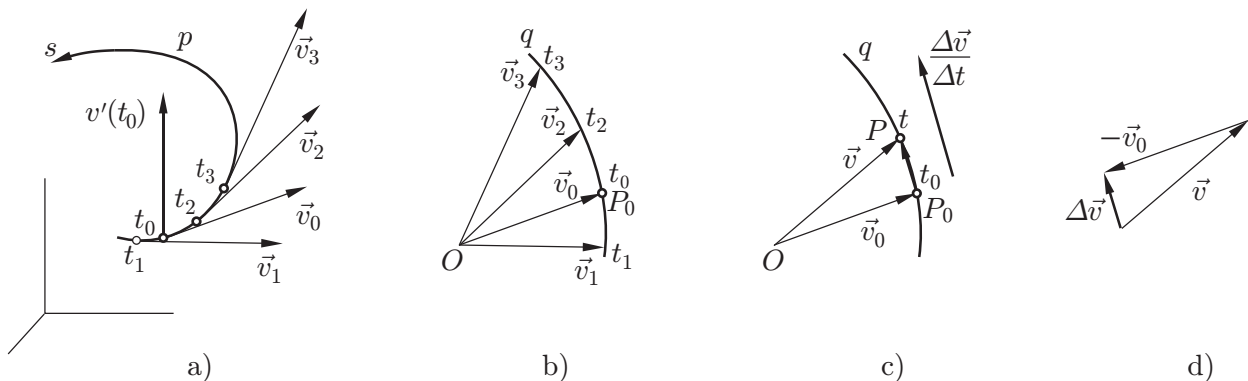
$$\{1.1-12\} \quad \dot{p}(t_0) = \left[\frac{dp(t_0)}{dt} \right] = \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta g}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Zde je $\Delta g = (g - g_0)$ konečný přírůstek lineární funkce $g(t)$, rovnice (1.11), znázorněné tečnou T , odpovídající nenulovému, jinak však libovolně velkému přírůstku času $\Delta t = t - t_0$. Přírůstek Δt se značí obvykle dt , tj. $dt = \Delta t$, přírůstek Δg v bodě t_0 se značí dp_0 nebo $dp(t_0)$. Veličiny dt a dp_0 se nazývají diferenciály v čase t_0 . Přitom dt je diferenciál nezávisle proměnné t a dp_0 je diferenciál funkce $p(t)$. Derivace $\frac{dp(t_0)}{dt} = \dot{p}(t_0)$ a diferenciály dt, dp_0 souvisí vztahem

$$\{1.1-13\} \quad dp_0 = \dot{p}(t_0)dt. \quad (1.13)$$

Geometrický význam derivace $\frac{dp(t_0)}{dt}$ je zřejmý z obr. 1.16: její číselná hodnota $\left\{ \frac{dp(t_0)}{dt} \right\}$ je rovna tangenti úhlu α , který svírá tečna T s osou Ot , tj. směrnici přímky T :

$$\{1.1-14\} \quad \left\{ \frac{dp(t_0)}{dt} \right\} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.14)$$



Obr. 1.17: Geometrický význam derivace vektorové funkce. Okamžitá rychlost kosmické sondy \vec{v} a průměrná změna rychlosti v časovém intervalu Δt , tj. $\Delta\vec{v}/\Delta t$.

{obr1.1-16}

Závislost p na t , vyjádřená funkcí $p(t)$ a znázorněná křivkou C , není lineární. Je však zřejmé, že pro t blízké k t_0 , tj. pro $|\Delta t| \ll 1$, lze funkci $p(t)$ přibližně nahradit lineární funkcí $g(t)$, danou vztahem (1.11) a znázorněnou tečnou T , a to tím lépe, čím je $|\Delta t|$ menší. Tedy křivku C nahradíme v okolí bodu P_0 tečnou T , takže přibližně platí

$$\{1.1-15\} \quad p(t) \doteq p_0 + \frac{dp(t_0)}{dt}(t - t_0). \quad (1.15)$$

Z uvedeného plyne, že derivaci $\frac{dp(t_0)}{dt}$ lze získat také tímto limitním procesem: Utvoříme podíl $\Delta p/\Delta t$, pro který z obr. 1.16 plyne

$$\{\Delta p/\Delta t\} = \operatorname{tg} \beta.$$

1.4. DERIVACE A INTEGRÁLY

Zmenšujeme $|\Delta t|$ tak, že $t \rightarrow t_0$. Pak konverguje (blíží se): bod $P \rightarrow P_0$, úhel $\beta \rightarrow \alpha$, podíl $\Delta p/\Delta t \rightarrow \Delta g/\Delta t = \frac{dp(t_0)}{dt}$. Tedy

$$\{1.1-16\} \quad \dot{p}(t_0) = \frac{dp(t_0)}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{p - p_0}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \text{definice derivace skalární funkce v bodě } t_0 \quad (1.16)$$

{ram-5}

To je vlastní definiční vztah pro derivaci funkce $p(t)$ v bodě t_0 . Je velmi užitečný z hlediska určování derivací konkrétních funkcí jakožto limit, k vyšetřování jejich vlastností i k odvozování pravidel pro výpočet derivací.

Derivace funkce $p(t)$ v bodě t_0 , tedy $\frac{dp(t_0)}{dt}$, závisí na tom, jak jsme zvolili t_0 . Jestliže každému t , v němž má funkce $p(t)$ derivaci, přiřadíme tuto derivaci, definuje toto přiřazení novou funkci proměnné t . Tato funkce se označuje $\dot{p}(t)$ a nazývá se derivace funkce $p(t)$ podle času.

Důležitá informace: Z hlediska využití derivací ve fyzikálních a technických dějích je nejdůležitější tento jednoduchý vztah, který plyne z (1.16) pro malé hodnoty veličiny $|\Delta t|$:

$$\{1.1-17\} \quad \Delta p \doteq \frac{dp(t_0)}{dt} \Delta t = \frac{dp(t_0)}{dt} dt = dp_0. \quad \text{přibližná hodnota přírůstku } \Delta p \quad (1.17)$$

{ram-6}

Umožňuje nahradit přibližně přírůstek Δp funkce $p(t)$ odpovídajícím přírůstkem Δt nezávisle proměnné t v okolí bodu t_0 jejím diferenciálem $\dot{p}(t_0)dt$.

{pr1.1-5}

KP 1.4-1 —————

Hrana krychle o délce $l_0 = 2$ m se zahřátím prodlouží na $l = 2,003$ m. Určete zvětšení objemu krychle.

Řešení:

Objem V je funkcí délky hrany l : $V = l^3$. Označíme ji $V(l)$. Přírůstek této funkce v bodě l_0 , odpovídající přírůstku $\Delta l = 0,003$ m, je podle (1.17) přibližně roven

$$\Delta V \doteq V'(l_0)\Delta l = 3l_0^2\Delta l = 3 \cdot 4 \cdot 0,003 \text{ m}^3 = 0,036 \text{ m}^3.$$

Užili jsme vztah $(x^3)' = 3x^2$, ve kterém jsem symbolem $'$ označili derivaci funkce podle x .

Informace:

1. Derivace $\frac{dp(t)}{dt}$ funkce $p(t)$ je nová fyzikální veličina. Její jednotkou je $\left[\frac{dp(t)}{dt}\right] = [p]/[t]$. Veličina t se nazývá argument funkce $p(t)$. Po derivaci $\frac{dp(t)}{dt}$ se užívá také názvu (první) derivace funkce $p(t)$ podle t .
2. Z definičního vztahu (1.16) plynou (zde bez důkazu) pro často se vyskytující funkce $f(x)$ tyto vztahy

$$\begin{aligned} f(x) = x^\alpha, \alpha \in (-\infty, \infty) &\rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}; \quad \text{pro } \alpha = 0 : f(x) = 1 \rightarrow f'(x) = 0. \\ f(x) = e^x &\rightarrow f'(x) = e^x, \\ f(x) = \sin x &\rightarrow f'(x) = \cos x, \\ f(x) = \cos x &\rightarrow f'(x) = -\sin x. \end{aligned}$$

{1.1-18}

(1.18)

1.4. DERIVACE A INTEGRÁLY

Dále jsou-li A_1, A_2 konstanty a $f_1(x), f_2(x)$ funkce, které mají derivaci:

{1.1-19}

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) \rightarrow f'(x) = A_1 f_1'(x) + A_2 f_2'(x), \\ f(x) &= f_1(x) \cdot f_2(x) \rightarrow f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x), \\ f(x) &= \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{f_2^2(x)}, \quad (\text{ale } f_2(x) \neq 0), \\ f(x) &= f_1(kx), k = \text{konst.} \rightarrow f'(x) = k \cdot \frac{df_1(y)}{dy}, \quad \text{kde } y = kx. \end{aligned} \quad (1.19)$$

3. Derivace funkce $f'(x)$, tj. derivace derivace funkce $f(x)$ se značí

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

a nazývá se druhá derivace funkce $f(x)$. Podobně $f'''(x)$ atd. Derivace $f'(x)$ se pak pro určitost nazývá „první derivace“.

Derivace funkce $f(t)$ podle času, tj. výraz

$$\frac{df(t)}{dt},$$

se ve fyzice a technice často značí zkráceně $\dot{f}(t)$. Podobně pro derivace vyšších řádů podle času píšeme $\ddot{f}(t), \dots$, kde počet teček nad funkcí odpovídá řádu derivace.

1.4.2 Vektorová funkce a její derivace

1.4.2.1 Vektorová funkce

Podobně jako o skalárních funkcích lze uvažovat o vektorových funkcích a o jejich derivacích. Co je to vektorová funkce ukážeme na příkladě:

Uvažujme např. o pohybu kosmické sondy, jejíž trajektorie (v geometrické vztažné soustavě) je zakreslena v obr. 1.17a. Rychlost sondy \vec{v} se při pohybu mění: v každém čase (určitém intervalu časů) má určitou hodnotu, tj. je funkcí času: $\vec{v} = \vec{v}(t)$. Analogicky lze uvažovat o závislosti rychlosti \vec{v} na dráhové souřadnici (dráze) s , tj. o funkci $\vec{v} = \vec{v}(s)$. Funkce $\vec{v}(t), \vec{v}(s)$ jsou vektorové funkce skalárních argumentů t, s .

Grafické znázornění vektorových funkcí je většinou obtížné a méně názorné než znázornění funkcí skalárních. Lze je provést např. takto: Všechny vektory \vec{v} , jež měla sonda, umístíme do jednoho bodu (obr. 1.17b). Koncové body vektorů \vec{v} vytvoří jistou křivku q . Ke každému bodu této křivky napíšeme čas, v němž měla sonda příslušnou rychlost. Tím dostaneme jisté, ovšem ne příliš dokonalé znázornění funkce $\vec{v}(t)$. Analogicky můžeme znázornit funkci $\vec{v}(s)$ tak, že připišeme ke každému bodu křivky q příslušnou dráhu s . Podobně lze znázornit většinu vektorových funkcí skalárních argumentů vyskytujících se ve fyzice i technické praxi.

1.4.2.2 Derivace vektorové funkce

Budeme uvažovat o funkci $\vec{v}(t)$ znázorněné na obr. 1.17b. Budeme přitom předpokládat, že křivka q (tj. křivka spojující koncové body vektorů $\vec{v}(t)$ pro různá t) je hladká. Než budeme definovat derivaci funkce $\vec{v}(t)$, připomeňme, že derivace $\dot{p}(t_0)$ funkce $p(t)$ v bodě t_0 je definována v podstatě jako limitní podíl malého přírůstku funkce $p(t)$ (tj. Δp) a malého přírůstku Δt nezávisle proměnné t , ve kterém se Δt blíží k 0 (viz rovnice (1.16)).

Podobně se definuje i derivace vektorové funkce $\vec{v}(t)$ podle času v čase t_0 :

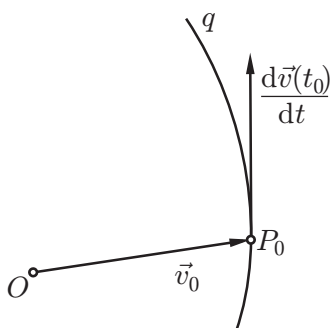
1.4. DERIVACE A INTEGRÁLY

V čase t_0 nechť má vektorová funkce $\vec{v}(t)$ jistou hodnotu \vec{v}_0 . V čase $t (> t_0)$ ne příliš odlišném od t_0 nechť má hodnotu \vec{v} . Během časového intervalu (t_0, t) délky $\Delta t = t - t_0$ se rychlost změnila z \vec{v}_0 na \vec{v} (obr. 1.17c), tj. vztahem $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ (obr. 1.17d).

V dalším utvoříme vektorovou veličinu $\Delta\vec{v}/\Delta t$. Tento vektor má stejný směr jako vektor $\Delta\vec{v}$, neboť $\Delta t > 0$, viz obr. 1.17c. Nyní zvolíme t bližší k t_0 , utvoříme opět $\Delta\vec{v}/\Delta t$ a tento postup opakujeme. Přesněji: Provedeme limitní operaci — zmenšujeme Δt tak, že $t \rightarrow t_0$. Přitom $P \rightarrow P_0$, $\Delta\vec{v} \rightarrow \vec{0}$ (obr. 1.17c). Tvoříme stále podíly $\Delta\vec{v}/\Delta t$. Jejich limitní hodnota se nazývá derivace funkce $\vec{v}(t)$ podle času v čase t_0 a označuje se $\dot{\vec{v}}(t_0)$ nebo $\frac{d\vec{v}(t_0)}{dt}$. Tedy

$$\{1.1-20\} \quad \dot{\vec{v}}(t_0) = \frac{d\vec{v}(t_0)}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad \text{definice derivace vektorové funkce} \quad (1.20)$$

{ram-7}



Obr. 1.18: Vektor $\dot{\vec{v}}(t_0)$ má směr tečny ke křivce q .

{obr1.1-17}

Informace:

1. Z hlediska definičního vztahu (1.20) a z obr. 1.17c plyne, že vektor $\dot{\vec{v}}(t_0)$ má směr tečny ke křivce q (obr. 1.18). Má tedy jiný směr než \vec{v}_0 .
2. Derivace $\dot{\vec{v}}(t_0)$ funkce $\vec{v}(t)$ závisí na volbě t_0 . Označíme-li, podobně jako u derivace skalární funkce, čas, v němž je vytvořena derivace, symbolem t , můžeme definovat (novou) vektorovou funkci času, tj. $\vec{v} = \vec{v}(t)$.
3. Derivace $\dot{\vec{v}}$ je nová fyzikální veličina. V našem případě, kdy derivujeme rychlost $\vec{v}(t)$ podle času, nazývá se $\dot{\vec{v}}(t)$ zrychlením. Zcela analogicky lze derivovat i funkci $\vec{v}(s)$ podle s a získat vektorovou funkci $\vec{v}'(s)$. Podobně lze derivovat libovolnou vektorovou funkci $\vec{f}'(x)$. Tyto funkce obecně nemají zvláštní název. Jejich jednotky jsou $[\vec{f}'] = [\vec{f}]/[x]$. Pro derivace vektorových funkcí platí pravidla analogická pravidlům (1.19).

1.4.3 Integrál skalární funkce

Integrálem funkce $f(x)$ se souhrnně nazývá několik matematických objektů. Z hlediska aplikací na naší úrovni jsou nejdůležitější tyto integrály:

1. Primitivní funkce k dané funkci $f(x)$ (tzv. neurčitý integrál funkce $f(x)$),
2. Riemannův integrál funkce $f(x)$ (tzv. určitý integrál funkce $f(x)$).

1.4. DERIVACE A INTEGRÁLY

1.4.3.1 Primitivní funkce

Primitivní funkce k funkci $f(x)$ je, podle definice, taková funkce $F(x)$, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$. Je to funkce, jejíž derivací je funkce $f(x)$.

Příklad: $\{f(x) = x^n, n \neq -1\} \rightarrow F(x) = x^{n+1}/n + 1 + C$, kde C je libovolná konstanta. Skutečně:

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \frac{dx^{n+1}}{dx} + \frac{dC}{dx} = \frac{1}{n+1} x^n + 0 = x^n = f(x).$$

Primitivní funkce k funkci $f(x)$ se obvykle značí symbolem

$$\int f(x)dx,$$

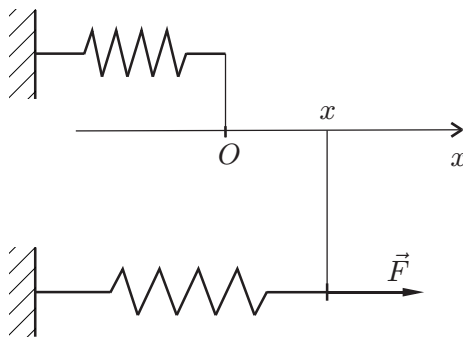
my ji však budeme značit symbolem $F'(x)$. Tedy např.: $f(x) = x \rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + C$.

Je-li $f(x)$ funkce udávající fyzikální veličinu, udává funkce $F(x)$ jinou fyzikální veličinu. Jejich jednotky jsou dány vztahem $[F(x)] = [f][x]$.

1.4.3.2 Riemannův integrál

K definici Riemannova integrálu dospějeme při řešení úloh tohoto typu: Určete práci W , kterou je nutno vykonat k protažení pružiny o tuhosti k a o původní délce l (v nezátženém stavu) na délku $l' = l + \Delta l$.

Tuto úlohu nelze řešit přímým užitím známého vztahu pro práci $W = Fs \cos \alpha$, neboť při protahování pružiny není síla, kterou je nutno na ni působit, konstantní, nýbrž roste s protažením, mění se. Zavedeme-li osu Ox podle obr. 1.19, je síla \vec{F} i její průmět F_x do osy Ox funkcí protažení (resp. stlačení) x . Označíme $f(x) = F_x(x)$. Tato funkce je při nepříliš velkých změnách délky pružiny lineární (obr. 1.20), platí $f(x) = kx$, kde k je tzv. tuhost pružiny $[k] = N/m$.



Obr. 1.19: Síla \vec{F} (i její průmět do osy Ox) protahující pružinu je funkcí protažení (resp. stlačení) x .

{obr1.1-18}

Práci proměnné síly F_x určíme takto: Rozdělíme interval $(0, \Delta l)$, v němž počítáme práci, na malé intervaly, tak malé, že veličina $F_x = f(x)$ je v každém z nich téměř konstantní. Vybereme-li jeden z nich, např. $(x, x + \Delta x)$ (obr. 1.20), pak práce, kterou vykoná síla \vec{F} při protahování pružiny v tomto malém intervalu, je přibližně

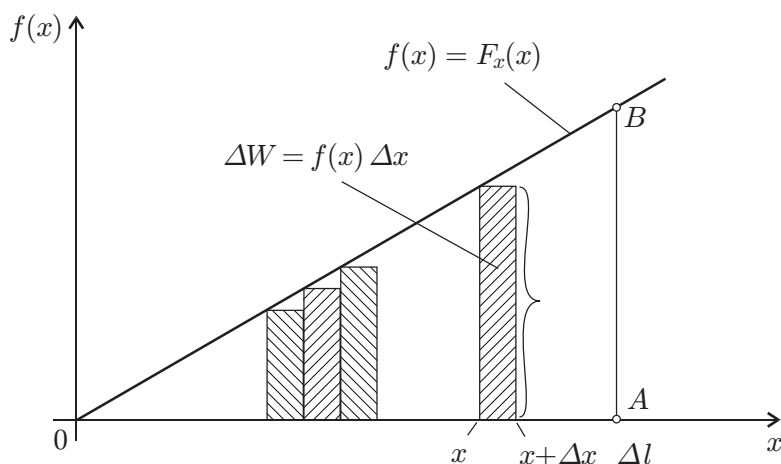
$$\Delta W \doteq F_x \Delta x = f(x) \Delta x = kx \Delta x.$$

Tato tzv. elementární práce je číselně rovna plošnému obsahu úzkého obdélníka o základně Δx a výšce $f(x)$, vyšrafovaného v obr. 1.20. Celková práce síly \vec{F} při protažení pružiny ze stavu $x = 0$ do stavu $x = \Delta l$ je přibližně rovna součtu těchto elementárních prací, tj.

{1.1-21}

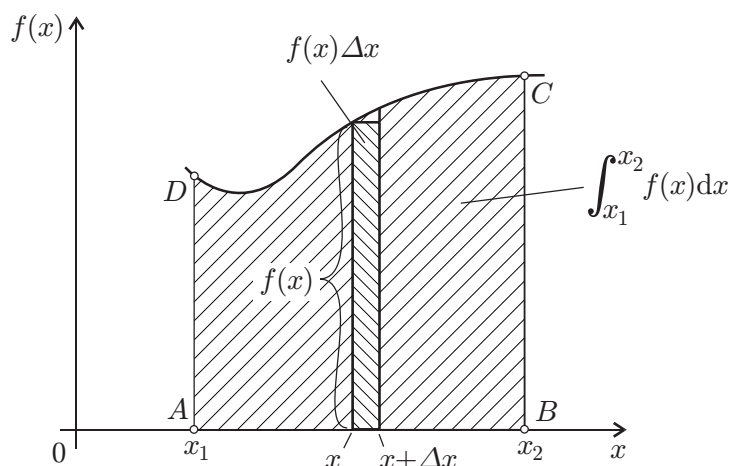
$$W \doteq \sum \Delta W = \sum f(x) \Delta x, \quad (1.21)$$

1.4. DERIVACE A INTEGRÁLY



Obr. 1.20: Geometrický význam elementární práce ΔW při protažení pružiny z délky x na délku $x + \Delta x$.

{obr1.1-19}



Obr. 1.21: Geometrický význam Riemannova integrálu obecné funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$.

{obr1.1-20}

tj. číselně je rovna součtu obsahů všech takových proužků v celém intervalu $\langle 0, \Delta l \rangle$. Součet na pravé straně se nerovná práci W přesně, protože v intervalu $\langle x, x + \Delta x \rangle$ se $f(x)$ přece jen trochu mění.

Je zřejmé, že součet na pravé straně vztahu (1.21) se liší od W tím méně, čím je dělení intervalu $\langle 0, \Delta l \rangle$ jemnější, tj. čím jsou elementární intervaly $\langle x, x + \Delta x \rangle$ menší. Zjemňujeme tedy dělení tak, že $\Delta x \rightarrow 0$ (přičemž počet elementárních intervalů roste nade všechny meze) a tvoříme součty typu (1.21). Limita posloupnosti těchto součtů se nazývá Riemannův integrál funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0, \Delta l \rangle$ a značí se symbolem

$$\{1.1-22\} \quad \int_0^{\Delta l} f(x) dx. \quad (1.22)$$

Je tedy

$$\{1.1-23\} \quad W = \int_0^{\Delta l} F_x(x) dx = \int_0^{\Delta l} f(x) dx = \int_0^{\Delta l} kx dx. \quad (1.23)$$

1.4. DERIVACE A INTEGRÁLY

Z obr. 1.20 je zřejmé, že W je číselně rovno plošnému obsahu trojúhelníka OAB , tedy

$$\{1.1-24\} \quad W = \frac{1}{2}\Delta l|AB| = \frac{1}{2}\Delta l \cdot k\Delta l = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \quad (1.24)$$

Obecně je Riemannův integrál obecné funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ definován jako limita posloupnosti součtů typu (1.21), viz obr. 1.21. Číselně je roven plošnému obsahu obrazce $ABCD$ ležícího pod křivkou znázorňující funkci $f(x)$ v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, obr. 1.21. Značí se

$$\{1.1-25\} \quad I(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \quad (1.25)$$

Symbolu \int se užívá proto, že je to limita součtů (součet se značí \sum). Sčítají se výrazy typu $f(x)\Delta x$, z nichž každý je (přibližně) číselně roven plošnému obsahu hustě šrafovaného proužku v obr. 1.21. Krajní body integračního intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ se nazývají dolní mez (x_1) a horní mez (x_2) integrálu (1.25). Veličina x se nazývá integrační proměnná. Jsou-li $f(x)$ a x fyzikální veličiny, platí pro jejich jednotky $[I] = [f][x]$.

1.4.3.3 Konkrétní výpočet integrálu (1.25)

Uvedeme dva užívané způsoby.

1. Integrál (1.15) každé funkce $f(x)$, pro niž tento integrál existuje, lze určit buď graficky (plošný obsah plochy, dělalo se dříve) nebo číselně s užitím počítačů, většinou přímo na základě definice jako limitu součtů typu (1.21).
2. Pro ty funkce $f(x)$, pro něž lze nalézt jejich primitivní funkci $F(x)$, se užívá k výpočtu Riemannova integrálu (1.25) výsledku, který uvedeme v dalším textu.

a) Vztah mezi Riemannovým integrálem a primitivní funkcí

(Tato část je z hlediska konkrétních výpočtů mimořádně důležitá). Uvažujme o funkci $f(x)$ a utvořme její Riemannův integrál v mezích $t_1 = 0, t_2 = x$ (obr. 1.22):

$$\{1.1-26\} \quad I(x) = I(0, x) = \int_0^x f(t)dt. \quad (1.26)$$

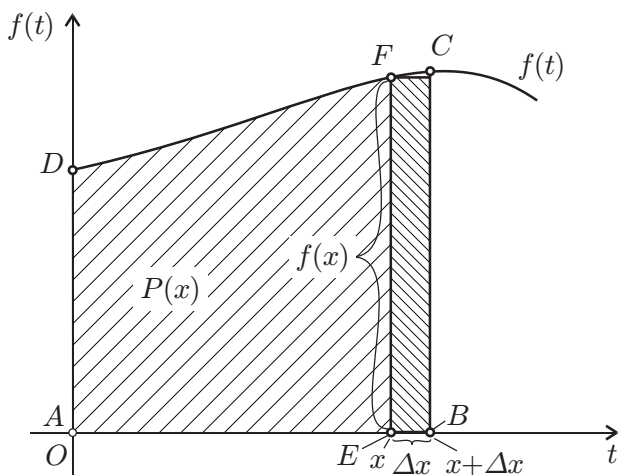
Nechť dolní mez je pevné ($t_1 = 0$) a horní nechť se mění. Integrál (1.26), tj. plošný obsah vyšrafované plochy v obr. 1.22, je pak funkcí své horní meze x . Budeme jej nadále značit $I(x) = P(x)$. Dokážeme, že derivací této funkce je funkce $f(x)$, tj. že platí $I'(x) = f(x)$ a že naopak je $I(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$, tj. $I(x) = F(x)$.

Důkaz: Volme nějaké x , poté k němu blízké $(x + \Delta x)$, dále utvořme rozdíl

$$I(x + \Delta x) - I(x) = P(x + \Delta x) - P(x) = \int_0^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt.$$

Tento výraz je roven rozdílu plošného obsahu obsahu obrazce $ABCD$ a řídce šrafovaného obrazce $Aefd$, tj. obsah hustě šrafovaného proužku $EBCF$. Obsah tohoto proužku však je přibližně $f(x)\Delta x$, tedy

$$I(x + \Delta x) - I(x) = f(x)\Delta x \Rightarrow f(x) = \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x}.$$



Obr. 1.22: Geometrický význam Riemannova integrálu obecné funkce $f(t)$ v intervalu $\langle t_1 = 0, t_2 = x \rangle$.

{obr1.1-21}

V limitě $\Delta x \rightarrow 0$ dostáváme

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = I'(x) = \frac{dI(x)}{dx}.$$

Tedy: Derivací funkce $I(x)$ dané vztahem (1.26), je funkce $f(x)$. Naopak platí $F(x) = I(x)$. Tedy

{1.1-27}

$$I'(x) = f(x), F(x) = I(x). \quad (1.27)$$

- b) Výpočet integrálu $I(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, tj. určení plošného obsahu obrazce $ABCD$ v obr. 1.23. Poznamenejme, že namísto označení t v symbolu pro integrál jsme zavedli označení x . Tato veličina se nazývá, jak jsme uvedli, integrační proměnná, na jejím označení výsledek nezávisí, musí však být označena jinak než meze integrálu.

Ze vztahu (1.26), z obr. 1.22 a 1.23 a ze vztahu (1.27) plyne

{1.1-28}

$$I(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_0^{x_2} f(x)dx - \int_0^{x_1} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1), \quad (1.28)$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$.

To je hledaný, velmi důležitý a užitečný výsledek. Zdůrazněme jej: Integrál z funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ je roven rozdílu hodnot její primitivní funkce $F(x)$ v horní mezi x_2 a dolní mezi x_1 . K určení integrálu $I(x_1, x_2)$ z funkce $f(x)$ tedy stačí v podstatě najít primitivní funkci k funkci $f(x)$.

{pr1.1-6}

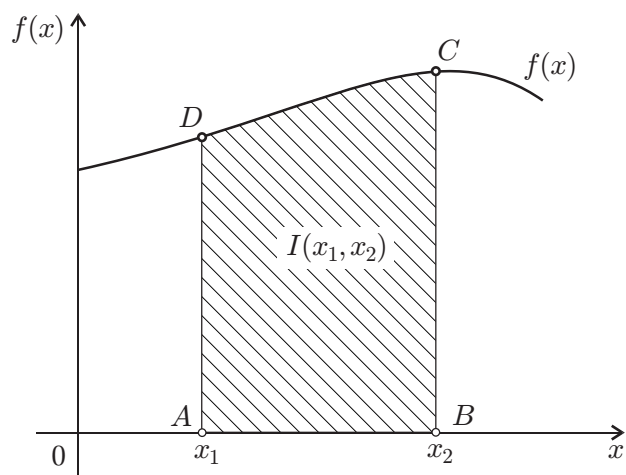
KP 1.4-2

Určete integrál $I = \int_0^{\Delta l} kx dx$.

Řešení:

Primitivní funkce k funkci $f(x) = kx$ je funkce $F(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$, kde C je libovolná (integrační) konstanta. Ze vztahu (1.28) plyne

$$I = F(\Delta l) - F(0) = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 - 0 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2.$$



Obr. 1.23: K výpočtu integrálu $I(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$.

{obr1.1-22}

srovnejte s výsledkem (1.24).

Poznámka: Výsledek výpočtu nezávisí na integrační konstantě C , která se při tvoření rozdílu $F(x_2) - F(x_1)$ zruší. Je ji tedy možno volit libovolně, např. rovnu nule.

2. Pohyb částice a hmotné soustavy v silových polích

{1{2.2}}

Tato poměrně rozsáhlá část obsahuje výklad nerelativistické mechaniky, tj. rozbor mechanických pohybů těles pohybujících se nerelativistickými rychlostmi (rychlostmi mnohem menšími než je rychlost světla ve vakuu, $v \ll c$).

Nerelativistická mechanika je zvláštním (limitním) případem relativistické mechaniky, zabývající se i pohybem těles s rychlostmi srovnatelnými s rychlostí světla ve vakuu. Strojní inženýr se většinou setkává s nerelativistickými rychlostmi, proto část 1 má mnohem větší rozsah než část 2, obsahující výklad teorie relativity. Některé výsledky teorie relativity však uvedeme i zde.

V celém dalším výkladu této kapitoly budeme předpokládat, že pohyby těles jsou nerelativistické, tj. pomalé ve srovnání s rychlostí světla ve vakuu ($v \ll c$). Výjimky výslovně uvedeme.

Mechanika se zabývá studiem nejjednoduššího pohybu látek — jejich přemísťování. Zde se budeme zabývat jen mechanikou těles, nikoliv mechanikou tekutin. Velká část zákonitostí, jež budeme studovat, platí však zcela obecně. Při studiu pohybu těles se nebudeme zabývat jejich vnitřní strukturou, chemickým složením atd., budeme studovat jen ty vlastnosti těles, které na jejich vnitřní struktuře nezávisí.

Jestliže se tělesa dotýkají, působí na sebe — částečně se deformují a mění pohyb. Takové vzájemné působení se nazývá silové působení a je charakterizováno fyzikální veličinou síla. Typické síly jsou: síla tření, síla odporu vzduchu, síla, kterou působí ložisko na hřídel, plyn na píst atd. Těmto silám se obvykle říká mechanické síly, aby se odlišily od sil elektromagnetických. Ovšem síly, kterými takto na sebe tělesa působí, jsou výslednicemi sil, kterými na sebe navzájem působí obrovské počty jejich molekul v místě styku. Tyto síly jsou většinou původu elektromagnetického. Název „mechanické síly“ je poněkud problematický.

Podle současných poznatků lze síly, kterými na sebe působí jakékoliv objekty, makroskopické, mikroskopické i submikroskopické, redukovat na čtyři typy vzájemného působení, neboli interakcí. Uvedeme je v pořadí mohutnosti.

Interakce (mocninou je dána relativní mohutnost vzhledem k silné interakci),

1. silná, 10^0 . Vzájemné působení nukleonů — protonů a neutronů;
2. elektromagnetická, 10^{-2} . Vzájemné působení všech elektricky nabitých objektů;
3. slabá, 10^{-5} . Vzájemné působení některých elementárních částic;
4. gravitační, 10^{-38} . Nesmírně slabá ve srovnání s ostatními interakcemi. Uplatňuje se tam, kde se interakcí zúčastňují objekty s velkou hmotností.



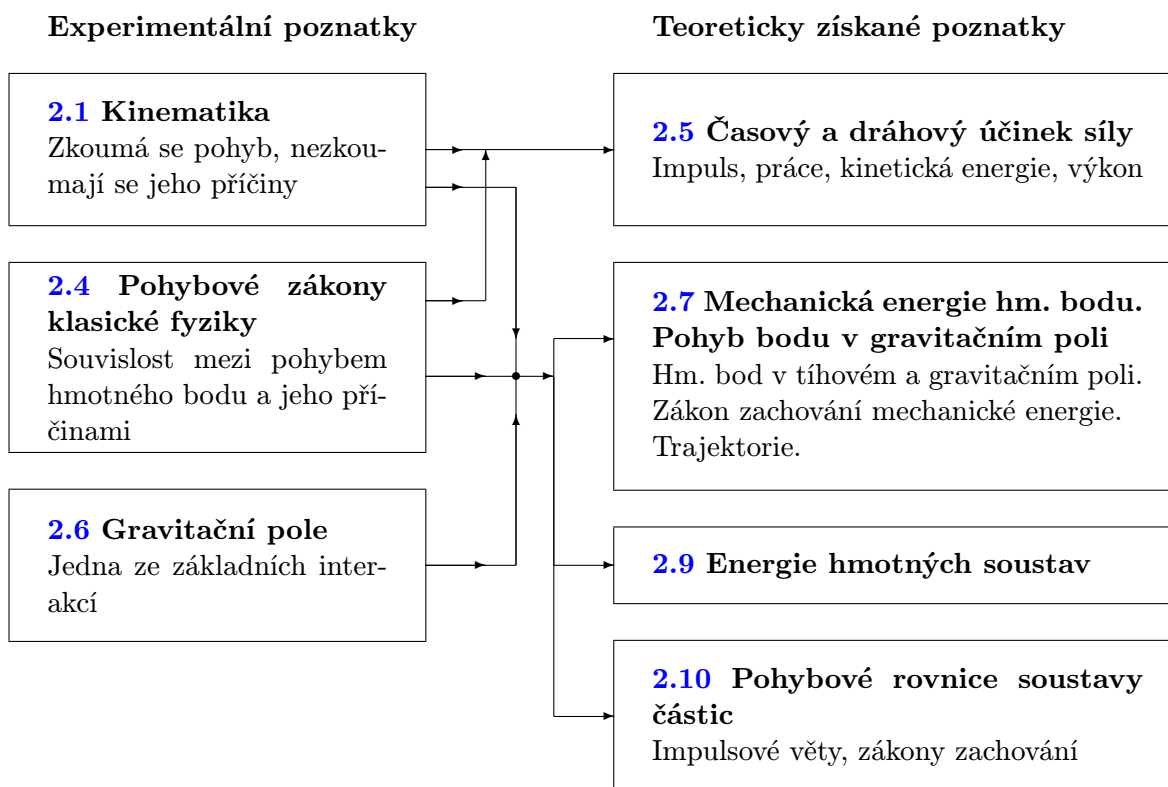
V obsahu je uveden přehled témat části 2. Její struktura je znázorněna v diagramu na obr. 2.1.

2.1 Kinematika

{Kinematika}

Kinematika se zabývá popisem a zkoumáním mechanických pohybů, nezabývá se příčinami pohybů. V části 2.2 budou uvedeny základní pojmy a veličiny kinematiky hmotného bodu: hmotný bod, polohový vektor, trajektorie, rychlost, zrychlení. Jednoduché

2.1. KINEMATIKA



{schema} Obr. 2.1: Pohyb částice a hmotné soustavy v silovém poli

typy pohybů: pohyb rovnoměrný a rovnoměrný proměnný. Část 2.3 obsahuje rozbor rotačního a translačního pohybu tuhého tělesa.

Cíl: I) Definovat a vysvětlit vlastnosti pojmů a veličin: hmotný bod, polohový vektor, trajektorie;

II) Definovat veličiny: rychlost, dráhová rychlost, zrychlení. Vysvětlit jejich vlastnosti, umět je určit při daném pohybu;

III) Vysvětlit obecné vlastnosti zrychlení při křivočarém pohybu, umět zrychlení určit;

IV) Vyšetřit pohyb rovnoměrný a rovnoměrný proměnný;

V) Definovat, vysvětlit a užít veličiny charakterizující rotační pohyb tuhého tělesa: úhlová dráha, úhlová rychlost, úhlové zrychlení;

VI) Vyšetřit otáčivý pohyb rovnoměrný a rovnoměrně proměnný;

VII) Definovat posuvný pohyb, vysvětlit jeho vlastnosti;

VIII) Umět z paměti vztahy a zákony uvedené zvýrazněně, vyložit pojmy a veličiny podtržené plnou čarou v tomto textu;

IX) Řešit samostatně příklady řešené v tomto textu, zdůvodnit, nakreslit náčrtky;

X) Řešit příklady typu [KP 1.2-7](#), [KP 1.2-1](#), [KP 1.2-10](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.2-4](#) až [KP 2.2-8](#).

2.2 Kinematika hmotného bodu

2.2.1 Polohový vektor \vec{r} . Rychlost \vec{v}

2.2.1.1 Hmotný bod

Definice: Hmotný bod je těleso o hmotnosti m , jehož tvar a rozměry nejsou při uvažovaném ději podstatné.

Poloha hmotného bodu v soustavě souřadnic $Oxyz$ je určena třemi souřadnicemi x, y, z .

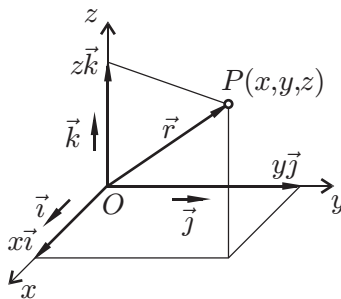
2.2.1.2 Polohový vektor \vec{r}

Polohovým vektorem hmotného bodu, který je v bodě $P(x, y, z)$, je podle definice vektor \vec{OP} (obr. 2.2). Značí se \vec{r} . Jeho průměty do os Ox, Oy, Oz , tj. jeho souřadnice, jsou x, y, z . Jeho složky jsou $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$, jeho semikartézské vyjádření (viz rovnice (1.4)) je

$$\{1.2-1\} \quad \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad \text{polohový vektor} \quad (2.1)$$

{ram-8}

Platí $[r] = \text{metr.}$



{obr1.2-1} Obr. 2.2: Poloha bodu P je dána jeho polohovým vektorem $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$.

2.2.1.3 Trajektorie hmotného bodu

V určité vztažné soustavě je množina bodů, kterými prochází pohybující se hmotný bod. Trajektorie hmotného bodu, který je v klidu, je bod. Tvar trajektorie závisí na vztažné soustavě, ve které je pohyb hmotného bodu zkoumán. V tomto smyslu je pohyb relativní. Např. trajektorie hmotného bodu puštěného volně ve vagonu rovnoměrně jedoucím po přímých kolejích je:

1. ve vztažné soustavě dané vagonem je trajektorií svislá přímka,
2. ve vztažné soustavě dané povrchem Země: parabola,
3. ve vztažné soustavě spojené s hmotným bodem: bod.

Při pohybu hmotného bodu v soustavě souřadnic $Oxyz$ jsou jeho souřadnice x, y, z jistými funkcemi času, např.

$$x(t) = At + B, \quad y(t) = C \sin \omega t, \quad z(t) = Dt^3 - E.$$

Tato trojice funkcí vyjadřuje trajektorii v parametrickém tvaru (parametrem je čas t). Tutěž trajektorii lze vyjádřit vektorovou funkcí $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = (At + B)\vec{i} + C \sin \omega t \vec{j} + (Dt^3 - E)\vec{k}.$$

2.2. KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

Obecně lze psát

$$\{1.2-2\} \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (2.2)$$

kde $x(t), y(t), z(t)$ jsou jisté funkce času. Tento vztah se někdy nazývá rovnice trajektorie.

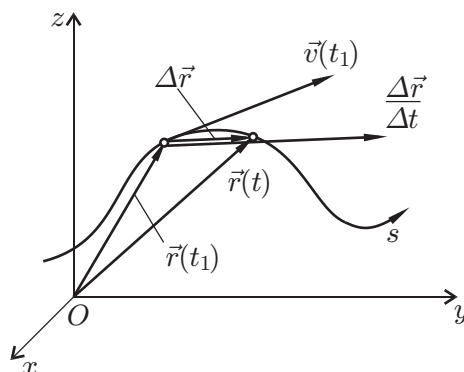
2.2.1.4 Rychlost hmotného bodu \vec{v}

Uvažujme o pohybu hmotného bodu popsaném funkcí $\vec{r}(t)$, danou např. ve tvaru (2.2). Trajektorie hmotného bodu je v obr. 2.3 označena s . Rychlost hmotného bodu v čase t_1 (nebo v bodě P_1 , v němž je hmotný bod v čase t_1) je vektorová veličina, která charakterizuje časovou změnu polohového vektoru \vec{r} v čase t_1 . Značíme ji $\vec{v}(t_1)$. Je definována jako derivace vektorové funkce \vec{r} podle času v čase t_1 (viz rovnice (1.20)), tedy



$$\{1.2-3\} \quad \vec{v}(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_1)}{t - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t_1)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t_1). \quad (2.3)$$

Leží v tečně k trajektorii v bodě P_1 . Udává směr pohybu hmotného bodu v čase t_1 . Jednotka $[\vec{v}] = \text{m/s}$.



Obr. 2.3: Okamžitá rychlost $\vec{v}(t)$ hmotného bodu v čase t_1 je dána vztahem

{obr1.2-2}

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t_1)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t_1).$$

Vektor $\vec{v}(t_1)$ závisí (při daném pohybu) na volbě t_1 . Přiřadíme-li ke každému t uvažovaného intervalu časů příslušnou derivaci $\dot{\vec{r}}(t)$, tj. rychlost $\vec{v}(t)$, definujeme tím novou vektorovou funkci skalárního argumentu t , kterou rovněž označíme $\vec{r}(t) = \vec{v}(t)$, nebo krátce jen \vec{v} a nazýváme rychlost hmotného bodu. Tedy $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$.

Informace: Ze vztahů (2.3), (2.1) a z pravidel pro výpočet derivací vektorových funkcí, analogických vztahům (1.19), plyne

$$\{1.2-4\} \quad \vec{v}(t) = \frac{d}{dt} [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}] = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}. \quad (2.4)$$

Srovnáním se vztahem $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$ dostaneme

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}.$$

Slovy: Průměty rychlosti $\vec{v}(t)$ do os Ox, Oy, Oz , tj. souřadnice rychlosti $\vec{v}(t)$, jsou rovny derivacím funkcí $x(t), y(t), z(t)$ (udávajících trajektorii – viz rovnice (2.2)) podle času, tedy funkcím $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$.

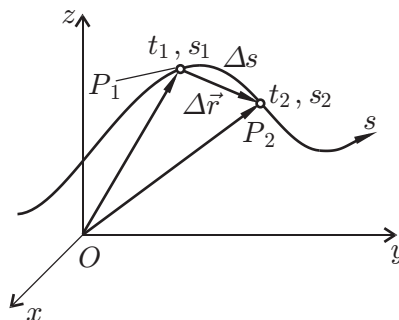
2.2. KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

2.2.1.5 Dráhová rychlost hmotného bodu, v

- a) Střední dráhová rychlost hmotného bodu v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, $v_{\text{stř}}(\Delta t)$, je definována takto: Na trajektorii hmotného bodu zavedeme dráhovou souřadnici (dráhu s) (obr. 2.4). Při pohybu hmotného bodu je s funkcí času, tj. $s(t)$. Označíme $s_1 = s(t_1)$, $s_2 = s(t_2)$ a definujeme

$$v_{\text{stř}}(\Delta t) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Podle toho, kterým směrem se hmotný bod pohybuje po trajektorii, může být $v_{\text{stř}}(\Delta t) \gtrless 0$. Tato veličina udává jen hrubou informaci o tom, jak se hmotný bod v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ pohyboval. Např. když se hmotný bod pohybuje na trajektorii střídavě oběma směry, může být $s_2 = s_1$ a tedy $v_{\text{stř}} = 0$ přesto, že se bod pohyboval. Jednotka: $[v_{\text{stř}}] = \text{m/s}$.



Obr. 2.4: Střední dráhová rychlost hmotného bodu je dána vztahem

$$v_{\text{stř}}(\Delta t) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

{obr1.2-3}

- b) Dráhová rychlost $v(t_1)$ hmotného bodu v čase t_1 , $v(t_1)$, je pak dána přechodem $v_{\text{stř}}(\Delta t)$ pro $\Delta t \rightarrow 0$, což vede k derivaci

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{stř}}(\Delta t) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1} = \frac{ds(t_1)}{dt} = \dot{s}(t_1) \quad \begin{array}{l} \text{definice dráhové rychlosti} \\ \text{v čase } t_1 \end{array} \quad (2.5)$$

{1.2-5}

{ram-9}

Tato veličina se někdy nazývá také „okamžitá dráhová rychlost v čase t_1 “. Platí: $s(t)$ v čase t_1 roste, je-li $\dot{s}(t_1) = v(t_1) > 0$ atd. Veličinu $|v(t)|$ ukazuje tachometr automobilu, říká se jí v běžné řeči prostě rychlost. Podobně „rychlost zvuku ve vzduchu je $v = 335 \text{ m/s}$ “. Tam, kde nemůže dojít k nejasnosti, lze tuto terminologii tolerovat.

Přiřadíme-li každému t derivaci \dot{s} v čase t dostaneme funkci $v(t) = \dot{s}(t)$.

{pr1.2-1}

KP 2.2-1

Dráhová souřadnice (dráha) hmotného bodu pohybujícího se po zakřivené trajektorii byla dána pro $t > 0$ vztahem $s(t) = At + Bt^3$, kde $A = 10 \text{ m/s}$, $B = -5 \text{ m/s}^3$. Určete

1. $v(t_1)$, kde $t_1 = 2 \text{ s}$;
2. Přibližnou změnu dráhy s v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, kde $t_2 = 2,03 \text{ s}$.

Řešení:

1. $v(t) = \dot{s}(t) = \frac{d}{dt}(At + Bt^3) = A + 3Bt^2$; $v(t_1) = A + 3Bt_1^2 = \dots = -50 \text{ m/s}$.

2.2. KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

2. $\Delta s \doteq ds(t_1) = \dot{s}(t_1)dt$, tj. změnu funkce $s(t)$ počítáme přibližně jako diferenciál — viz rovnice (1.17). Přitom $dt = 0,03\text{ s}$. Tedy $\Delta s = -50\text{ m/s } 0,03\text{ s} = -1,5\text{ m}$. Je tedy $s(t_2) = s(t_1) + \Delta s \doteq s(t_1) - 1,5\text{ m}$.

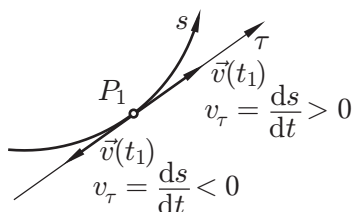
2.2.1.6 Vztah mezi rychlostí $\vec{v}(t)$ a tečnou rychlostí $v_\tau(t)$

Trajektorii orientujeme a zavedeme dráhovou souřadnici $s(t)$. V bodě P_1 (obr. 2.5) sestrojíme tečnu τ orientovanou shodně s trajektorií. Vektor $\vec{v}(t)$, který v ní leží, do ní promítneme a průmět označíme $v_\tau(t)$, takže platí buď $v_\tau(t) = |\vec{v}(t)| \cos 0^\circ = |\vec{v}(t)| > 0$, nebo $v_\tau(t) = |\vec{v}(t)| \cos 180^\circ = -|\vec{v}(t)| < 0$. S užitím definičních vztahů pro $\vec{v}(t_1), v(t_1)$ lze dokázat, že platí

$$v_\tau(t_1) = v(t_1) = \dot{s}(t_1).$$

Pro velikosti uvedených veličin platí $|v_\tau(t)| = |v(t)| = |\dot{s}(t)|$.

Poznámka: Tečnu jsme výjimečně označili symbolem τ , aby nedošlo k záměně s časem t .



Obr. 2.5: Vztah mezi rychlostí $\vec{v}(t)$ a tečnou rychlostí $v_\tau(t)$.

{obr1.2-4}

2.2.2 Zrychlení \vec{a}

2.2.2.1 Definice zrychlení

Zrychlení $\vec{a}(t)$ hmotného bodu je veličina, která charakterizuje časovou změnu vektoru $\vec{v}(t)$ při jeho pohybu v určité vztažné soustavě. Vektor $\vec{a}(t)$ byl zaveden jako derivace vektorové funkce $\vec{v}(t)$. Vektor $\vec{a}(t)$ je v dynamice důležitější než $\vec{v}(t)$, neboť souvisí s působícími silami prostřednictvím druhého Newtonova pohybového zákona: $m\vec{a} = \vec{F}_v$. Proto jej vyšetříme důkladněji.

- a) Střední zrychlení hmotného bodu v časovém intervalu $\langle t_1, t \rangle$, $\vec{a}_{\text{stř}}(\Delta t)$.

Uvažujme o pohybu hmotného bodu po trajektorii s . V čase t_1 nechť je hmotný bod v bodě P_1 a nechť má rychlost $\vec{v}(t_1)$ (obr. 2.6). V čase $t > t_1$ nechť je v P a jeho rychlost je $\vec{v}(t)$. V intervalu $\langle t_1, t \rangle$ se rychlost změnila o $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_1)$. Tento vektor sestrojíme např. tak, že vektory $\vec{v}(t_1), \vec{v}(t)$ přeneseme do jednoho bodu (kteréhokoliv, v obr. 2.6 je to pro jednoduchost bod P) a utvoříme vektor $\Delta\vec{v}$, pro který platí $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_1) + \Delta\vec{v}$.

Definice: Střední zrychlení $\vec{a}_{\text{stř}}(\Delta t)$ hmotného bodu v intervalu $\langle t_1, t \rangle$ je definováno vztahem

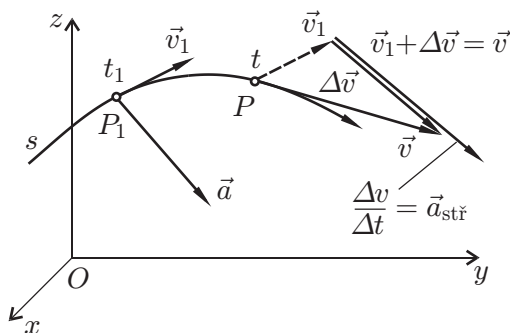
$$\vec{a}_{\text{stř}}(\Delta t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_1)}{t - t_1}. \quad \text{střední zrychlení} \quad (2.6)$$

{1.2-6}

{ram-10}

Poznámka: Vektor $\vec{a}_{\text{stř}}(\Delta t)$ lze umístit do libovolného bodu úseku P_1P .

2.2. KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU



Obr. 2.6: Hmotný bod se pohybuje po orientované křivce s : v čase t_1 se nachází v bodě P_1 a má okamžitou rychlost \vec{v}_1 . V dalším okamžiku $t > t_1$ je pak v P_2 a má okamžitou rychlost \vec{v} . V časovém intervalu $\Delta t = t - t_1$ se tak jeho rychlost změnila z \vec{v}_1 na \vec{v} , tedy o $\Delta\vec{v}$. Bod se tudíž pohyboval se středním zrychlením $\vec{a}_{stř}(\Delta t)$.

{obr1.2-5}

- b) Okamžité zrychlení hmotného bodu v čase t_1 , tj. $\vec{a}(t_1)$. Vektor $\vec{a}(t_1)$ charakterizuje rychlost změny vektoru $\vec{v}(t)$ v čase t_1 . Je definován takto: uvažujme opět o pohybu hmotného bodu znázorněném v obr. 2.6. Předpokládejme, že $\vec{v}(t)$ se mění v okolí t_1 spojitě (tj. plynule). Volme t_1 pevně a mějme postupně různá t tak, aby $t \rightarrow t_1$. Pak $P \rightarrow P_1, \vec{v}(t) \rightarrow \vec{v}(t_1), \Delta\vec{v} = \vec{0}$.



Definice: Okamžité zrychlení $\vec{a}(t)$ v čase t_1 je definováno vztahem

$$\vec{a}(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{stř}(\Delta t) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_1)}{t - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t_1)}{dt}. \quad \text{okamžité zrychlení} \quad (2.7)$$

{1.2-7}

{ram-11}

Informace: Z definice (2.7) a z obr. 2.6 plyne:

1. Vektor $\vec{a}(t_1)$ má (obecně) jiný směr než $\vec{v}(t_1)$. Jedině při přímočarém pohybu, kdy vektory $\vec{v}(t)$ leží pro všechna t v jedné přímce, je $\vec{a}(t) \parallel \vec{v}(t)$.
2. Jednotka: $[a] = \text{m/s}^2$.
3. Přiřazením \vec{a} ke každému t definujeme vektorovou funkci $\vec{a}(t)$. V praxi se někdy značí jak tato funkce, tak její hodnota v určitém čase jen symbolem \vec{a} .
4. Je-li pohyb hmotného bodu po trajektorii dán v semikartézském vyjádření polohového vektoru

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

pak (viz rovnice 2.4) platí

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2},$$

což je to samé, jako

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{v}}(t) = \dot{v}_x(t)\vec{i} + \dot{v}_y(t)\vec{j} + \dot{v}_z(t)\vec{k} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} = \ddot{\vec{r}}(t).$$

2.2. KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

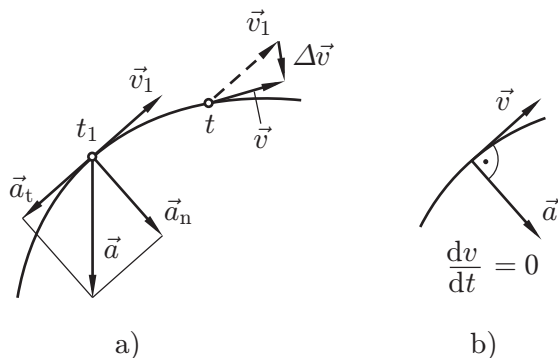
Srovnáním s $\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$ dostaneme

$$a_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t), \quad a_y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t), \quad a_z(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \ddot{z}(t).$$

Tedy: průmět zrychlení $\vec{a}(t)$ do osy Ox je $a_x(t) = d^2x(t)/dt^2 = dv_x(t)/dt$, atd.

5. Z definičního vztahu (2.7) a z obr. 2.6 a 2.7a plyne: vektor $\vec{a}(t)$ lze rozložit na tečnou složku $\vec{a}_t(t)$ a normálovou složku $\vec{a}_n(t)$, tj. $\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t)$. Jestliže $|\vec{v}(t)|$ se při pohybu zvětšuje (obr. 2.9), je $\vec{a}_t(t) \uparrow \vec{v}(t)$. Jestliže $|\vec{v}(t)|$ se zmenšuje (obr. 2.7a) je $\vec{a}_t(t) \downarrow \vec{v}(t)$. Mezní případ: je-li $|\vec{v}(t)| = \text{konst.}$, je $\vec{a}_t(t) = \vec{0}$.

Vektor \vec{a}_n je při pohybu po zakřivené trajektorii vždy nenulový, $\vec{a}_n \neq \vec{0}$. Je-li tento pohyb rovnoměrný (tj., platí-li $dv(t)/dt = 0$, ale zároveň $d\vec{v}(t)/dt \neq \vec{0}$), je $\vec{a}_t = \vec{0}$, takže $\vec{a}(t) = \vec{a}_n(t)$, tedy $\vec{a} \perp \vec{v}$ (obr. 2.7b).



Obr. 2.7: Vektor $\vec{a}(t)$ lze rozložit na tečnou složku $\vec{a}_t(t)$ a normálovou složku $\vec{a}_n(t)$ (a). Je-li navíc $\vec{a}(t) \perp \vec{v}(t)$, pak platí $\vec{a}(t) = \vec{a}_n(t)$ a $\vec{a}_t(t) = \vec{0}$ a tedy $dv(t)/dt = 0$. Jedná se o pohyb rovnoměrný po zakřivené trajektorii (b).

{obr1.2-6}

{pr1.2-2} **KP 2.2-2** —————

Hmotný bod se pohyboval rovnoměrně po kružnici k ve směru naznačeném v obr. 2.8a. Úsek AB urazil rychlostí o (konstantní) velikosti $v = 2 \text{ m/s}$ za čas $\Delta t = 0,4 \text{ s}$. Úkoly:

1. Určete změnu rychlosti hmotného bodu na úseku AB .
2. Určete střední zrychlení hmotného bodu na úseku AB .

Řešení:

1. $\Delta \vec{v} = ?$, $\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$, viz obr. 2.8b. Směr $\Delta \vec{v}$ — viz obr. 2.8b; velikost $|\Delta \vec{v}| = \sqrt{v_A^2 + v_B^2} = \sqrt{2v^2} = v\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ m/s} = 2,83 \text{ m/s}$.
2. $\vec{a}_{\text{stř}}(\Delta t) = ?$, $\vec{a}_{\text{stř}}(\Delta t) = \Delta \vec{v} / \Delta t$. Směr: $\vec{a}_{\text{stř}}(\Delta t) \uparrow \Delta \vec{v}$ (obr. 2.8b); velikost $|\vec{a}_{\text{stř}}(\Delta t)| = |\Delta \vec{v}| / \Delta t = 2,83 / 0,4 \text{ m/s}^2 = 7,07 \text{ m/s}^2$.

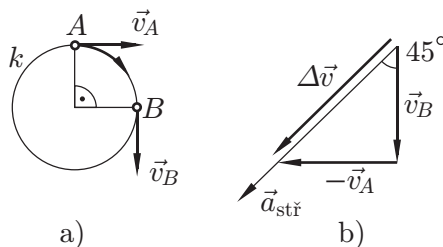
2.2.2.2 Zrychlení hmotného bodu při pohybu po kružnici

{cizrychleni}

Toto je důležitý případ nejen proto, že se často vyskytuje, nýbrž i proto, že jeho zákonitosti platí i pro pohyb po libovolné křivce — viz další části. Hlavní výsledek je obsažen ve vztazích (2.11).



2.2. KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

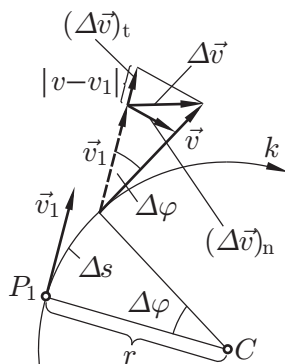


{obr1.2-7}

Obr. 2.8: Příklad KP 2.2-2.

Uvažujme o hmotného bodu, který se pohybuje po kružnici k o poloměru r . Nechť v čase t_1 je v bodě P_1 (obr. 2.9) a nechť jeho rychlost v okolí bodu P_1 je dána funkcí $\vec{v}(t)$. Označme $\vec{v}(t_1) = \vec{v}_1$, dále označme pro jednoznačnost $\vec{a}(t_1) = \vec{a}$. Podle definice (2.7) je

$$\{1.2-8\} \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \vec{v})_t + (\Delta \vec{v})_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \vec{v})_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \vec{v})_n}{\Delta t} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (2.8)$$



Obr. 2.9: Obecný pohyb hmotného bodu po kružnici. Změnu rychlosti $\Delta \vec{v}$ lze rozložit na tečnou složku: $(\Delta \vec{v})_t$ a normálovou složku: $(\Delta \vec{v})_n$.

{obr1.2-8}

Přitom jsme rozložili $\Delta \vec{v}$ na tečnou a normálovou složku, $\Delta \vec{v} = (\Delta \vec{v})_t + (\Delta \vec{v})_n$ (obr. 2.9) a užili pravidel pro počítání s limitami. Z obr. 2.9 je zřejmé: $|(\Delta \vec{v})_t| \doteq |v - v_1| = |\Delta v|$, kde v je velikost rychlosti \vec{v} , $|(\Delta \vec{v})_n| \doteq |v_1 \cdot \Delta \varphi| = |v_1 \frac{\Delta s}{r}|$.

Na základě těchto vztahů dostaneme ze vztahu (2.8) s užitím pravidel pro počítání s limitami:

$$\{1.2-9\} \quad |\vec{a}_t(t_1)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|(\Delta \vec{v})_t|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \left| \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{v - v_1}{t - t_1} \right| = \left| \frac{dv(t_1)}{dt} \right| = \dot{v}(t_1), \quad (2.9)$$

$$\{1.2-10\} \quad |\vec{a}_n(t_1)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|(\Delta \vec{v})_n|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|v_1 \frac{\Delta s}{r}|}{\Delta t} = \frac{|v_1|}{r} \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \frac{|v_1|}{r} \cdot |v_1| = \frac{v_1^2}{r}. \quad (2.10)$$

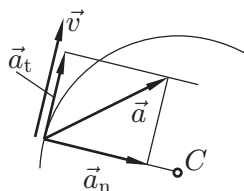
Tedy obecně (obr. 2.10):

$$\{1.2-11\} \quad \vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t), \quad \text{kde } |\vec{a}_t(t)| = a_t(t) = \left| \frac{dv(t)}{dt} \right|, \quad |\vec{a}_n(t)| = a_n(t) = \frac{v^2(t)}{r}. \quad (2.11)$$

Složka $\vec{a}_t(t)$ se nazývá tečné zrychlení, složka $\vec{a}_n(t)$ se nazývá dostředivé zrychlení, protože míří vždy do středu kružnice na obr. 2.10. Vektor $\vec{a}(t)$ směřuje tedy vždy na konkávní stranu kružnice, tj. na tu její stranu, na níž leží její střed.

Informace:

2.2. KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU



Obr. 2.10: Obecný pohyb hmotného bodu po kružnici. Zrychlení \vec{a} lze rozložit na tečnou složku \vec{a}_t a normálovou složku \vec{a}_n .

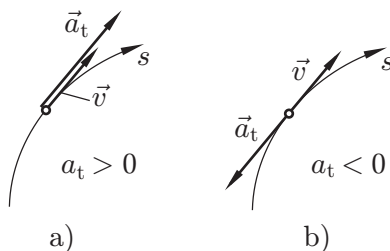
{obr1.2-9}

1. Z definičního vztahu pro $\vec{a}(t)$ lze dokázat tvrzení: Je-li pohyb hmotného bodu na orientované trajektorii dán funkcí $s(t)$, určíme orientaci vektoru $\vec{a}_t(t)$ ze vztahu

$$\{1.2-12\} \quad a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}, \quad (2.12)$$

kde $a_t(t) \gtrless 0$ je průmět vektoru $\vec{a}(t)$ do tečny orientované shodně s trajektorií.

2. Platí-li v bodě P vztah $\vec{a}_t \uparrow \vec{v}$ (obr. 2.11a), rychlost v se v bodě P zvětšuje. Platí-li $\vec{a}_t \downarrow \vec{v}$ (obr. 2.11b), rychlost se zmenšuje.

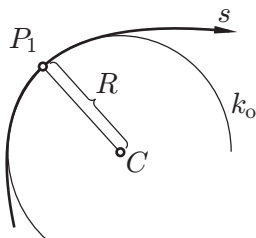


Obr. 2.11: Znázornění vzájemného možného vztahu mezi tečným zrychlením a okamžitou rychlostí. Je-li $\vec{a}_t \uparrow \vec{v}$, rychlost se zvětšuje (a), platí-li $\vec{a}_t \downarrow \vec{v}$, rychlost klesá (b).

{obr1.2-10}

2.2.2.3 Zrychlení hmotného bodu při pohybu na libovolné křivé rovinné trajektorii

Zrychlení hmotného bodu v obecném bodě P_1 trajektorie s , v němž má hmotný bod rychlost \vec{v} , se určí takto: Trajektorii s nahradíme v malém okolí bodu P_1 obloukem tzv. oskulační kružnice k_0 v obr. 2.12. Je to taková kružnice, která, zhruba řečeno, trajektorii v okolí bodu P_1 aproximuje ze všech kružnic, dotýkajících se jí v bodě P_1 , nejlépe. K definici oskulační kružnice zavedeme nejprve veličinu zvanou křivost křivky.



Obr. 2.12: Libovolnou křivou rovinnou trajektorií lze nahradit v malém okolí bodu P_1 obloukem oskulační kružnice k_0 .

{obr1.2-11}

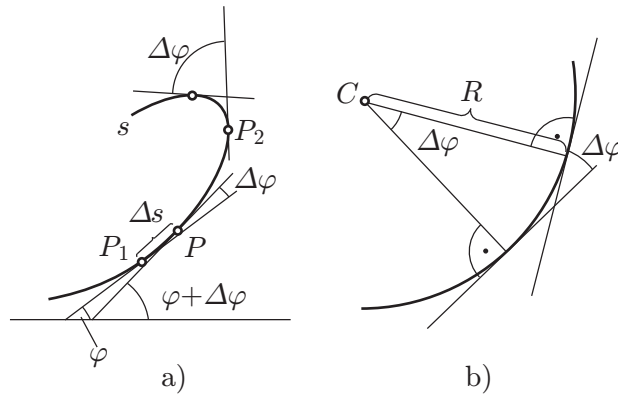
2.2. KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

Křivost ρ rovinné křivky s v bodě P_1 je definována takto: Ke křivce s vedeme tečnu v bodě P_1 a v blízkém bodě P (obr. 2.13a). Délku oblouku P_1P označíme Δs a úhel tečen označíme $\Delta\varphi$. Utvoříme poměr $\Delta\varphi/\Delta s$. Tento poměr je tím větší, čím je větší (při daném Δs) úhel $\Delta\varphi$, tj. čím je křivka zakřivenější (v obr. 2.13a je $\Delta\varphi/\Delta s$ větší v bodě P_2 než v bodě P_1). Proto se nazývá $\Delta\varphi/\Delta s$ střední křivost křivky v úseku P_1P . Křivost ρ křivky C v bodě P_1 je definována vztahem

{1.2-13}

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \text{křivost křivky} \quad (2.13)$$

Jednotka $[\rho] = \text{m}^{-1}$. Pro kružnici o poloměru R platí (obr. 2.13b): $\Delta\varphi/\Delta s = \Delta\varphi/(R\Delta\varphi) = 1/R$. Odsud a ze vztahu (2.13) plyne, že křivost kružnice je $\rho = 1/R$.



Obr. 2.13: K výpočtu křivosti křivky s (a). Vztah mezi změnou úhlu $\Delta\varphi$ a poloměrem R kružnice (b).

{obr1.2-12}

Oskulační kružnice k rovinné křivce k v bodě P_1 je kružnice, která leží v rovině křivky, dotýká se jí v bodě P_1 a má stejnou křivost jako křivka v bodě P_1 . Poloměr oskulační kružnice se nazývá poloměr křivosti křivky k v bodě P_1 . Značí se R . Střed C oskulační kružnice se nazývá střed křivosti křivky k v bodě P_1 (obr. 2.12). Z úvah vedoucích k odvození vztahů (2.11) a z definice oskulační rovnice plyne:

Zrychlení $\vec{a}(t)$ hmotného bodu v bodě P_1 při jeho pohybu po trajektorii s je dáno vztahy (2.11), kde r je poloměr křivosti křivky s v bodě P_1 .

{pr1.2-3}

KP 2.2-3

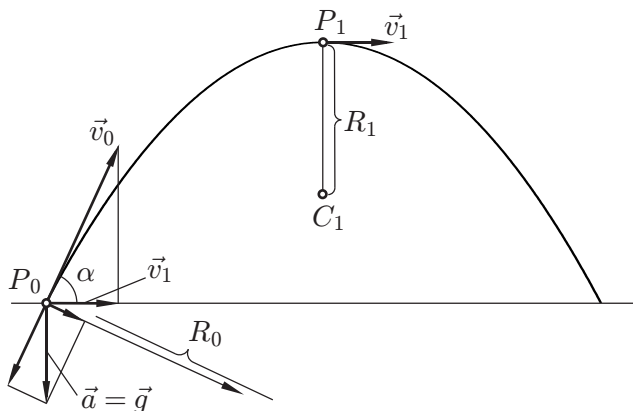
Malé těleso (hmotný bod) má v bodě P_0 na povrchu Země rychlost \vec{v}_0 o velikosti $v_0 = 30 \text{ m/s}$, která svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 60^\circ$. Odpor vzduchu je zanedbatelný (viz též pohyb hmotného bodu v tíhovém poli ideální Země na straně 103 a příklad KP 2.7-7). Určete:



1. Zrychlení hmotného bodu v bodě P_0 ;
2. Zakreslete tečné a normálové zrychlení v bodě P_0 ;
3. Zakreslete poloměr křivosti R_0 trajektorie (paraboly) v bodě P_0 ;
4. Zakreslete poloměr křivosti R_1 trajektorie v jejím nejvyšším bodě.

Řešení:

1. $\vec{a} = ?$, $\vec{a} = \vec{g}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$,
2. $\vec{a}_t = ?$ směr viz obr. 2.14; velikost $a_t = g \sin \alpha = \dots = 8,67 \text{ m/s}^2$; $\vec{a}_n = ?$ směr viz obr. 2.14; velikost $a_n = g \cos \alpha = \dots = 5 \text{ m/s}^2$;



Obr. 2.14: Příklad KP 2.2-3

{obr1.2-13}

3. $R_0 = ?$ $a_n = \frac{v_0^2}{R_0} \rightarrow R_0 = \frac{v_0^2}{a_n} = \dots = 180 \text{ m};$
4. $R_1 = ?$ $a_n = \frac{v_1^2}{R_1}$, kde $a_n = g$. Během pohybu je vodorovná složka zrychlení $\vec{a} = \vec{g}$ rovna nule, platí tedy $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$. Je tedy $\frac{dx(t)}{dt} = \text{konst.}$, tj. vodorovná složka rychlosti je stálá. Tedy $v_1 = v_0 \cos \alpha = \dots = 15 \text{ m/s}$. Odtud $R_1 = v_1^2/g \dots = 22,5 \text{ m}$.

2.2.3 Rovnoměrný pohyb po křivce

{1.2.2D}

Rovnoměrným pohybem hmotného bodu nazýváme takový pohyb, při němž se nemění velikost rychlosti $\vec{v}(t)$, tj. při němž je $|\vec{v}(t)| = \text{konst.}$

Zavedeme na trajektorii dráhovou souřadnici s , označíme (stálou) dráhovou rychlost v_0 a budeme předpokládat, že je dáno $s(t=0)$ v čase $t=0$, tj. $s(0) = s_0$. Určíme $s(t)$:

$$\frac{ds(t)}{dt} = v_0 \rightarrow s(t) = v_0 t + C,$$

kde C je libovolná konstanta. V našem případě však konstanta C není libovolná — musí být taková, aby pro $t=0$ platilo $s(0) = s_0$. Dosazením $t=0$ dostaneme $s(0) = C$ takže $C = s_0$. Tedy

{1.2-14}

$$s(t) = s_0 + v_0 t. \quad \text{dráha při rovnoměrném pohybu} \quad (2.14)$$

{ram-12}

Pro $s_0 = 0 \text{ m}$ plyne odsud $s(t) = v_0 t$. Dále $\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t)$, kde $a_t(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = 0$, $a_n(t) = \frac{v_0^2(t)}{r}$. Přitom r je poloměr křivosti trajektorie v uvažovaném bodě. Ježto $\vec{a}_t(t) = \vec{0}$, je $\vec{a}(t)$ rovno $\vec{a}_n(t)$, tj. $\vec{a}(t) = \vec{a}_n(t)$. To značí, že v tomto případě je $\vec{a}(t) \perp \vec{v}(t)$.

2.2.4 Rovnoměrně proměnný pohyb po křivce

{1.2.2DP}

Rovnoměrně proměnným pohybem hmotného bodu nazýváme takový pohyb, při němž tečné zrychlení má stálou velikost $|\vec{a}_t(t)| = \text{konst.} (\neq 0)$.

Na trajektorii zavedeme dráhovou souřadnici $s(t)$, průmět vektoru zrychlení $\vec{a}(t)$ do tečny orientované shodně s trajektorií označíme $a_t(t) = a_t = \text{konst.} = a_0 (\geq 0)$ a budeme předpokládat,

2.3. KINEMATIKA TUHÉHO TĚLESA

že je známa dráhová souřadnice a dráhová rychlost v čase $t = 0$ s. Označíme je $s(0) = s_0, v(0) = v_0$ a určíme $v(t)$ a $s(t)$:

1. $a_t(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, tj. $\frac{dv(t)}{dt} = a_0 \rightarrow v(t) = a_0t + C_1$. Dosadíme-li $t = 0$ s, dostaneme s přihlédnutím ke vztahu $v(0) = v_0$ výsledek $C_1 = v_0$. Tedy $v(t) = a_0t + v_0$.

2. $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \rightarrow s(t) = \int v(t)dt = \int (a_0t + v_0)dt = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + C_2 = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + s_0$.

Hodnotu $C_2 = s_0$ jsme dostali, podobně jako hodnoty konstant C, C_1 dříve, dosazením $t = 0$ s. Shrnutí:

{1.2-15}

$$a_t(t) = a_0 (= \text{konst.}), s(0) = s_0, v(0) = v_0, v(t) = v_0 + a_0t, s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_0t^2. \quad (2.15)$$

pohyb rovnoměrně proměnný

{ram-13}

Jestliže při rovnoměrně proměnném pohybu velikost $\vec{v}(t)$, tj. $|\vec{v}(t)|$

a) roste, pohyb se nazývá pohyb rovnoměrně zrychlený (platí pak $\vec{a}_t(t) \uparrow \vec{v}(t)$),

b) $|\vec{v}(t)|$ klesá, pohyb se nazývá pohyb rovnoměrně zpomalený (nebo zpomalený) (platí pak $\vec{a}_t(t) \downarrow \vec{v}(t)$).

Orientujeme-li trajektorii ve směru pohybu hmotného bodu, tj. ve směru $\vec{v}(t)$, je $v(t) > 0$. Označíme-li $|\vec{a}_t(t)| = a(t) (> 0)$, pak ze vztahů (2.14) plyne pro

{1.2-16}

$$\begin{aligned} \text{pohyb rovnoměrně zrychlený: } & v(t) = v_0 + at, s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2, \\ \text{pohyb rovnoměrně zpomalený: } & v(t) = v_0 - at, s(t) = s_0 + v_0t - \frac{1}{2}at^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

{ram-14}

Nezapomeňte, že celkové zrychlení \vec{a} při každém křivočarém pohybu je dáno vztahy (2.11) a velikost normálového zrychlení je obecně nenulová.

Řešte příklad KP 1.2-5 v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#).

2.3 Kinematika tuhého tělesa

emTuh{Tee2eb}

Všechna tělesa se pod vlivem působení ostatních těles a fyzikálních polí, vlivem změny teploty, atd. deformují. Většina těles se deformuje tak málo, že deformace lze zanedbat. Idealizované těleso, jež se vůbec nedeformuje a jehož elementy tedy mají stálé vzájemné vzdálenosti, se nazývá dokonale tuhé těleso, krátce tuhé těleso. Je modelem skutečných těles. V této části vyšetříme nejjednodušší pohyby tuhých těles — rotační pohyb a translační pohyb.

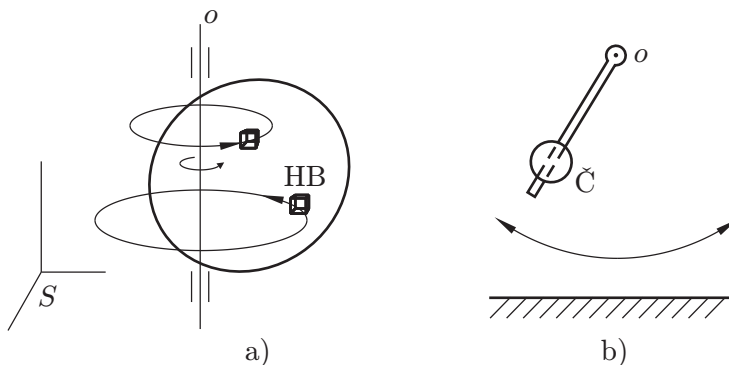
2.3.1 Otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy

Při otáčivém (tj. rotačním) pohybu tuhého tělesa kolem osy, jejíž směr se nemění (pevná osa), se pohybují všechny jeho elementy (hmotné body), které neleží na ose otáčení, po kružnicích se středy ležícími na ose otáčení o (obr. 2.15a). V obr. 2.15b je znázorněn kmitavý pohyb čocky kyvadla kolem vodorovné osy o , která neprochází čockou. Je to rovněž otáčivý pohyb.

V dalším vyšetříme nejprve pohyb hmotného bodu po kružnici, poté rotační pohyb tuhého tělesa.



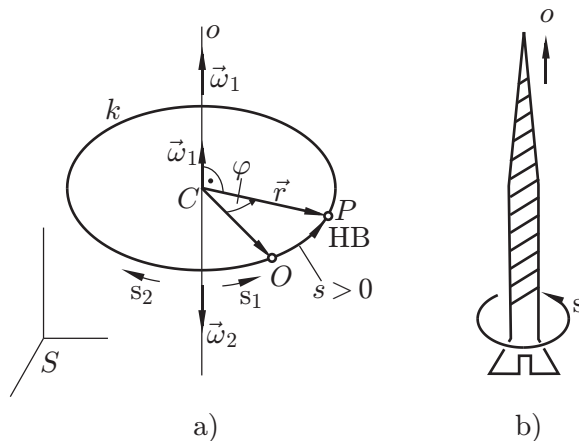
2.3. KINEMATIKA TUHÉHO TĚLESA



Obr. 2.15: Příklady otáčivého pohybu tělesa kolem pevné osy.

2.3.1.1 Pohyb hmotného bodu po kružnici

Budeme uvažovat pohyb hmotného bodu po kružnici k o poloměru r se středem v bodě C (obr. 2.16a). Trajektorii orientujeme (obvykle ve směru opačném než je směr pohybu hodinových ručiček — obr. 2.16a, není to však nutné), volíme na ní pevný bod O a zavedeme dráhovou souřadnici s a polohový vektor \vec{r} umístěný v C . Dále zavedeme osu otáčení o (obr. 2.16a) a orientujeme ji s užitím pravidla pravého šroubu (tj. pravotočivého šroubu) (obr. 2.16b): otáčíme šroubem ve směru orientace trajektorie, směr postupu šroubu udává kladný směr osy o . Nakonec zavedeme nejdůležitější veličinu — úhlovou dráhu φ .



Obr. 2.16: Kladná orientace trajektorie hmotného bodu po kružnici k (a). Grafické znázornění pravidla pravotočivého šroubu (b).

- a) Úhlová dráha φ je rovinný úhel, který svírá polohový vektor \vec{r} hmotného bodu s polohovým vektorem \vec{r}_0 pevného bodu O . Úhel φ se udává buď v úhlových stupních nebo v radiánech (rad). Úhel v radiánech je definován poměrem

$$\varphi = \frac{s}{r} \longrightarrow s = \varphi r, \quad (2.17)$$

viz obr. 1.2. Ježto pro $\varphi = 180^\circ$ je $s = \pi r$, platí

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \rightarrow 1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 45''.$$

Při pohybu hmotného bodu jsou veličiny $s(t)$, $\varphi(t)$, $\vec{r}(t)$ obecně funkcemi času.



- b) Úhlová rychlost hmotného bodu v čase t_1 je vektorová veličina, která se označuje $\vec{\omega}(t_1)$ a která je definována takto (definice):

velikost

$$\{1.2-18\} \quad |\vec{\omega}(t_1)| = \left| \frac{d\varphi(t_1)}{dt} \right| \quad (2.18)$$

směr $\vec{\omega}(t_1)$ leží v ose o a její směr je dán užitím pravidla pravotočivého šroubu na směr pohybu hmotného bodu na k . Při pohybu hmotného bodu ve směru šípky s_1 (obr. 2.16a), tj. ve směru shodném s orientací trajektorie, je $\vec{\omega}_1 \uparrow\uparrow o$; při pohybu v opačném směru (šípka s_2) je $\vec{\omega}_2 \uparrow\downarrow o$. Vektor $\vec{\omega}(t_1)$ se umísťuje nejčastěji do bodu C . Značí se i ω_1 .

Informace:

1. Přiřadíme-li ke každému t příslušné $\vec{\omega}(t)$, dostaneme vektorovou funkci času, kterou označíme buď $\vec{\omega}(t)$ nebo jen $\vec{\omega}$.
2. $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} = \text{s}^{-1}$;
3. Průmět vektoru $\vec{\omega}$ do osy o označíme ω . Platí $\omega = |\omega| \cdot \cos \alpha$. Při $\vec{\omega} \uparrow\uparrow o$ je $\alpha = 0^\circ$, $\omega > 0$; pro $\vec{\omega} \uparrow\downarrow o$ je $\alpha = 180^\circ$, $\omega < 0$. Z definice $\vec{\omega}$ plyne

{1.2-19}

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad \text{úhlová rychlost} \quad (2.19)$$

{ram-15}

Platí: $\{\varphi \text{ roste}\} \rightarrow d\varphi/dt > 0 \rightarrow \omega > 0 \rightarrow \vec{\omega} \uparrow\uparrow o$. Analogicky: $\{\varphi \text{ klesá}\} \rightarrow \vec{\omega} \uparrow\downarrow o$. Skalární veličina ω daná vztahem (2.19) nebo i její absolutní hodnota se většinou rovněž nazývá úhlová rychlost.

4. Lze dokázat, že veličina ω je skutečně veličina vektorová, pro niž jsou definovány operace sčítání atd.

5. Rychlost hmotného bodu:

(a) Dráhová rychlost $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(r\varphi(t))}{dt} = r \frac{d\varphi(t)}{dt} = r\omega(t)$.

(b) Rychlost $\vec{v}(t)$ je dána vztahem (viz obr. 2.17) ;

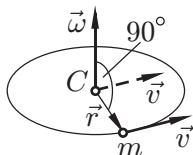
$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t).$$

Skutečně: $|\vec{v}(t)| = |\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)| = |\vec{\omega}(t)|r \sin 90^\circ = |\omega(t)r| = |v(t)|$.

Tedy

{1.2-20}

$$v(t) = r\omega(t), \vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t). \quad (2.20)$$



Obr. 2.17: Rychlost $\vec{v}(t)$ hmotného bodu pohybujícího se po kružnici je dána vztahem

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t).$$



{obr1.2-16}

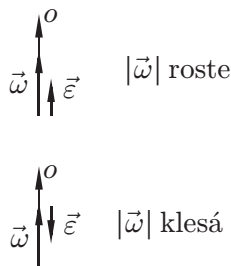
2.3. KINEMATIKA TUHÉHO TĚLESA

6. Velikost střední úhlové rychlosti, tj. $\omega_{\text{stř}}(\Delta t)$ hmotného bodu v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ je definována vztahem

$$\{1.2-21\} \quad \omega_{\text{stř}}(t) = \frac{\omega(t_2) - \omega(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad \text{Zřejmě: } \omega(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \omega_{\text{stř}}(\Delta t). \quad (2.21)$$

c) Úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}(t)$ hmotného bodu v čase t_1 je vektorová veličina, která charakterizuje časovou změnu úhlové rychlosti v čase t_1 . Označuje se $\vec{\varepsilon}(t_1)$ a je definována vztahem

$$\{1.2-22\} \quad \vec{\varepsilon}(t_1) = \frac{d\vec{\omega}(t_1)}{dt}. \quad (2.22)$$



{obr1.2-17}

Obr. 2.18: Orientace úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ a úhlového zrychlení $\vec{\varepsilon}$.

Ježto vektor $\vec{\omega}$ leží v ose o , leží v ose o i vektor $\vec{\varepsilon}(t_1)$ (obr. 2.18). Při obecném otáčivém pohybu je úhlové zrychlení funkcí času. Značíme je buď $\vec{\varepsilon}(t)$ nebo jen $\vec{\varepsilon}$.

Informace:

1. $[\varepsilon] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-2} = \text{s}^{-2}$;
2. Průmět vektoru $\vec{\varepsilon}$ do osy o označíme ε . Ze vztahů (2.19), (2.22) plyne

{1.2-23}

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad \text{úhlové zrychlení} \quad (2.23)$$

{ram-16}

Tato skalární veličina, nebo i její absolutní hodnota, se rovněž nazývá úhlové zrychlení.



3. Zrychlení $\vec{a}(t)$ hmotného bodu v čase t (nebo v bodě P , obr. 2.19a) je dáno vztahem

{1.2-24}

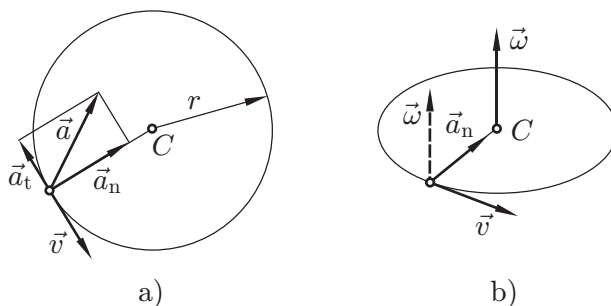
$$\vec{a}(t) = \vec{a}_n(t) + \vec{a}_t(t), \quad (2.24)$$

kde $a_n(t) = \frac{v^2(t)}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r = \omega \omega r = \omega v$; $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$ (obr. 2.19b), $a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2(r\varphi)}{dt^2} = r\varepsilon$, $\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$. Tedy

{1.2-25}

$$a_n = \omega^2 r, a_t = r\varepsilon \quad \text{zrychlení } \vec{a} \text{ pomocí } \omega, \varepsilon \quad (2.25)$$

2.3. KINEMATIKA TUHÉHO TĚLESA



Obr. 2.19: Zrychlení \vec{a} hmotného bodu lze rozložit na tečnou složku \vec{a}_t a na složku \vec{a}_n normálovou (a). Normálová složka je dána vztahem $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$ (b).

{obr1.2-18}

2.3.1.2 Rovnoměrný a rovnoměrně proměnný pohyb hmotného bodu po kružnici

- a) Rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici je definován vztahem $\varepsilon = 0$. Z této definice plyne

$$\{1.2-26\} \quad \varepsilon = 0 \rightarrow \omega = \omega_0 (= \text{konst.}) \rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t, \quad \text{kde } \varphi_0 = \varphi(0). \quad (2.26)$$

Charakteristické veličiny: n (nebo f) - otáčky, frekvence otáčení; T - perioda otáčení.

- α) Otáčky n - definice: Označíme $N(t)$ udávající počet otoček vykonaných od začátku pohybu do okamžiku t a definujeme

$$\{1.2-27\} \quad (f =)n = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi}{2\pi} \frac{1}{\Delta t} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi n (= 2\pi f). \quad (2.27)$$

Jednotka: $[n] = \text{s}^{-1}$; n je číselně rovno počtu otoček za 1 s (neboť volíme-li $\{\Delta t\} = 1$, je $\{n\} = \{\Delta N\}$).

- β) Perioda otáčení T . Definiční vztah:

$$\{1.2-28\} \quad T = \frac{\Delta t}{\Delta N} = \frac{1}{f}. \quad (2.28)$$

Jednotka: $[T] = 1 \text{ s}$. T je doba jedné otočky.

- b) Rovnoměrně proměnný pohyb hmotného bodu po kružnici je definován vztahem $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{konst.} \neq 0$, (srovnejte odst. 2.2.3, rovnice (2.14)). Z definice plyne:

$$\{1.2-29\} \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \rightarrow \omega(t) = \varepsilon_0 t + \omega_0 \rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2. \quad (2.29)$$

Tyto vztahy, i další vztahy a zákonitosti, jež z definiční rovnice plynou, jsou formálně shodné se vztahy z odst. 2.2.3. Např. vztahy analogické vztahům (2.16) získáme takto: volíme $\varepsilon_0 > 0, \omega_0 > 0$. Pak:

$$\begin{aligned} \text{rotační pohyb rovnoměrně zrychlený: } & \omega(t) = \omega_0 + \varepsilon_0 t, \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2, \\ \text{rotační pohyb rovnoměrně zpomalený: } & \omega(t) = \omega_0 - \varepsilon_0 t, \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2, \end{aligned} \quad (2.30)$$

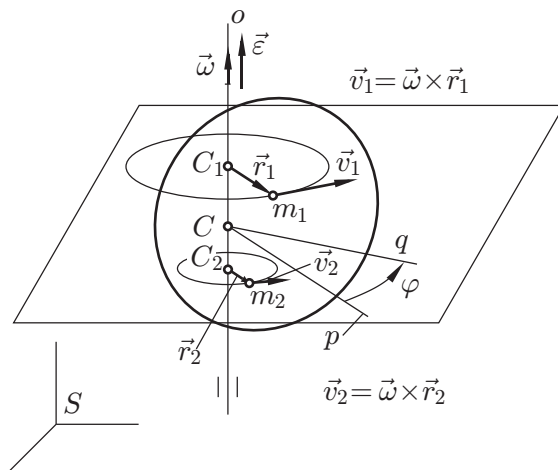
{1.2-30}

{ram-17}

2.3. KINEMATIKA TUHÉHO TĚLESA

2.3.1.3 Rotační pohyb tuhého tělesa

Při rotačním pohybu tuhého tělesa kolem osy o , která je pevná ve vztažné soustavě S (obr. 2.20), se pohybují všechny jeho elementy neležící na ose o po kružnicích. Všechny elementy (hmotné body) mají stejné úhlové rychlosti a stejná úhlová zrychlení. Rychlost a zrychlení mají různé.

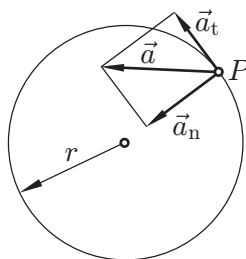


Obr. 2.20: Rotační pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy otáčení.

Okamžitou polohu tuhého tělesa charakterizujeme úhlem $\varphi(t)$ - úhlovou souřadnicí, definovanou takto: Na ose o volíme libovolný bod C a vedeme jím polopřímku p kolmou na o pevnou ve vztažném systému S ; bodem C vedeme dále polopřímku $q \perp o$ spojenou s tělesem, volíme kladný směr postupu od p ku q a zavedeme úhlovou souřadnici tělesa, $\varphi(t) \equiv \angle(p, q(t))$, podobně jako dříve pro hmotný bod. Analogicky jako pro hmotný bod definujeme úhlovou rychlost tělesa, $\vec{\omega}(t)$ a úhlové zrychlení tělesa, $\vec{\epsilon}(t)$. Pro tyto veličiny platí vztahy (2.18), (2.19), (2.21), (2.27), (2.23), (2.26) až (2.30). Veličiny charakterizující pohyb jednotlivých elementů tělesa, např. i -tého hmotného bodu, jsou dány vztahy (2.17), (2.20), (2.25), v nichž dosazujeme $s(t) \rightarrow s_i(t)$, $r \rightarrow r_i$, $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}_i(t)$, $\vec{v}(t) \rightarrow \vec{v}_i(t)$, $\vec{a}(t) \rightarrow \vec{a}_i(t)$, viz např. $\vec{v}_1(t)$, $\vec{v}_2(t)$ v obr. 2.20.

{pr1.2-4} **KP 2.3-1** —————

Tuhé těleso, jež bylo původně v klidu, se začalo v čase $t_1 = 0$ s otáčet kolem pevné osy se stálým úhlovým zrychlením $\epsilon = 0,4 \text{ s}^{-2}$. Určete zrychlení $\vec{a}(t)$ jeho elementu, který je ve vzdálenosti 30 cm od osy otáčení, v čase $t_2 = 2$ s.



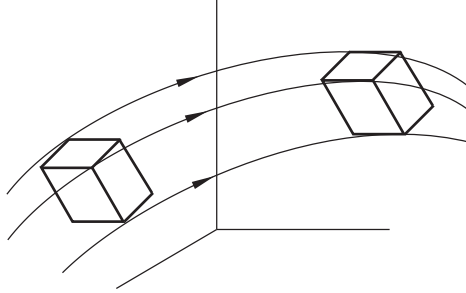
Obr. 2.21: Příklad KP 2.3-1.

Řešení:

Hmotný bod koná rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb po kružnici o poloměru $r = 0,3$ m. V čase t_2 je v jistém bodě P , obr. 2.21. Jeho zrychlení je dáno vztahy (2.24), (2.25), kde ω závisí na čase vztahem $\omega(t) = \omega_0 + \epsilon t$, viz rovnice (2.30), v němž $\omega_0 = 0$. Tedy $\omega_2 = \epsilon t_2$. Zrychlení: $\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t)$, kde $a_t = r\epsilon = 0,3 \cdot 0,4 \text{ m/s}^2$, $a_n = \omega_2^2 r = (\epsilon t_2)^2 r = (0,4 \cdot 2)^2 \cdot 0,3 \text{ m/s}^2 = 0,19 \text{ m/s}^2$. Velikost $\vec{a}(t)$: $a(t) = \sqrt{a_t^2(t) + a_n^2(t)} = \dots = 0,23 \text{ m/s}^2$.

2.3.2 Translační pohyb tuhého tělesa

Translační (neboli posuvný) pohyb tuhého tělesa je takový pohyb, při němž všechny body tělesa mají trvale stejné rychlosti \vec{v} a tedy i stejná zrychlení \vec{a} . Rychlost \vec{v} se nazývá rychlost tělesa, \vec{a} je jeho zrychlení. Trajektorie všech elementů tělesa jsou shodné — jedna přejde v druhou posunutím — obr. 2.22. Přímkami spojené s tělesem při pohybu zachovávají směr.



Obr. 2.22: Translační pohyb tuhého tělesa. Každý bod tělesa se pohybuje stejnou rychlostí, přímky spojené s tělesem při pohybu zachovávají směr.

Řešte příklady [KP 1.2-7](#), [KP 1.2-1](#), [KP 1.2-10](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.2-4](#) až [KP 2.2-8](#).

2.4 Pohybové zákony klasické fyziky

Tato část je z celé mechaniky nejdůležitější. Jsou v ní vyloženy základní pojmy a veličiny: inerciální vztažné soustavy a první pohybový zákon (odst. 2.4.1), setrvačnost, hmotnost, síla a (mimořádně důležitý) druhý pohybový zákon (odst. 2.4.2) a třetí (relativně jednoduchý) pohybový zákon (odst. 2.4.3). V odstavcích 2.4.4, 2.4.5 jsou informace o různých silách a o vlastnostech výslednice sil působících na hmotný bod při křivočarém pohybu. Vztahy mezi rychlostmi \vec{v} , \vec{v}' , mezi zrychleními \vec{a} , \vec{a}' a mezi pohybovými rovnicemi ve dvou inerciálních soustavách jsou studovány v odst. 2.4.6, kde je vysloven i tzv. Galileiho princip relativity. V odst. 2.4.7 jsou vyšetřeny pohybové rovnice v některých neinerciálních soustavách a zavedeny setrvačné síly.

- Cíl:**
- I) Umět vztahy a zákony uvedené v rámečcích, vyložit pojmy, veličiny a výsledky v tomto textu;
 - II) Definovat a vyložit pojmy, veličiny a zákony uvedené v části „Obsah“;
 - III) Samostatně řešit příklady řešené v tomto textu, řešení zdůvodnit, nakreslit náčrtky;
 - IV) Řešit příklady typu [KP 1.3-1](#) až [KP 1.3-23](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.4-4](#) až [KP 2.4-8](#).

Předpokládané znalosti: Kinematika (odst. 2.1), Derivace a integrály (1.4).

2.4.1 První pohybový zákon

První pohybový zákon vyslovuje tvrzení, že existuje zvláštní skupina vztažných soustav, tzv. inerciální vztažné soustavy. Inerciální vztažná soustava je např. přibližně malá část povrchu


2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY

Země (nazýváme ji někdy laboratorní vztažná soustava) nebo (rovněž přibližně) soustava daná vlakem rovnoměrně jedoucím po přímé koleji.

Provedeme úvahu vedoucí k definici inerciální vztažné soustavy. Uvažujme o té části vesmíru, kterou zaujímá sluneční soustava a představme si, že by v ní nebyla tělesa sluneční soustavy, nýbrž jen několik malých kosmických sond, které by se pohybovaly jedna vůči druhé s vyřazenými motory. Vzájemné gravitační působení těchto sond, jež lze považovat za hmotné body, je zanedbatelně malé. Předpokládejme, že je zanedbatelně malé i působení záření (elektromagnetického, světelného) přicházejícího z vesmíru. Taková malá tělesa, jež se pohybují jen účinkem gravitačního působení vesmíru (o jehož mohutnosti a vlastnostech se názory odborníků různí), budeme nazývat volné hmotné body. Vybereme jednu ze sond, označíme ji např. S_1 . Zastavíme její případnou rotaci vzhledem k vesmíru (tj. vzhledem ke stálícím) a ponecháme ji samu sobě. Spojíme s ní souřadnicový systém $Oxyz$ a zavedeme v něm čas t (viz odst. 1.3.1).

Všechny dosavadní pokusy provedené na Zemi i s kosmickými sondami vedou k tomu, že se domníváme, že

1. Sonda S_1 se nezačne sama od sebe vzhledem k vesmíru otáčet,
2. Všechny ostatní sondy se budou v souřadnicové soustavě $Oxyz; t$ pohybovat rovnoměrně přímočaře nebo budou v klidu.

Definice: Inerciální soustava souřadnic je taková soustava, v níž se každý volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo je v klidu. 

Z předešlé úvahy je zřejmé, že souřadnicová soustava daná sondou S_1 je inerciální a že každá soustava vytvořená analogickým způsobem s užitím libovolného hmotného bodu, je inerciální. Dokázat to ovšem nelze, protože volný hmotný bod v přítomnosti těles sluneční soustavy nelze realizovat. Proto vyslovujeme tvrzení o existenci inerciální vztažné soustavy jako (nedokázaný) axiom. Nazýváme jej první pohybový zákon:

Definice: 1. pohybový zákon: Existuje inerciální vztažná soustava; podrobněji: Existuje taková soustava souřadnic, v níž se každý volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo je v klidu.

Realizace inerciální soustavy: heliocentrická soustava. Ve vesmírných měřítcích je Slunce hmotný bod, který se pohybuje (téměř) jen účinkem gravitačního působení vesmíru (gravitační působení planet je zanedbatelně malé). Slunce je tedy volný hmotný bod. Soustava souřadnic $Oxyz; t$, jejíž střed je ve středu Slunce (přesněji: v těžišti sluneční soustavy) a jejíž osy jsou orientovány do pevných směrů vesmíru (tj. k určitým stálícím), je tedy inerciální. Nazývá se heliocentrická soustava. Označíme ji HCS.

Jiné inerciální soustavy souřadnic získáme takto: Předpokládáme, v souladu s experimenty prováděnými při nerelativistických rychlostech, že v každé soustavě souřadnic lze seřadit hodiny tak, aby jejich údaje byly shodné s údaji hodin jiných soustav, neboli, že čas je ve všech souřadnicových soustavách stejný. Z předešlých závěrů o pohybu volných hmotných bodů plyne, že všechny inerciální soustavy jsou právě ty, které vykonávají vzhledem k jedné inerciální soustavě, konkrétně tedy vzhledem k heliocentrické, rovnoměrnou translaci, nebo které jsou vzhledem k ní v klidu. Tyto soustavy vykonávají rovnoměrnou translaci i jedna vůči druhé.

Souřadnicová soustava, jejíž počátek splývá trvale se středem Země a jejíž osy jsou orientovány do pevných směrů vesmíru, se nazývá geocentrická. Není inerciální, neboť má v HCS zrychlení vlivem gravitační síly, kterou působí Slunce na Zemi. Lze však dokázat, že tato soustava má vlastnosti inerciální vztažné soustavy, jestliže při zkoumání dějů v ní nezapočítáme mezi působící síly gravitační síly Slunce.

2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY

S menším oprávněním (pro většinu dějů však s dostatečnou přesností) lze považovat za inerciální soustavu laboratorní soustavu kdekoli na povrchu Země a soustavu, která vykonává vzhledem k laboratorní soustavě rovnoměrnou translaci.

Vztažné soustavy, které nejsou inerciální, se nazývají neinerciální. Je to např. vztažná soustava daná otáčejícím se kolotočem, rozjíždějícím se vlakem atd.

2.4.2 Druhý pohybový zákon

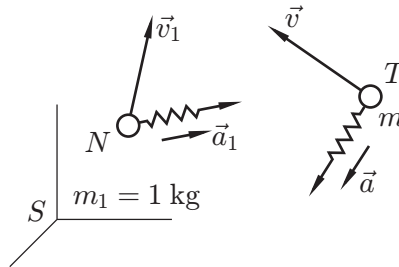
{1.2.3B}

Druhý pohybový zákon shrnuje poznatky o tom, jaký vliv má na pohyb hmotného bodu v inerciální vztažné soustavě působení jiných těles nebo silových polí. Je vyjádřen známým vztahem (2.36). Připomeneme definici a vlastnosti veličin m - hmotnost, \vec{F} - síla.



1. Hmotnost m je veličina, která charakterizuje setrvačné vlastnosti těles, neboli jejich setrvačnost. Těmito názvy označujeme tu vlastnost těles (hmotných bodů), že bez působení ostatních těles a polí nemění svoji rychlost vzhledem k inerciální soustavě. Dále pak to, že dvě různá tělesa nabývají stejným působením jiného tělesa (např. působením stejných a stejně protažených pružin) různá zrychlení.

Hmotnost m tělesa T je definována takto: Zvolíme nejprve těleso, které prohlásíme za normál hmotnosti a jehož hmotnost prohlásíme za jednotkovou. V soustavě SI je to normál N uložený v Sévres, jehož hmotnost je podle definice $m_1 = 1$ kg. Poté budeme na obě tělesa N a T , která necháme pohybovat se v inerciální soustavě S nerelativistickými rychlostmi v_1 a v ($v_1, v \ll c$) (obr. 2.23), působit stejnými a stejně protaženými pružinami a zjistíme jejich zrychlení \vec{a}_1, \vec{a} . Utvoříme podíl a_1/a . Vykonáme-li tentýž pokus s jinými rychlostmi \vec{v}_1, \vec{v} a s jinak orientovanými a protaženými pružinami zjišťujeme, že poměr a_1/a se nemění. To nám umožňuje definovat hmotnost m tělesa T vztahem



Obr. 2.23: K definici hmotnosti m tělesa T .

{obr1.2-22}

{1.2-31}

$$m = \frac{a_1}{a} m_1 = \frac{a_1}{a} \text{ kg.} \quad (2.31)$$

Z této definice plyne, že hmotnost m tělesa je v nerelativistické mechanice konstantní veličina, nezávislá na pohybu tělesa.

Informace:

- (a) Výsledky měření při pohybu částic v urychlovačích, v nichž částice dosahují relativistických rychlostí, vedou k závěru, že zrychlení, které získá rychle se pohybující částice, je menší než zrychlení, které získá tatáž pomalu se pohybující částice účinkem stejného pole. Její hmotnost s rostoucí rychlostí v roste a to podle vztahu

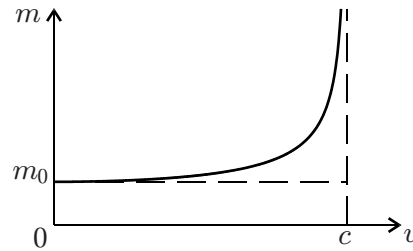


{1.2-32}

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.32)$$

2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY

Tento vztah byl získán nejprve teoreticky. Platí pro všechny rychlosti, nejen pro relativistické. Pro nerelativistické rychlosti ($v \ll c$) však platí přibližně $m \doteq m_0 (= \text{konst.})$. Normál v Sévres má tedy, přesně řečeno, hmotnost 1 kg jen když je v klidu. Závislost m na v je znázorněna v obr. 2.24.



{obr1.2-23}

Obr. 2.24: Relativistická závislost hmotnosti m částice na velikosti její rychlosti v .

- (b) Teorie relativity dochází k závěru, že při změně vnitřní energie tělesa se změní i jeho hmotnost, a to podle vztahu

$$\Delta E = c^2 \Delta m .$$

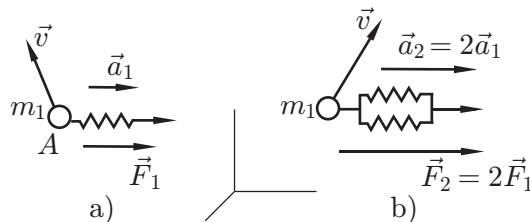
Experimenty tento vztah potvrzují.

- (c) Hmotnost je veličina aditivní. To značí, že vznikne-li ze dvou těles o hmotnostech m_1, m_2 nové těleso a vnitřní energie této soustavy se přitom nezmění, je hmotnost nového tělesa dána vztahem

$$m = m_1 + m_2 .$$

2. Síla \vec{F} je vektorová fyzikální veličina, která charakterizuje působení jednoho tělesa (nebo pole) na druhé těleso, a to takové působení, které má za následek jeho deformaci, nebo změnu rychlosti (nejčastěji obojí).

Zavedeme ji takto: Budeme uvažovat o hmotném bodě o hmotnosti $m_1 = 1$ kg pohybujícím se v inerciální vztažné soustavě rychlostí \vec{v} . Přitom nechť na něj působí pouze pružina P_1 tak, že mu uděluje zrychlení \vec{a}_1 o velikosti $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$ (obr. 2.25a). Působení této pružiny charakterizujeme fyzikální veličinou, kterou nazveme síla a kterou označíme \vec{F}_1 . Její směr je shodný se směrem pružiny, její velikost prohlásíme za jednotkovou. Jednotku nazveme 1 newton = 1 N. Bod A (obr. 2.25) je působiště síly.



{obr1.2-24}

Obr. 2.25: Působení jedné (a) a dvou (b) pružin na hmotný bod.

Účinek dvou takových stejných pružin podle obr. 2.25b charakterizuje síla \vec{F}_2 o velikosti 2 newtony a stejného směru. Tedy $\vec{F}_2 = 2\vec{F}_1$, $F_2 = 2 \text{ N}$. Podobně můžeme realizovat sílu $\vec{F}_3 = 3\vec{F}_1$ atd. Při volbě dostatečně jemných pružin můžeme takto (teoreticky) realizovat sílu jakéhokoliv směru a jakéhokoliv velikosti.

2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY

Působení jednoho tělesa na druhé pak můžeme nahradit působením vhodné pružiny a definovat tak sílu, kterou první těleso působí na druhé.

Poznamenejme, že tento názorný způsob definice síly působící na makroskopické těleso selhává např. při definici síly, kterou působí elektromagnetické pole na elektron. Pak je možno považovat za definiční vztah pro sílu buď vztah (2.36) nebo vztah (2.38), z nichž druhý je definičním vztahem pro sílu v teorii relativity.

Důležité informace: V inerciální vztažné soustavě charakterizuje síla působení jednoho tělesa (nebo pole) na druhé těleso. Neexistuje síla bez něčeho, co by ji vyvolávalo.

3. Druhý Newtonův pohybový zákon shrnuje v jediném vztahu (2.36) tyto výsledky zkoumání pohybu hmotného bodu v inerciální soustavě:

a) Mění-li se síla působící na stejný hmotný bod, mění se i jeho zrychlení a platí

$$\{1.2-33\} \quad \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{F}, a \sim F. \quad (2.33)$$

Zrychlení má tedy stejný směr jako síla (obr. 2.25). Jejich velikosti jsou si přímo úměrné.

b) Působí-li tatáž síla na hmotné body o různých hmotnostech, pak pro jejich hmotnosti a zrychlení platí

$$\{1.2-34\} \quad a \sim \frac{1}{m}. \quad (2.34)$$

c) Působí-li na hmotný bod současně několik sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, pak jejich pohybový účinek je stejný jako účinek jejich výslednice.

$$\{1.2-35\} \quad \vec{F}_v = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad \text{výslednice sil} \quad (2.35)$$

{ram-18}

Experimentálně získané vztahy lze vyjádřit při užití jednotek kg, m/s², N jediným vztahem, který se nazývá druhý Newtonův pohybový zákon:

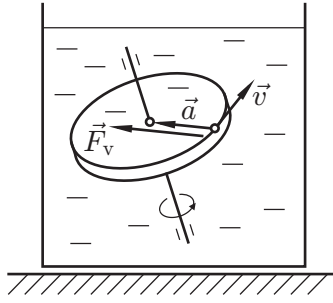
$$\{1.2-36\} \quad m\vec{a} = \vec{F}_v. \quad \text{druhý Newtonův pohybový zákon} \quad (2.36)$$

{ram-19}

Informace:

- Vztah (2.36) platí pro hmotný bod, \vec{a} je jeho zrychlení v inerciální vztažné soustavě a \vec{F}_v je výslednice působících sil. Neobsahuje informaci o rychlosti hmotného bodu, jen o její časové změně dané zrychlením \vec{a} .
- Vztah (2.36) vyjadřuje souvislost mezi veličinou \vec{F}_v charakterizující příčinu změny pohybu a veličinou \vec{a} , charakterizující změnu pohybu, tj. důsledek působící síly. Nazývá se také pohybová rovnice. Je to nejdůležitější zákon celé nerelativistické mechaniky.
- Známe-li pro určitý hmotný bod jeho zrychlení, můžeme ze vztahu (2.36) určit výslednici sil, které na něj působí, aniž bychom znali jednotlivé síly. Např. na hmotný bod, který je připevněný na okraji kotouče rovnoměrně rotujícího ve vodě podle obr. 2.26, působí tíhová síla \vec{G} (kterou známe) a další dvě síly: \vec{F}_1 , kterou na hmotný bod působí voda a \vec{F}_2 , kterou na hmotný bod působí kotouč. Síly \vec{F}_1, \vec{F}_2 neznáme, přesto

2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY



Obr. 2.26: Výsledná síla \vec{F}_v působící na hmotný bod, jeho zrychlení \vec{a} a rychlost \vec{v} . Hmotný bod je připevněn na okraji kotouče rovnoměrně rotujícího ve vodě.

{obr1.2-25}

můžeme určit výslednici $\vec{F}_v = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G}$: podle vztahu (2.36) je $\vec{F}_v = m\vec{a}$. Pohyb je rovnoměrný, tedy $a_t = 0$, takže $\vec{a} = \vec{a}_n$. Síla $\vec{F}_v = m\vec{a}$ tedy míří do středu kruhové dráhy a má velikost $F_v = mv^2/R$, kde R je poloměr kotouče.

4. Vztah (2.36) byl vysloven pouze pro hmotný bod, platí však i v některých jiných situacích, zejména při translačním pohybu tuhého tělesa — viz odst. 2.3.2. V tom případě je m hmotnost tělesa, \vec{a} jeho zrychlení a \vec{F}_v výslednice sil, které na těleso působí.

Důkaz: Rozdělíme těleso na malé elementy (hmotné body) a napíšeme pro každý z nich pohybovou rovnici, tj. $\Delta m_1 \vec{a} = \Delta \vec{F}_1$, $\Delta m_2 \vec{a} = \Delta \vec{F}_2$, ... Tyto rovnice sečteme a dostaneme rovnici (2.36).



5. Druhý Newtonův pohybový zákon v relativisticky platném tvaru.

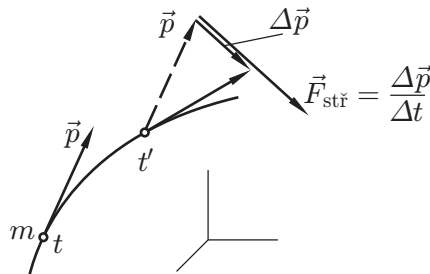
Nejprve připomeneme definici hybnosti \vec{p} hmotného bodu pohybujícího se rychlostí \vec{v} v určité vztažné soustavě (obr. 2.27):

{1.2-37}

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad \text{definice hybnosti hmotného bodu} \quad (2.37)$$

{ram-20}

Jednotka: $[p] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Podobně jako rychlost \vec{v} je i \vec{p} veličina relativní: má v různých vztažných soustavách různé hodnoty.



Obr. 2.27: Vztah mezi změnou hybnosti Δp hmotného bodu v časovém intervalu Δt a střední výslednicí sil \vec{F}_{stir} působící v témže časovém úseku na hmotný bod.

{obr1.2-26}

2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY

Při pohybu hmotného bodu účinkem sil o výslednici \vec{F}_v se \vec{p} mění (obr. 2.27). Je-li vztažná soustava inerciální a jsou-li rychlosti nerelativistické (tj. je-li $m = \text{konst.}$), platí

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_v, \quad (\text{neboť } dm/dt = 0),$$

tedy

{1.2-38}

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_v. \quad \text{druhý Newtonův pohybový zákon v obecném tvaru} \quad (2.38)$$

{ram-21}

Tedy: z rovnice (2.36)→(2.38). Analogicky se dokáže, že (2.38)→(2.36). Vztahy (2.36), (2.38) jsou tedy v nerelativistické mechanice ekvivalentní. Pozn.: V obr. 2.27 je naznačeno určení střední síly působící na hmotný bod v časovém intervalu $\langle t, t' \rangle$.

Informace: Při relativistických rychlostech není m konstantní, ale je funkcí velikosti rychlosti a ta je (obecně) funkcí času. Je tedy m (obecně) funkcí času. Pak platí

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a} \neq m\vec{a}.$$

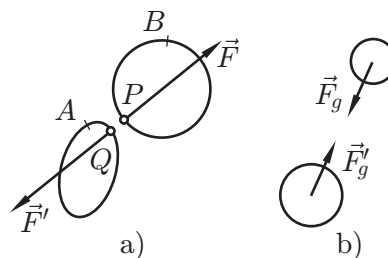
Vztahy (2.36), (2.38) pak nejsou ekvivalentní: platí-li jeden z nich, neplatí (obecně) druhý. Teorie relativity dochází k závěru (a experimenty jej potvrzují), že vztah (2.38) má obecnou platnost, zatím co vztah (2.36) platí pouze přibližně.

2.4.3 III. pohybový zákon

{1.2.3C}

Třetí pohybový zákon vyslovuje tvrzení o silách, jimiž na sebe působí dvě tělesa, nebo dvě částice téhož tělesa, v místě styku (obr. 2.28a). Zní:

Definice: Působí-li jedno těleso na druhé při jejich styku silou \vec{F} , působí druhé na první silou $\vec{F}' = -\vec{F}$.



Obr. 2.28: Ke třetímu Newtonovu pohybovému zákonu.

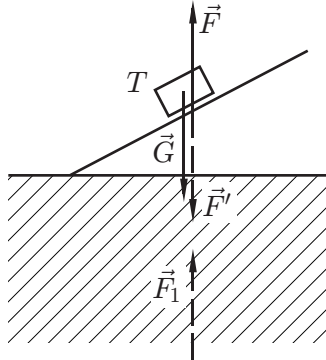
Těleso A působí na B silou \vec{F} , jejímž působištěm je bod P (obr. 2.28a). Těleso B působí na A silou \vec{F}' , jejímž působištěm je bod Q.

Nazveme-li jednu ze sil akcí, je druhá reakce. Proto se tento zákon nazývá někdy „zákon akce a reakce“ nebo „zákon vzájemného působení“. Platí i tehdy, když tělesa na sebe působí prostřednictvím svých polí, např. gravitačních (obr. 2.28b), jestliže jsou tělesa v uvažované vztažné soustavě v klidu. Jestliže se pohybují, uplatňuje se při vzájemném působení konečná rychlost šíření změn ve fyzikálních polích a zákon akce a reakce nemusí platit.

Třetí pohybový zákon vyslovil Isaac Newton na základě rozboru zákonitostí pohybů těles.

{pr1.2-5} **KP 2.4-1** _____

Na drsné nakloněné rovině leží v klidu těleso T o hmotnosti m . Určete síly, které na ně působí. Ke každé z těchto sil určete reakci. Uveďte působiště všech sil (obr. 2.29).



Obr. 2.29: Příklad KP 2.4-1.

{obr1.2-28}

Řešení:

Na T působí tíhová síla $\vec{G} = m\vec{g}$ (v celém jeho objemu, zakresluje se do těžiště) a síla \vec{F} od nakloněné roviny (na dolní stěně tělesa v ploše styku). Ježto T je v klidu v laboratorní soustavě, platí $\vec{a} = \vec{0}$, takže $\vec{F}_v = m\vec{a} = \vec{0}$. Přitom $\vec{F}_v = \vec{G} + \vec{F}$. Tedy $\vec{F} = -\vec{G}$.

Reakcí na sílu \vec{G} je (přibližně) síla $\vec{F}_1 = -\vec{G}$, kterou působí gravitační pole buzené tělesem T na Zemi v celém jejím objemu. Reakcí na sílu \vec{F} je síla \vec{F}' , kterou působí T na nakloněnou rovinu v místě styku.

2.4.4 Nejčastější síly

{1.2.3D}



1. Gravitační síla \vec{F}_g . Působí na každé těleso v celém jeho objemu, je způsobena gravitačním polem, které vytvářejí (budí) všechna tělesa (odst. 2.6). Je hlavní složkou tíhové síly \vec{G} .
2. Tíhová síla (neboli tíha) \vec{G} . Působí na každé těleso v blízkosti povrchu Země a je rovna $\vec{G} = m\vec{g}$, kde m je hmotnost tělesa a \vec{g} tíhové zrychlení v daném místě. Je vektorovým součtem gravitační síly \vec{F}_g buzené gravitačním polem Země a tzv. odstředivé síly setrvačné \vec{F}_o^* (viz odst. 2.6) působící v důsledku toho, že Země se otáčí a že tedy laboratorní soustava není přesně inerciální. Platí tedy $\vec{G} = \vec{F}_g + \vec{F}_o^*$ ($\doteq \vec{F}_g$, neboť $\vec{F}_o^* \ll F_g$).
Nepůsobí-li na těleso jiná síla než \vec{G} , uděluje mu \vec{G} zrychlení $\vec{g} = \vec{G}/m$. Směr síly \vec{G} je (podle definice) svislý směr v daném místě.
3. Síly vzájemného působení při styku těles. Příklady: hřídel na ložisko — ložisko na hřídel; plyn ve válci na píst — píst na plyn; lano výtahu na kabinu — kabina na lano atd.
4. Třecí síla, síla valivého odporu

- a) Statická třecí síla: $\vec{F}_{tř}$. Je to tečná složka síly, kterou působí podložka na těleso, které je vůči ní v klidu. Její velikost může nabýt hodnot z intervalu $\langle 0, \vec{F}_{tř,max} \rangle$. Přitom $\vec{F}_{tř,max}$ závisí na kvalitě styčných ploch a je přímo úměrná velikosti normálové složky \vec{N} síly, kterou podložka působí na těleso, $F_{tř,max} \sim N$. Veličina f_s daná vztahem

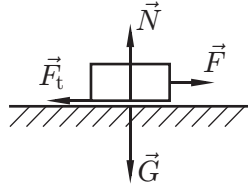
2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY

{1.2-39}

$$f_s = \frac{|\vec{F}_{\text{tr,max}}|}{N} \rightarrow F_{\text{tr,max}} = f_s N \quad \text{síla statického tření} \quad (2.39)$$

{ram-22}

závisí jen na kvalitě styčných ploch a nazývá se součinitel statického tření.



Obr. 2.30: Síly působící na těleso pohybující se po vodorovné drsné podložce, které je lanem taženo ve směru síly \vec{F} .

{obr1.2-29}

Působí-li např. na těleso T , které leží zpočátku v klidu na klidné vodorovné podložce, lano ve vodorovném směru silou \vec{F} (obr. 2.30), jejíž velikost roste od nuly, zůstane těleso nejprve v klidu ($\vec{a} = \vec{0}$), takže $\vec{F}_{\text{tr}} = -\vec{F}$. Dosáhne-li velikost síly \vec{F} hodnoty $f_s N$, dosáhne \vec{F}_{tr} hodnoty $\vec{F}_{\text{tr,max}}$. Při dalším zvětšení \vec{F} se začne T pohybovat a třecí síla se zmenší. Nazývá se pak kinetická (dynamická) třecí síla.

- b) Kinetická (dynamická) třecí síla, \vec{F}_{tr} . Je to tečná složka síly, kterou působí podložka na těleso, které se vzhledem k ní pohybuje smykem. Má opačný směr než rychlost \vec{v} tělesa vzhledem k podložce, tedy $\vec{F}_{\text{tr}} = \updownarrow \vec{v}$. Její velikost je dána vztahem

{1.2-40}

$$F_{\text{tr}} = f_d N. \quad \text{dynamická třecí síla} \quad (2.40)$$

{ram-23}

Veličina f_d definovaná tímto vztahem se nazývá součinitel kinetického (neboli dynamického) tření. Závisí na jakosti styčných ploch a částečně (většinou nepatrně) i na rychlosti v .

- c) Síla valivého odporu, \vec{F}_o . Je to tečná složka síly, kterou působí podložka na kola, která se po ní odvalují. Platí opět $F_o = \phi_{\text{val}} N$. Veličina ϕ_{val} se nazývá součinitel valivého odporu, závisí na kvalitě styčných ploch a částečně na rychlosti odvalování.

2.4.5 Výslednice sil při křivočarém pohybu

{1.2.3E}

Pohybuje-li se hmotný bod v inerciální soustavě účinkem jedné nebo několika sil po zakřivené rovině trajektorii, souvisí výslednice \vec{F}_v těchto sil působících na hmotný bod v obecné poloze (bod P v obr. 2.31) s jeho zrychlením \vec{a} vztahem $\vec{F}_v = m\vec{a}$, kde \vec{a} je dáno vztahy (2.11). Odsud plyne (obr. 2.31):

{1.2-41}

$$\vec{F}_v = m\vec{a} = m\vec{a}_n + m\vec{a}_t = \vec{F}_n + \vec{F}_t. \quad (2.41)$$

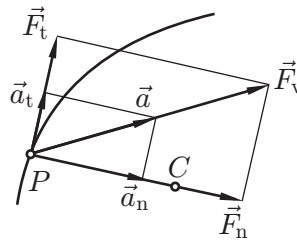
Přitom:

- \vec{F}_n je normálová složka výslednice sil \vec{F}_v . Míří do středu křivosti C křivky v bodě P a má velikost $F_n = mv^2/R$, kde v je rychlost hmotného bodu v bodě P a R je poloměr křivosti trajektorie v bodě P . Tato složka výslednice sil se proto nazývá síla dostředivá a někdy se značí \vec{F}_d .

- \vec{F}_t je tečná složka výslednice sil. Její velikost je $F_t = m|dv/dt|$.

Je-li trajektorie zakřivena (tj. není-li přímka), je $|\vec{F}_n| \neq 0$. Je-li při pohybu $v = \text{konst.}$, tj. je-li pohyb rovnoměrný, je $|\vec{F}_t| = 0$, takže $\vec{F}_v = \vec{F}_n$.

2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY



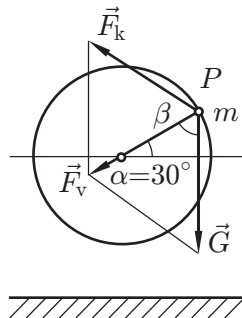
{obr1.2-30} Obr. 2.31: Vztah mezi výslednicí \vec{F}_v všech sil působících na hmotný bod a jeho zrychlením \vec{a} .

Důležité: Dostředivá síla není nějaká zvláštní síla, která působí kromě jiných sil „navíc“. Je to normálová složka výslednice sil působících na hmotný bod.

{pr1.2-6} **KP 2.4-2** —————

Kotouč o poloměru $r = 50 \text{ cm}$ se otáčí rovnoměrně kolem vodorovné osy úhlovou rychlostí $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$ (obr. 2.32). Na okraji kotouče je upevněno malé těleso (hmotný bod) o hmotnosti $m = 0,2 \text{ kg}$. Zanedbejte odpor vzduchu a řešte úkoly:

1. Vyjmenujte všechny síly, které působí na hmotný bod v bodě P (obr. 2.32);
2. Určete výslednici sil působících na hmotný bod v P a zakreslete ji do náčrtku;
3. Určete všechny síly působící na hmotný bod v P .



{obr1.2-31}

Obr. 2.32: Příklad KP 2.4-2.

Řešení:

1. Síly = ? Tíhová síla $\vec{G} = m\vec{g}$; $G = 0,2 \cdot 10 \text{ N} = 2 \text{ N}$; Síla od kotouče, \vec{F}_k ;
2. $\vec{F}_v = ?$. $\vec{F}_v = m\vec{a} = m\vec{a}_n$ ($\vec{a}_t = \vec{0}$, neboť pohyb je rovnoměrný, $v = \text{konst.}$). Směr: $\vec{F}_v = \vec{F}_n$, tj. do středu trajektorie hmotného bodu; velikost: $F_v = m\omega^2 r = 0,2 \cdot 4^2 \cdot 0,5 \text{ N} = 1,6 \text{ N}$;
3. Síly = ? \vec{G} ; $\vec{F}_k = ?$. $\vec{F}_v = \vec{G} + \vec{F}_k \rightarrow \vec{F}_k = \vec{F}_v - \vec{G}$. Směr \vec{F}_k - viz obr. 2.32. Velikost:

$$F_k^2 = G^2 + F_v^2 - 2GF_v \cos \beta \rightarrow F_k = \sqrt{\dots} = 1,83 \text{ N.}$$

2.4.6 Vzájemné translační pohyby vztažných soustav

{1.2.3F}

V této části budou vyšetřeny vztahy mezi polohovými vektory, rychlostmi a zrychleními hmotných bodů ve dvou vztažných soustavách konajících vzhledem k sobě translační pohyb.

2.4.6.1 Obecný translační pohyb

Nechť se vztažná soustava $S'(O', x', y', z', t')$ pohybuje vzhledem k soustavě $S(O, x, y, z, t)$ translačním pohybem (obr. 2.33). Osy soustavy S' svírají přitom s osami soustavy S stále úhly. Pro časy t, t' v obou soustavách platí $t' = t$. Uvažujme přitom o hmotném bodu, který se pohybuje (obecně vzhledem k oběma soustavám). Jeho trajektorie v S je v obr. 2.33 označena q . Označme postupně $\vec{r}(t), \vec{r}'(t), \vec{R}(t)$ vektorové funkce udávající polohový vektor v soustavě S , v soustavě S' a polohový vektor počátku O' vzhledem¹ k S .

Z obr. 2.33 je zřejmé, že v každém čase platí

$$\{1.2-42\} \quad \vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t), \quad t = t'. \quad (2.42)$$

Derivujeme-li obě strany podle času $t(=t')$, dostaneme

$$\{1.2-43\} \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_{O'}(t) + \vec{v}'(t), \quad \text{skládání rychlostí} \quad (2.43)$$

{ram-24}

kde

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

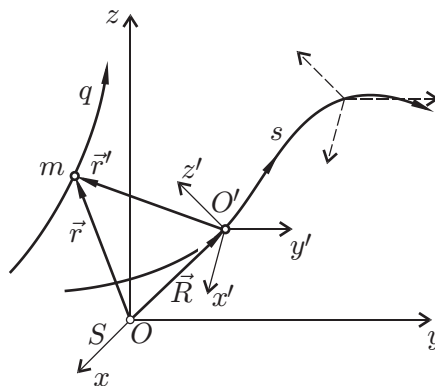
je rychlost hmotného bodu v S (někdy se nazývá „absolutní“ rychlost),

$$\vec{v}'(t) = \frac{d\vec{r}'(t')}{dt'} = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt}$$

je rychlost hmotného bodu v S' (tzv. relativní rychlost) a

$$\vec{v}_{O'}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt}$$

je rychlost translačního pohybu celé soustavy S' vzhledem k S (tzv. unášivá rychlost).



Obr. 2.33: Popis pohybu hmotného bodu ve vztažných soustavách $S(O, x, y, z, t)$ a $S'(O', x', y', z', t' = t)$.

{obr1.2-32}

Vztah (2.43) vyjadřuje dobře známý zákon skládání rychlostí nerelativistické fyziky. Derivováním rovnice (2.43) podle času dostaneme

¹Ríkáme: Počátek O' soustavy $S'(O', x', y', z', t')$ se pohybuje po křivce s vzhledem k soustavě $S(O, x, y, z, t)$.

{1.2-44}

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{O'}(t) + \vec{a}'(t), \quad \text{skládání zrychlení} \quad (2.44)$$

{ram-25}

kde

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

je zrychlení hmotného bodu v S ,

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{v}'(t')}{dt'} = \frac{d\vec{v}'(t)}{dt}$$

je zrychlení hmotného bodu v S' ,

$$\vec{a}_{O'}(t) = \frac{d\vec{v}_{O'}(t)}{dt}$$

je zrychlení počátku O' vztažné soustavy S' vzhledem k S .

2.4.6.2 Rovnoměrný přímočarý translační pohyb

Ze vztahu (2.44) plyne: koná-li S' vzhledem k S rovnoměrný přímočarý pohyb, nebo je-li vzhledem k S v klidu, je $\vec{v}_{O'}(t) = \text{konst.}$, tedy $\vec{a}_{O'}(t) = \vec{0}$, takže

{1.2-45}

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t). \quad \text{zrychlení hmotného bodu v inerciálních soustavách} \quad (2.45)$$

{ram-26}

Je-li soustava S inerciální a je-li zrychlení libovolného volného hmotného bodu $\vec{a}(t) = \vec{0}$, pak ze vztahu (2.45) plyne $\vec{a}'(t) = \vec{0}$, tj. každý volný hmotný bod se pohybuje rovnoměrně přímočaře i v S' . Soustava S' je tedy rovněž inerciální. Tím je teoreticky odvozen výsledek, který jsme již uvedli jako experimentální fakt: Inerciální vztažné soustavy konají vzájemný rovnoměrný translační pohyb.

Pohybová rovnice hmotného bodu v jedné inerciální soustavě S zní:

$$m\vec{a} = \vec{F}_v.$$

Jak zní v druhé inerciální soustavě S' ? Úvaha:

1. Platí $\vec{a}' = \vec{a}$;
2. Hmotnost je při nerelativistických rychlostech hmotného bodu nezávislá na pohybu hmotného bodu, tedy: hmotnost hmotného bodu v $S' =$ hmotnost hmotného bodu v S , tj. $m' = m$;
3. Síly charakterizují působení reálných objektů na hmotný bod, proto se o nich v nerelativistické fyzice předpokládá, že jsou v S' a S stejné, tj. že platí $\vec{F}'_v = \vec{F}_v$. Tedy

$$m\vec{a} = \vec{F}_v, \vec{a} = \vec{a}', m = m', \vec{F}_v = \vec{F}'_v \rightarrow m'\vec{a}' = \vec{F}'_v,$$

což značí: Pohybová rovnice hmotného bodu má ve všech inerciálních vztažných soustavách stejný tvar. Odtud plyne, že děje v mechanických soustavách probíhají při stejných počátečních podmínkách (polohách, rychlostech) a při stejném silovém působení ve všech inerciálních vztažných soustavách stejně. Tento výsledek se nazývá z historických důvodů Galileův (neboli mechanický) princip relativity. Jeho zobecnění na všechny děje, nejen mechanické, formuloval A. Einstein. Je základním postulátem teorie relativity (viz část 3.1 na straně 168 tohoto textu).

2.4.7 Pohyb v neinerciálních soustavách

{1.2.3G}

Při zkoumání mechanických pohybů těles se zavádějí vztažné soustavy tak, aby popis a vyšetřování dějů bylo co nejjednodušší. Ukazuje se, že někdy jsou pro to vhodné i neinerciální vztažné soustavy. V těchto soustavách neplatí vztah $\vec{F}_v = m\vec{a}$, který platí v inerciálních soustavách. Vztahy mezi působícími silami a zrychlením jsou v neinerciálních soustavách složitější.

Hlavním cílem našich úvah bude ukázat, že pohybovou rovnici $\vec{F}_v = m\vec{a}$ lze přidáním vhodných členů, jež mají význam setrvačných sil, upravit tak, aby zůstala v platnosti i v neinerciálních soustavách. Omezíme se přitom pouze na jednoduché, avšak často se vyskytující případy soustav uvedených v následujících částech 2.4.7.1 a 2.4.7.2.

2.4.7.1 Neinerciální soustava vykonávající nerovnoměrný translační pohyb

{Nsvntp1}

- a) Formální úvahy. Uvažujme o vztažné soustavě S' , která koná nerovnoměrný translační pohyb vzhledem k inerciální vztažné soustavě S (viz obr. 2.33). Budeme zkoumat hmotný bod, který se pohybuje účinkem sil o výslednici \vec{F}_v vzhledem k oběma soustavám S, S' .

Rychlosti \vec{v}, \vec{v}' hmotného bodu a jeho zrychlení \vec{a}, \vec{a}' v soustavách S a S' jsou vázány vztahy (2.43), (2.44), tj.

{1.2-46}

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}', \quad \vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}', \quad (2.46)$$

kde $\vec{v}_{O'}$ je okamžitá rychlost a $\vec{a}_{O'}$ okamžité zrychlení (počátku O') soustavy S' vzhledem k S . Pohybová rovnice hmotného bodu v soustavě S a S' :

{1.2-47}

$$\begin{array}{l} S \quad (\text{inerciální}) : \quad m\vec{a} = \vec{F}_v \\ S' \quad (\text{neinerciální}) : \quad m\vec{a} = \vec{F}_v \rightarrow m(\vec{a}_{O'} + \vec{a}') = \vec{F}_v \rightarrow m\vec{a}' = \vec{F}_v - m\vec{a}_{O'}, \end{array} \quad (2.47)$$

{ram-27}

tj.

{1.2-48}

$$m\vec{a}' = \vec{F}_v + \vec{F}^*, \quad \text{pohybová rovnice v neinerciální soustavě} \quad (2.48)$$

{ram-28}

kde

{1.2-49}

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_{O'}. \quad \text{setrvačná síla} \quad (2.49)$$

{ram-29}

Poznamenejme, že hmotnost m a síla \vec{F} jsou v nerelativistické fyzice veličiny nezávislé na volbě vztažné soustavy, jsou tedy v S a S' stejné.

Rovnice (2.48) má shodný tvar s rovnicí (2.47), jestliže veličinu $\vec{F}^* = -m\vec{a}_{O'}$ prohlásíme za sílu; na pravé straně rovnice (2.48) je pak součet všech sil. Tato síla se liší od sil, jejichž výslednice je označena \vec{F}_v tím, že necharakterizuje působení reálných objektů na hmotný bod, nýbrž je způsobena zrychleným pohybem soustavy S' . Veličina \vec{F}^* je nový typ síly. Abychom ji odlišili od předešlých, nazveme ji síla setrvačná, zatímco ostatní síly budeme nazývat síly skutečné (neboli „pravé“).

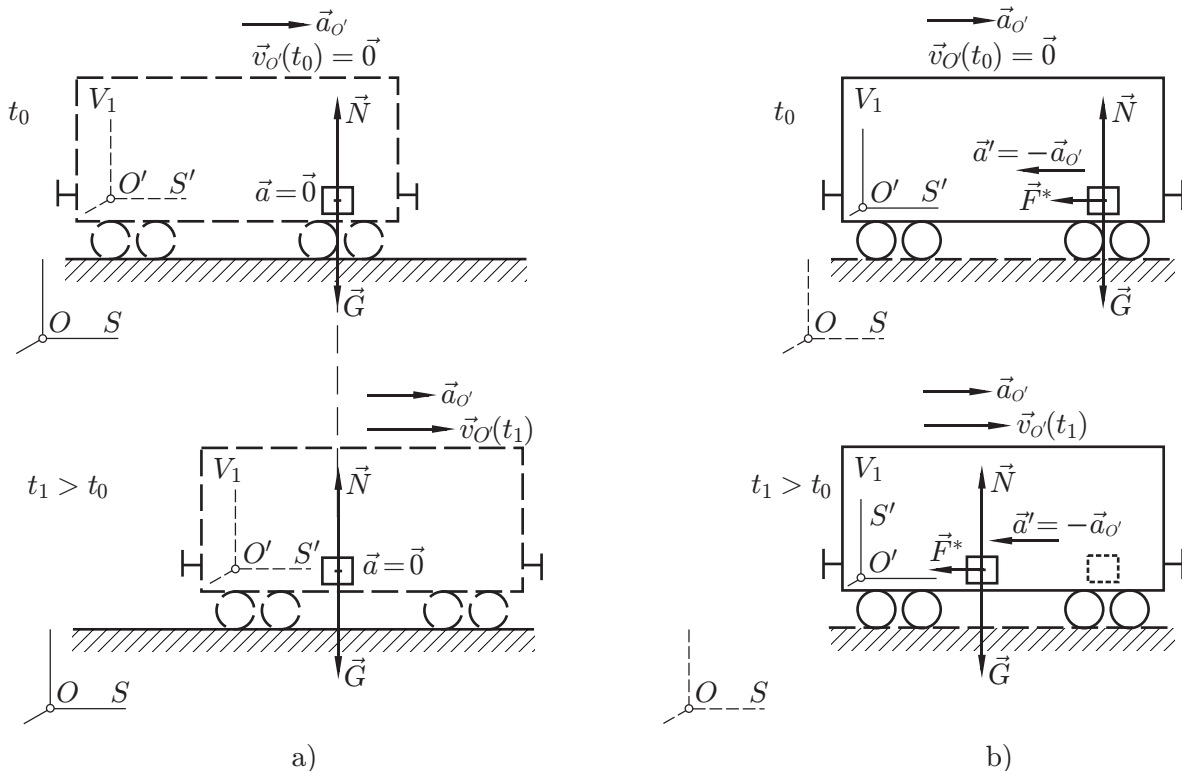
Shrneme provedený myšlenkový postup: Postulujeme platnost pohybové rovnice pro hmotný bod $m\vec{a} = \vec{F}$ i v soustavě S' . Pak ke skutečným silám je nutno přidat ještě sílu setrvačnou \vec{F}^* .

2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY

Poznamenejme ihned, že zavedením názvu „skutečné síly“ pro síly, jež jsme definovali dříve, nechceme říci, že síly setrvačné jsou neskutečné. Je to jen název, který jsme užili v soulase s literaturou. Síly setrvačné jsou svými účinky právě tak reálné jako síly, které jsme nazvali „skutečné“.

b) Fyzikální význam a užití setrvačné síly \vec{F}^* ukážeme na příkladech:

1. Ve vagoně V_1 rozjíždějícího se vlaku (soustava S'), který má vzhledem k vodorovnému povrchu Země (soustava S) v čase $t = 0$ rychlost $\vec{v}_{O'}(0) = \vec{0}$ a stálé zrychlení $\vec{a}_{O'}$, položíme na podlahu, o níž předpokládáme, že je vodorovná a dokonale hladká, malou krychli (tj. hmotný bod). Vyšetříme její pohyb v S (obr. 2.34a) a S' (obr. 2.34b), kde S' je soustava daná vagonem:



Obr. 2.34: Význam setrvačné síly \vec{F}^* v neinerciální soustavě S' spojené s vagonem, který se pohybuje se zrychlením $\vec{a}_{O'}$ vůči inerciální soustavě S spojené se Zemí.

{obr1.2-33}

Soustava S : Trajektorie hmotného bodu je bod, poněvadž jeho rychlost nejen v čase $t = 0$ je $\vec{v}(0) = \vec{0}$. Zrychlení má rovněž nulovou i svislou složku. Na hmotný bod totiž působí tíhová síla \vec{G} a síla \vec{N}_1 , kterou vyvozuje podlaha. V S tak platí

$$\vec{N}_1 + \vec{G} = m\vec{a}.$$

Síly \vec{N}_1 , \vec{G} jsou svislé a svislá složka zrychlení hmotného bodu je rovna nule. Proto platí $\vec{N}_1 + \vec{G} = \vec{0}$. Vodorovná složka zrychlení hmotného bodu je rovněž nulová. Tedy: $\vec{a}(t) = \vec{a} = \vec{0} \rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$, tj. krychle se v S pohybuje původní, tj. nulovou rychlostí. Vagon má ale v S zrychlení $\vec{a}_{O'}$, tudíž se zadní stěna vagonu blíží ke krychli.

Soustava S' : Pro pohyb hmotného bodu v neinerciální soustavě platí pohybová rovnice

$$m\vec{a}' = \vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{F}^*,$$

2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY

kde $\vec{F}^* = -m\vec{a}_{O'}$. Ježto $\vec{G} + \vec{N}_1 = \vec{0}$, plyne odsud $m\vec{a}' = \vec{F}^*$, $\vec{a}' = -\vec{a}_{O'}$ (vagoněk V_2 na obr. 2.34b). Pro pozorovatele v S' se kulička pohybuje zrychleně (nabývá zrychlení) účinkem setrvačné síly \vec{F}^* směrem k zadní stěně vagonu.

2. Ve vagoně V_2 na obr. 2.35 visí na vlákně kulička (tj. hmotný bod), která je vůči vagonu v klidu. Vyšetříme její pohybový stav v S (obr. 2.35a) a S' (obr. 2.35b).

Soustava S : Trajektorie kuličky je přímka, po níž se kulička pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením $\vec{a} = \vec{a}_{O'}$. Působí na ni tíhová síla \vec{G} a vlákno silou \vec{F}_1 . Výslednice těchto sil, $\vec{G} + \vec{F}_1$, jí uděluje zrychlení $\vec{a} = \vec{a}_{O'}$, dané vztahem

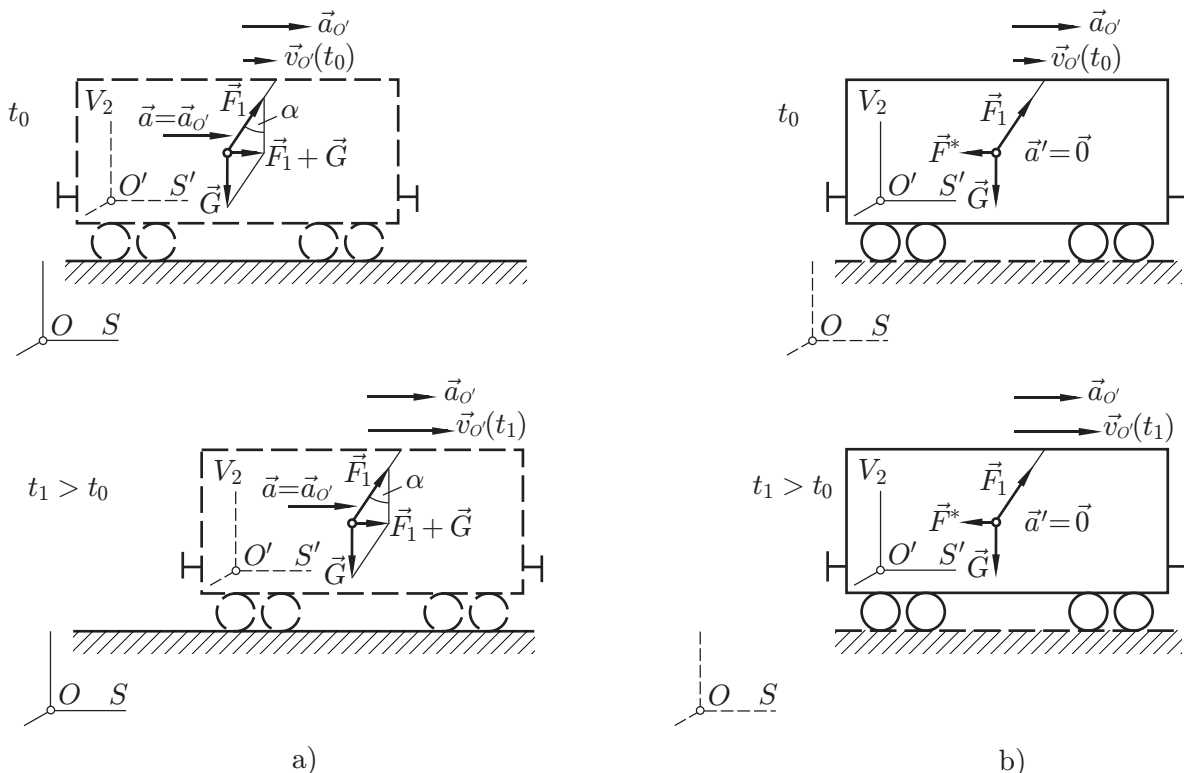
{1.2-50}

$$\vec{G} + \vec{F}_1 = m\vec{a}_{O'}. \quad (2.50)$$

Soustava S' : Kulička je v klidu, její trajektorie je (ve vagoně na obr. 2.34b) bod, takže platí $\vec{a}' = \vec{0}$. Pohybová rovnice zní

$$m\vec{a}' = \vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}^*,$$

kde $\vec{F}^* = -m\vec{a}_{O'}$. Ježto platí $\vec{a}' = \vec{0}$, plyne odsud $\vec{0} = \vec{G} + \vec{F}_1 - m\vec{a}_{O'}$ vyjadřující, že síly pravé a setrvačné síly jsou v rovnováze. Je to ovšem rovnice shodná s rovnicí (2.50), jenže se k ní došlo jinak.



Obr. 2.35: Dva pohledy z různých soustav na fyzikální děj ve vagonku V_2 našeho experimentálního vlaku, tentokrát nikoliv s kluzišťem (které se nachází ve vagonu V_1), ale s hmotným bodem na závěsu.

{obr1.2-34}

Úkol: Určete směr a velikost síly \vec{F}_1 na obr. 2.34 pro $m = 0,2 \text{ kg}$, $a_{S'} = 3 \text{ m/s}^2$.

Řešení:

$$F_1 = \sqrt{G^2 + (ma_{S'})^2} = 10 \text{ N}, \quad \alpha = \arctan(ma_{S'}/G) = 16,7^\circ.$$

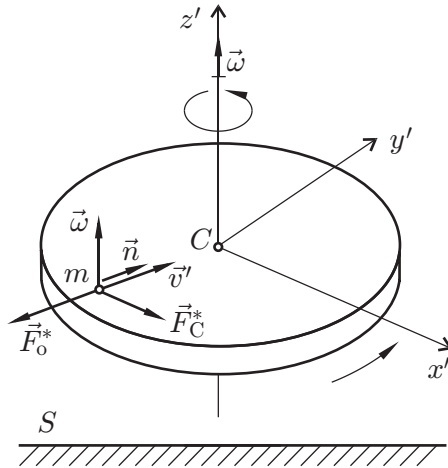
2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY

Poznámka: Ježto síla \vec{F}_1 má stejný směr jako vlákno, je vlákno vychýleno od svislého směru o úhel α .

{Nsvntp2}

2.4.7.2 Rovnoměrně rotující neinerciální soustava

- a) Formální úvahy. Uvažujeme o pohybu hmotného bodu, jenž se pohybuje na kotouči, který rovnoměrně rotuje úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ v inerciální soustavě S . Vztažnou soustavu spojenou s kotoučem označme S' (obr. 2.36).



Obr. 2.36: Odstředivá $\vec{F}_o^* = -m\omega^2 r \vec{n}$ a Coriolisova $\vec{F}_C^* = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')$ setrvačná síla působící na hmotný bod m pohybující se rychlostí \vec{v}' vzhledem k soustavě S' pevně spojené s rotujícím kotoučem.

{obr1.2-35}

Nechť v čase t je hmotný bod v bodě P a nechť má v S' (tj. vzhledem ke kotouči) rychlost \vec{v}' . Lze dokázat² (zde to nebudeme dokazovat), že jeho zrychlení \vec{a} (v S), \vec{a}' (v S') jsou dána vztahem

$$\{1.2-51\} \quad m\vec{a}' = m\vec{a} - m\omega^2 r \vec{n} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}'). \quad (2.51)$$

Zde je r vzdálenost bodu P od středu otáčení C , vektor \vec{n} je jednotkový vektor ve směru PC .

V soustavě S platí: $m\vec{a} = \vec{F}_v$, kde \vec{F}_v je výslednice skutečných sil — zde výslednice síly \vec{G} a síly \vec{F}_1 , kterou na hmotný bod působí kotouč, tj. $\vec{F}_v = \vec{G} + \vec{F}_1$. Postulujeme-li platnost vztahu: $m\vec{a}' =$ součet všech sil působících na hmotný bod v soustavě S' ,

$$\{1.2-52\} \quad m\vec{a}' = \vec{F}_v + \vec{F}_o^* + \vec{F}_C^*, \quad (2.52)$$

kde

$$\{1.2-53\} \quad \vec{F}_o^* = -m\omega^2 r \vec{n}, \quad \text{se nazývá setrvačná síla odstředivá} \quad (2.53)$$

{ram-30}

²Tuto pasáž lze najít např. v [25] nebo [26].

2.4. POHYBOVÉ ZÁKONY KLASICKÉ FYZIKY

{1.2-54}

$$\vec{F}_C^* = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}'). \quad \text{se nazývá setrvačná síla Coriolisova} \quad (2.54)$$

{ram-31}

Název „odstředivá síla setrvačná“ je odůvodněn směrem této síly (obr. 2.36). Coriolisova síla působí kolmo na $\vec{\omega}$ a na relativní rychlost \vec{v}' (obr. 2.36). Je-li $\vec{v}' = \vec{0}$, je $\vec{F}_C^* = \vec{0}$. Rychlost \vec{v}' může mít libovolný směr, nemusí být kolmá na ω jako v obr. 2.36. Síla \vec{F}_C^* se uplatňuje např. při pohybech na povrchu (rotující) Země.

{pr1.2-7}

KP 2.4-3

Na kotouči, který rotuje stálou úhlovou rychlostí $\omega = 4 \text{ s}^{-2}$ kolem svislé osy v tíhovém poli Země, je připevněno malé těleso (hmotný bod) o hmotnosti $m = 0,1 \text{ kg}$ ve vzdálenosti $R = 50 \text{ cm}$ od osy otáčení. Vyšetřete pohyb hmotného bodu v soustavě S spojené se Zemí a v soustavě S' spojené s kotoučem. Určete:

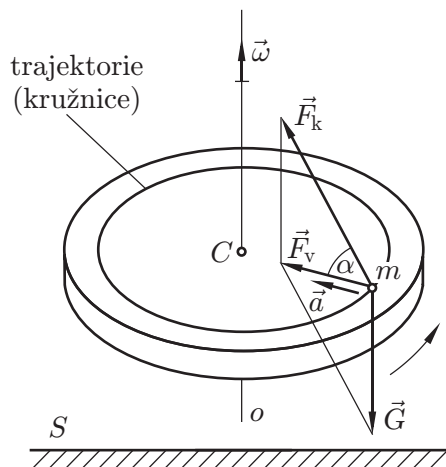
1. Trajektorii hmotného bodu;
2. Zrychlení hmotného bodu;
3. Výslednici sil působících na hmotný bod;
4. Síly působící na hmotný bod, a to vše v některém okamžiku t_1 . Sílu odporu vzduchu zanedbejte.

{pr1.2-7a}

Řešení:

a) V soustavě S

1. Trajektorie: kružnice se středem v C (obr. 2.37).
2. \vec{a} míří do C a má velikost $a = v^2/R = \omega^2 R = \dots = 8 \text{ m/s}^2$;
3. $\vec{F}_v = m\vec{a}$; míří do C a má velikost $F_v = m\omega^2 R = \dots = 0,8 \text{ N}$;
4. \vec{G} – tíhová síla; $G = mg = \dots = 1 \text{ N}$; \vec{F}_k – síla od kotouče; pro ni platí $\vec{F}_v = \vec{G} + \vec{F}_k$
 $\vec{F}_k = \vec{F}_v - \vec{G}$. Směr \vec{F}_k : $\text{tg } \alpha = G/F_v = \dots$, $\alpha = \dots$. Velikost \vec{F}_k : $F_k = \sqrt{F_v^2 + G^2} = \dots$



Obr. 2.37: Příklad KP 2.4-3.

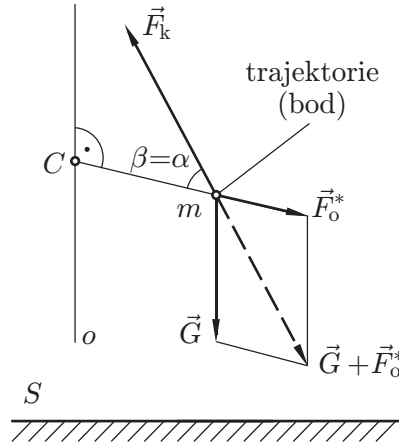
b) V soustavě S'

1. Trajektorie: bod P ;
2. $\vec{a}' = \vec{0}$ (obr. 2.38);

{obr1.2-36}
{pr1.2-7b}

2.5. ČASOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY

3. $\sum \vec{F} = m\vec{a}' = \vec{0}$;
4. $\sum \vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_k + \vec{F}_o^*$, $\vec{G} + \vec{F}_k + \vec{F}_o^* = \vec{0}$. Síly skutečné a setrvačná odstředivá síla jsou v rovnováze. Přitom směr \vec{F}_o^* – viz obr. 2.38, velikost $\vec{F}_o^* = mv^2/R = m\omega^2 R$. Tedy $\vec{F}_k = -(\vec{G} + \vec{F}_o^*)$, obr. 2.38. Směr \vec{F}_k : $\text{tg } \beta = G/F_o^* = \dots \text{tg } \alpha$. Velikost: $F_k = \sqrt{F_o^{*2} + G^2} = \sqrt{F_v^2 + G^2}$, výsledek je tedy stejný jako v soustavě S .



Obr. 2.38: Příklad KP 2.4-3.

{obr1.2-37}

2.4.7.3 Ekvivalence sil skutečných a setrvačných

Setrvačné síly mají stejné účinky jako síly skutečné: Udělují tělesům zrychlení, deformují je atd. Působí na všechna tělesa a jsou úměrné hmotnosti těles. Pozorovatel v uzavřené pohyblivé laboratoři oba typy sil nerozliší. Síly setrvačné a skutečné jsou, pokud jde o účinky, ekvivalentní. Rozdíl mezi oběma typy sil je pouze v tom, že síly skutečné jsou způsobeny tělesy v našem okolí a gravitačním působením těles sluneční soustavy, zatímco síly setrvačné zdánlivě nemají zdroj. Většina odborníků se dnes však přiklání k názoru, že síly setrvačné jsou způsobeny gravitačním působením vzdálených vesmírných objektů. Je-li tomu tak, pak se síly setrvačné a skutečné neliší ani původem. Řešte příklady KP 1.3-1 až KP 1.3-23 v textu Vybrané kapitoly z fyziky; KP 2.4-4 až KP 2.4-8.

2.5 Časový a dráhový účinek síly

Tato část se zabývá přechodem hmotného bodu z jednoho pohybového stavu do stavu jiného. Tyto přechody probíhají v jistém časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ a na určité trajektorii působením různých sil. Časový účinek síly je charakterizován veličinou „impuls síly, \vec{I} “. Impuls \vec{I} splňuje důležitý vztah $\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$. Dráhový účinek síly je charakterizován veličinou „práce, W “. Práce výslednice sil působících na hmotný bod splňuje důležitý vztah $W = E_{k,2} - E_{k,1}$, kde E_k je kinetická energie hmotného bodu. Vztahy $\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$, $W = E_{k,2} - E_{k,1}$ mají stejnou strukturu: Nalevo je veličina, která charakterizuje děj, kterým hmotný bod přechází ze stavu 1 do stavu 2. Napravo je změna veličin \vec{p} , E_k charakterizujících pohybový stav hmotného bodu. V závěru odst. 2.5.1 je definován výkon síly.

Obecné úvahy o energii v části 2.5.2 jsou velmi důležité.

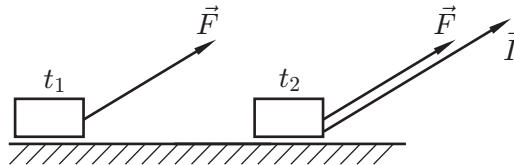
Cíl: I) Umět vztahy uvedené v rámečcích, znát veličiny, pojmy a výsledky nacházející se v tomto textu;

2.5. ČASOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY

- II) Definovat impuls síly, která působí na hmotný bod. Vztah (2.59) odvodit nebo odvození naznačit;
- III) Definovat práci konanou silou působící na hmotný bod;
- IV) Definovat kinetickou energii hmotného bodu. Zpaměti vztah (2.70), vyložit jej;
- V) Vyslovit a vyložit definici výkonu;
- VI) Řešit samostatně příklady vyřešené v tomto textu a příklady typu KP 1.4-1 až KP 1.4-16 v textu Vybrané kapitoly z fyziky; KP 2.4-9 až KP 2.4-15.

2.5.1 Impuls síly

1. Definice $\vec{I}(\Delta t)$. Impuls síly $\vec{I}(\Delta t)$ je vektorová veličina, která charakterizuje časový účinek síly $\vec{F}(t)$ působící na těleso v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Nejprve budeme definovat $\vec{I}(\Delta t)$ pro zvláštní případ, kdy platí $\vec{F} = \text{konst.}$, poté pro obecný případ.



Obr. 2.39: Impuls \vec{I} stálé síly \vec{F} .

- a) Impuls $\vec{I}(\Delta t)$ stálé (tj. časově nezávislé) síly \vec{F} působící na těleso v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\vec{I}(\Delta t) = \vec{F} \Delta t = \vec{F} (t_2 - t_1). \quad (2.55)$$

Má směr síly \vec{F} a velikost $I(\Delta t) = F (t_2 - t_1)$. Jednotka $[I]$ je rovna $[I] = \text{N} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (obr. 2.39).

- b) Impuls (libovolné, obecně časově proměnné) síly $\vec{F}(t)$ působící na těleso v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ je definován takto: Rozdělíme interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ na elementární intervaly délky Δt tak malé, že v každém z nich je přibližně $\vec{F}(t) \doteq \text{konst.}$ Impuls síly \vec{F} v každém z těchto intervalů je dán vztahem (2.55), tj. $\Delta \vec{I} = \vec{F} \Delta t$. Všechny tyto impulsy sečteme (obr. 2.40). V limitě pro $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt. \quad \text{impuls síly} \quad (2.56)$$

Impuls \vec{I} závisí jen na průběhu vektorové funkce $\vec{F}(t)$ v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Jeho jednotka je $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- c) Střední hodnota síly \vec{F} (tj. vektorové funkce $\vec{F}(t)$) v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ se označuje $\vec{F}_{\text{stř}}(\Delta t)$ a je definována vztahem

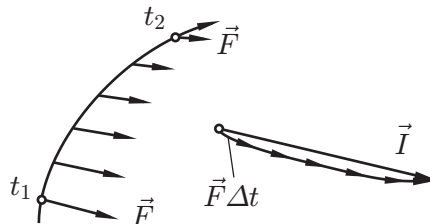
$$\vec{F}_{\text{stř}}(\Delta t) = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \rightarrow \quad (2.57)$$

2.5. ČASOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY

{1.2-57}

{ram-33}

$$\vec{F}_{\text{stř}}(\Delta t)(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \vec{I} \rightarrow \vec{F}_{\text{stř}}(\Delta t) = \frac{\vec{I}}{t_2 - t_1} \quad \text{střední hodnota síly} \quad (2.58)$$



{obr1.2-39}

Obr. 2.40: Impuls \vec{I} obecně časové proměnné síly \vec{F} .



2. Věta o impulsu síly je nejdůležitější ze vztahů, v nichž se užívá impulsu. Zní takto: Nechť se hmotný bod pohybuje v inerciální vztažné soustavě S (obr. 2.41) účinkem sil o výslednici \vec{F}_v . V čase t_1 nechť má hmotný bod hybnost \vec{p}_1 , v čase t_2 hybnost \vec{p}_2 . Pak platí

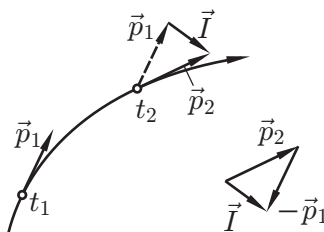
{1.2-58}

{ram-34}

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_v(t)dt. \quad \text{věta o impulsu síly} \quad (2.59)$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_v^{\text{ext}}. \quad \text{I. impulsová věta} \quad (2.60)$$

{ram-35}



{obr1.2-40}

Obr. 2.41: K větě o impulsu síly.

Důkaz: Označme $\vec{p}(t)$ vektorovou funkci času, udávající průběh hybnosti hmotného bodu v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ v soustavě S . Platí pro ni druhý Newtonův pohybový zákon

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}_v \rightarrow d\vec{p} = \vec{F}_v dt (= d\vec{I}).$$

To značí: změna $d\vec{p}$ hybnosti \vec{p} hmotného bodu v časovém intervalu délky dt je rovna impulsu výslednice sil, které na něj působí. Sečtením těchto změn v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ dostaneme vztah (2.59).

2.5. ČASOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY

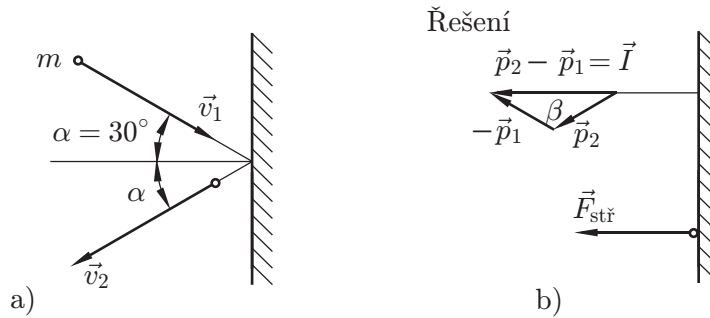
Vztahu (2.59) se užívá velmi často v kombinaci se vztahem (2.58) k řešení příkladů tohoto typu:

{pr1.2-8}

KP 2.5-1

Míč o hmotnosti $m = 400\text{ g}$ dopadl na pevnou stěnu rychlostí \vec{v}_1 o velikosti $v_1 = 5\text{ m/s}$ a odrazil se stejně velkou rychlostí podle obr. 2.42a. Náraz trval po dobu $\Delta t = \tau = 0,1\text{ s}$. Určete:

- Změnu hybnosti míče;
- Střední sílu, kterou působila stěna na míč;
- Střední sílu, kterou působil míč na stěnu.



{obr1.2-41}

Obr. 2.42: Příklad KP 2.5-1.

Řešení:

- $\Delta\vec{p} = ?$, $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (obr. 2.42b). Směr: $\Delta\vec{p} \perp$ stěna, velikost $|\Delta\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos \beta} = \sqrt{2(0,4 \cdot 5)^2 - 2(0,4 \cdot 5)^2 \cos 120^\circ} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,46 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- $\vec{F}_{\text{stř}} = ?$, $\vec{F}_{\text{stř}} = \vec{I} / (t_2 - t_1)$, $\vec{F}_{\text{stř}} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) / (t_2 - t_1) = \Delta\vec{p} / \tau$. Směr: $\vec{F}_{\text{stř}} \parallel \Delta\vec{p}$, velikost: $F_{\text{stř}} = |\Delta p| / \tau \dots = 34,6 \text{ N}$;
- $\vec{F}_{\text{s,stř}} = ?$, $\vec{F}_{\text{s,stř}} = -\vec{F}_{\text{stř}}$.

Doplňující úkoly:

- Měkký míč se odrazí od skleněné tabule vitríny, aniž ji rozbije. Tvrdý míč o stejné hmotnosti a rychlosti jako měkký míč ji však rozbije. Vysvětlete.
- Účinky nárazu automobilu na překážku se pro jeho posádku zmírňují přidáním poddajné části karoserie v přední části automobilu. Vysvětlete.

2.5.2 Obecně o energii

{1.2.4B}

Přesto, že hlavním obsahem další části jsou úvahy o veličině, která se nazývá práce, začneme hovořit o energii. Pohybující se automobil má kinetickou energii E_k danou vztahem $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Jede-li do kopce, získává polohovou tíhovou energii $E_G = mgh$. V jeho motoru, jehož činnost je nutná k rozjezdu, k jízdě do kopce a k překonávání sil odporu a tření, se mění chemická energie pohonných hmot v kinetickou a potenciální energii vozu. Navíc se motor, automobil, okolní vzduch, povrch silnice zahřívají, tj. zvětšuje se energie neuspořádaného pohybu jejich molekul neboli roste vnitřní energie látek, které se na ději podílejí.

Pojem, nebo přesněji fyzikální veličina „energie“ je známa: charakterizuje určitým způsobem tělesa, soustavy těles nebo fyzikální pole (např. elektromagnetické vlny) v jejich stavech, jichž

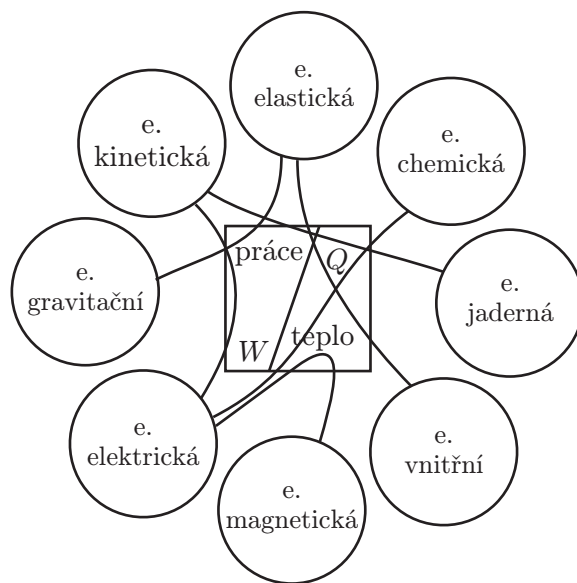
2.5. ČASOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY

nabývají při všech možných i kvalitativně velmi různorodých dějích. Podle toho o jaké stavy se jedná — zda o polohy nebo o pohybové stavy atd. — hovoříme o energii polohové, pohybové, jaderné, chemické atd.

Při fyzikálních dějích a technických procesech se jednak mění formy (druhy) energie (jeden druh energie přechází v jiný, např. vůz jedoucí z kopce: energie polohová → energie kinetická + vnitřní), jednak při interakci dvou objektů (soustav) se energie jednoho z nich obecně zmenšuje, druhého zvětšuje — soustavy si „předávají“ energii. V hydrocentrále se proces zmenšování mechanické (tj. kinetické a potenciální) energie vody a současný růst elektrické energie generátoru a připojené sítě nazývá „výroba“ elektrické energie. Tím, že každá soustava má energii – veličinu uplatňující se ve všech soustavách a při všech různorodých dějích – tak tyto soustavy a děje tato veličina (energie) z jistého hlediska sjednocuje - zvláště, když zkušenost ukazuje, že platí:

Zákon zachování energie:

Celková energie libovolné izolované soustavy je stálá při všech dějích, které v ní probíhají.



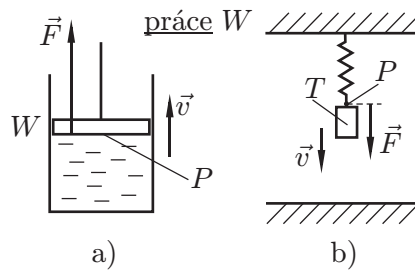
{obr1.2-42}

Obr. 2.43: Změny a přechody energie z jedné soustavy do druhé.

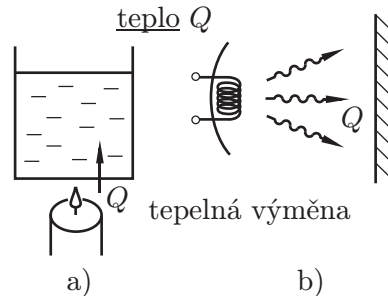
Změny energie a přechody energie z jedné soustavy do druhé jsou charakterizovány veličinami práce a teplo (obr. 2.43). Jestliže jedna soustava působí na druhou soustavu silou \vec{F} (např. plyn na píst motoru — obr. 2.44a, nebo těleso T na pružinu, k níž je připevněno — obr. 2.44b) a působíště P se přitom pohybuje, koná síla \vec{F} práci. Tato práce se rovná (při pohybu pístu ve směru síly) úbytku vnitřní energie plynu a přírůstku mechanické energie pístu. Podobně v druhém případě je práce síly \vec{F} rovna úbytku mechanické (kinetické a tíhové) energie tělesa T a přírůstku elastické energie pružiny. Jestliže však energie přechází z jedné soustavy do druhé při jejich styku v důsledku vzájemných srážek jejich molekul konající neuspořádaný tepelný pohyb (obr. 2.45a) nebo formou teplotního (elektromagnetického) záření, jež trvale vyzařují všechny látky, hovoříme o tepelné výměně (energie). Energie, která přejde z jedné soustavy do druhé tepelnou výměnou, se nazývá teplo. Tepelnou výměnou se budeme zabývat v odst. 5.1.

Ve většině případů se výměna energie mezi soustavami uskutečňuje současně formou práce i tepelnou výměnou. Často však jedna z těchto forem výměny bývá zanedbatelně malá.

2.5. ČASOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY



Obr. 2.44: Přechod energie z jedné soustavy do druhé konáním práce W .



Obr. 2.45: Přechod energie z jedné soustavy do druhé tepelnou výměnou.

2.5.3 Práce

Ukazuje se, že silovým působením se přenáší energie z jedné soustavy do druhé tehdy, když současně a) působí síla se (v uvažované vztažné soustavě) pohybuje, b) síla má nenulovou složku ve směru pohybu působí. Definice veličiny práce, která se označuje W , k tomu přihlíží. Uvedeme nejprve definici pro jednoduchý případ silového působení, poté obecnou definici.

1. Práce stálé síly při přímočarém pohybu působí. Nechť na těleso (např. sáně na obr. 2.46) působí (kromě jiných sil) v jednom jeho bodě (působíšti Q) stálá síla \vec{F} . Působíšti nechť koná přímočarý pohyb (jinak libovolně proměnný) z bodu P_1 do bodu P_2 . Posunutí působíšti je vektor $\overline{P_1P_2} = \vec{s}$. Práce W síly \vec{F} na úseku P_1P_2 je definována vztahem

{1.2-59}

$$W = F \cos \alpha |\overline{P_1P_2}|, \quad \text{definice práce stálé síly} \quad (2.61)$$

{ram-36}

kde $\alpha = \angle(\vec{F}, \overline{P_1P_2})$. Jiný zápis

{1.2-60}

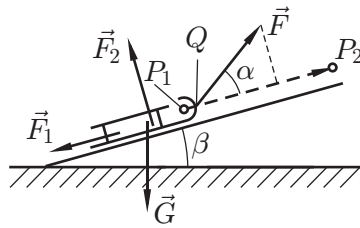
$$W = F s \cos \alpha = F_s s = \vec{F} \cdot \vec{s}, \quad (2.62)$$

kde $F_s = F \cos \alpha$ je průmět síly \vec{F} do směru \vec{s} .

Informace:

- (a) Je-li $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$, je $W > 0$; $\alpha = 90^\circ \rightarrow W = 0$; $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ \rightarrow W < 0$.
- (b) Jednotka: $[W] = \text{N} \cdot \text{m} = 1 \text{ joule} = 1 \text{ J} (= \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})$.
- (c) Pohyb je relativní, trajektorie působíšti je v různých vztažných soustavách různá. Tedy i práce je v tomto smyslu relativní, v různých vztažných soustavách má obecně různou hodnotu.

2.5. ČASOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY



Obr. 2.46: Příklad KP 2.5-2 — síly působící na sáně. Práce síly \vec{F} při přemístění saní z bodu P_1 do bodu P_2 .

{obr1.2-45}

{pr1.2-9}

KP 2.5-2 —————

Při ději znázorněném v obr. 2.46 je $|\overline{P_1P_2}| = 12 \text{ m}$, $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 10^\circ$, hmotnost saní $m = 8 \text{ kg}$, $F = 40 \text{ N}$, tečná složka síly, kterou působí sníh na sáně (tj. síla tření), má velikost $F_1 = 23 \text{ N}$. Určete:

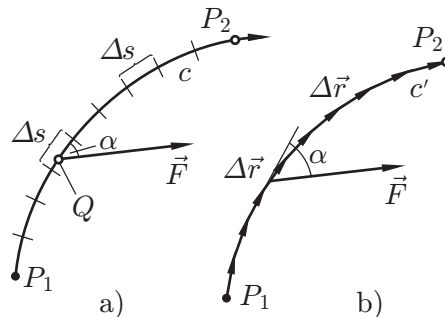
- Práci W síly \vec{F} ;
- Práci W_1 síly \vec{F}_1 ;
- Práci W_G tíhové síly.

Řešení:

- $W = ?$, $W = F s \cos \alpha = 40 \text{ N} \cos 20^\circ 12 \text{ m} = 451 \text{ J}$;
- $W_1 = ?$, $W_1 = F_1 \cos(\angle \vec{F}_1, \overline{P_1P_2}) s = 23 \text{ N} \cos 180^\circ 12 \text{ m} = -276 \text{ J}$;
- $W_G = ?$, $W_G = G \cos(\angle G, \overline{P_1P_2}) s = G s \cos(90^\circ + \beta) = 80 \cdot 12 (-\sin 10^\circ) \text{ J} = -167 \text{ J}$.



- Práce proměnné síly při obecném pohybu působitě. Uvažujme o tělese, které vykonává obecný pohyb a na které působí (kromě případných jiných sil) v jednom jeho bodě Q síla \vec{F} , která se (obecně) při pohybu mění. Působitě Q nechť se pohybuje v jednom směru po trajektorii, kterou označíme c (obr. 2.47a). Orientujeme ji ve směru pohybu a zavedeme na ní dráhovou souřadnici s . Práce, kterou vykoná síla \vec{F} na úseku P_1P_2 , je definována takto: Rozdělíme c na malé elementy délky Δs a zavedeme příslušné vektory posunutí $\Delta \vec{r}$, a to tak malé, že na každém z nich je síla \vec{F} přibližně konstantní. Trajektorii c tak nahradíme lomenou čarou c' (obr. 2.47b), která se liší od c tím méně, čím jsou $|\Delta \vec{r}|$ menší.



{obr1.2-46}

Obr. 2.47: Práce proměnné síly při obecném pohybu působitě.

Práce síly \vec{F} na malém (elementárním) úseku $\Delta \vec{r}$ je dána vztahem (2.62), tj. je

{1.2-61}

$$\Delta W = \vec{F} \Delta \vec{r} = F \cos \alpha |\Delta \vec{r}| \doteq F \cos \alpha \Delta s, \quad (2.63)$$

2.5. ČASOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY

neboť $|\Delta\vec{r}| \doteq \Delta s$. V limitě pro $\Delta s \rightarrow 0$ pak můžeme psát

$$\{1.2-62\} \quad dW = F \cos \alpha ds = F_s ds. \quad (2.64)$$

Veličina F_s je v různých bodech trajektorie různá, je funkcí veličiny s , tj. $F_s = F_s(s)$. V obr. 2.48a je tato závislost znázorněna křivkou C . Elementární práce ΔW daná vztahem (2.64), je úměrná plošnému obsahu jednoho vyšrafovaného proužku (obdélníčku).

Práce síly \vec{F} na úseku P_1P_2 je přibližně rovna součtu všech elementárních prací (2.63), tj.

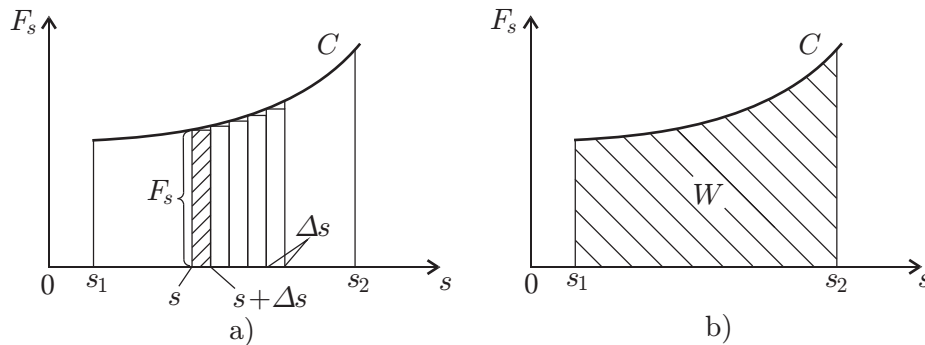
$$\{1.2-63\} \quad W = \sum \Delta W = F_1 \cos \alpha_1 \Delta s_1 + F_2 \cos \alpha_2 \Delta s_2 + \dots = \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}. \quad (2.65)$$

Definována je (přesně) jako limita součtu (2.65) pro $\Delta s = |\Delta\vec{r}| \rightarrow 0$, tj. jako Riemannův integrál (viz odst. 1.4)

$$\{1.2-64\} \quad W = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cos \alpha(s) ds = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad \text{definice práce} \quad (2.66)$$

{ram-37}

Zde jsme vyznačili, že veličina F_s i úhel α jsou funkcemi veličiny s . Dále: \vec{r}_1 a \vec{r}_2 jsou polohové vektory bodů P_1, P_2 . *Informace:*



Obr. 2.48: Geometrický význam práce síly \vec{F} , jejíž průmět do směru elementárního posunutí $d\vec{r}$ je F_s .

{obr1.2-47}

- Veličina W , daná vztahem (2.66), je úměrná plošnému obsahu plochy pod křivkou C v obr. 2.48b.
- Výpočet integrálů ve vztahu (2.66) vyžaduje v obecném případě často důkladnou znalost integrálního počtu. Pro nás je důležité zejména to, že jsou to v podstatě součty, znázorněné plošnými obsahy v diagramu typu obr. 2.48. Omezíme se jen na výpočty matematicky dostupné.
- Důležitá věta: Práce výslednice několika sil působících v jednom bodě je rovna součtu prací jednotlivých sil. Tedy $(\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \rightarrow (W = W_1 + W_2 + \dots + W_n)$.
Důkaz: Při elementárním posunutí $\Delta\vec{r}$ platí

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r} = \Delta W_1 + \dots + \Delta W_n.$$

Celková energie je rovna součtu elementárních prací. Sečteme nejprve elementární příspěvky síly \vec{F}_1 , tj. příspěvky ΔW_1 a dostaneme W_1 , poté sečteme ΔW_2 atd. Tím je uvedené tvrzení dokázáno.

2.5. ČASOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY

Jesliže těleso vykonává translační pohyb, platí analogické tvrzení i pro případ, že síly $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ nepůsobí v jednom bodě. To proto, že vektory posunutí působišť všech sil jsou stejné.

{pr1.2-10} **KP 2.5-3** —————

Hmotný bod o hmotnosti m byl přenesen z bodu P_1 (o výšce $h_1 = 14$ m) do bodu P_2 (o výšce $h_2 = 6$ m) po trajektorii c (obr. 2.49). Určete práci, kterou přitom vykonala tíhová síla.

Řešení:

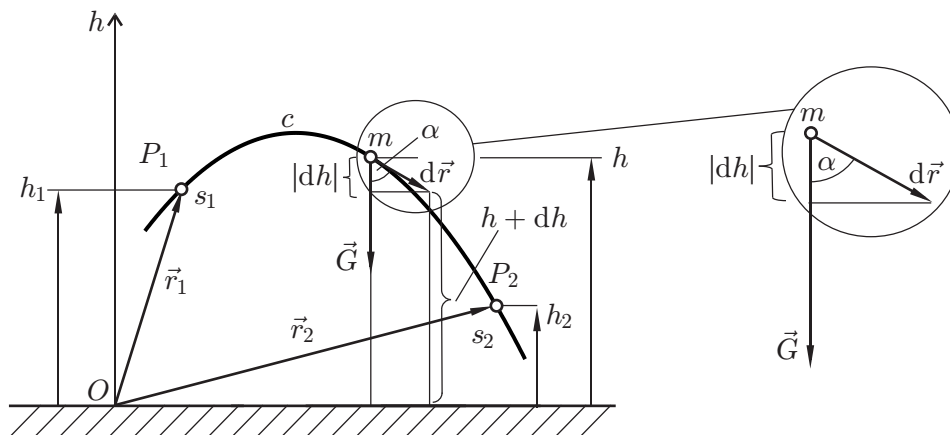
$$W_G = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} G \cos \alpha ds$$

$$(dW =) G \cos \alpha ds = mg |dh| = -mgh.$$

Pozn.: Na úseku $d\vec{r}$ se h zmenšilo, tedy $dh < 0$, takže $|dh| = -dh$. Vztah $|dh| = \cos \alpha ds$ plyne z pravoúhlého trojúhelníka o přeponě $|d\vec{r}|$. Tedy

{1.2-65}
$$W_G = \int_{h_1}^{h_2} -mg dh = -mg \int_{h_1}^{h_2} dh = -mg(h_2 - h_1) = mgh_1 - mgh_2. \quad (2.67)$$

To je výsledek, na němž je pozoruhodné: Začíná-li trajektorie (kdekoli) ve výšce h_1 a končí-li ve výšce h_2 , pak práce tíhové síly je $W_G = mg(h_1 - h_2)$, ať má trajektorie jakýkoliv tvar.



Obr. 2.49

{obr1.2-48}

Příklad **KP 2.5-3**.

{pr1.2-11} **KP 2.5-4** —————

Určete práci výslednice sil působících na sáně v obr. 2.46 (viz příklad **KP 2.5-2**) na úseku P_1P_2 .

Řešení:

Podle věty o práci výslednice sil působících na těleso při translačním pohybu platí pro práci W_v výslednice \vec{F}_v sil působících na sáně

$$W_{F_v} = W + W_G + W_1 + W_2,$$

kde W_2 je práce normálové složky \vec{F}_2 , tj. síly, kterou na sáně působí nakloněná rovina. Ježto $\vec{F}_2 \perp \vec{P_1P_2}$, je $W_2 = 0$ J. Veličiny W, W_G, W_1 jsou vypočteny v **KP 2.5-2**, tedy po dosazení

$$W_{F_v} = 451 \text{ J} - 167 \text{ J} - 276 \text{ J} = 8 \text{ J}.$$

2.5.4 Kinetická energie hmotného bodu, E_k .

{1.2.4D}

V této části zavedeme fyzikální veličinu „kinetická (neboli pohybová) energie hmotného bodu, E_k “ jakožto nejznámější typ (druh) energie. Je definována vztahem (2.69). K této definici jsme vedeni velmi důležitým vztahem (2.68), který má základní význam ve všech úvahách o energii. Je to první ze vztahů mezi energiemi, prací a teplem, znázorněných schematicky v obr. 2.43, 2.44 a 2.45.

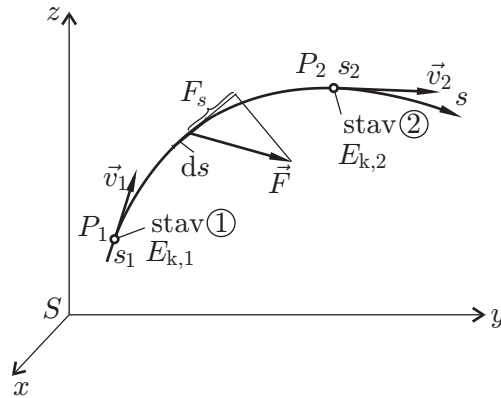
Zmíněný základní vztah zní: Nechť hmotný bod se pohybuje v inerciální vztažné soustavě S (obr. 2.50) z bodu P_1 do bodu P_2 po libovolné trajektorii účinkem různých sil. Nechť \vec{F}_v je jejich výslednice. Pak práce $W_{F_v, P_1 \rightarrow P_2}$, kterou přitom vykoná \vec{F}_v , je dána vztahem

{1.2-66}

$$W_{F_v, P_1 \rightarrow P_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \quad \text{základní vztah pro práci výslednice sil} \quad (2.68)$$

{ram-38}

Zde v_1 je velikost rychlosti hmotného bodu v P_1 , v_2 velikost rychlosti hmotného bodu v bodě P_2 . Nejprve důkaz, potom komentář.



Obr. 2.50: Práce výslednice sil \vec{F}_v při pohybu hmotného bodu hmotnosti m po libovolné trajektorii.

{obr1.2-49}

Důkaz: Orientujme trajektorii od P_1 k P_2 a zaveďme dráhovou souřadnici s (obr. 2.50). Podle definice (2.66) platí

$$W_{F_v, P_1 \rightarrow P_2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_v \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_s ds = \int_{s_1}^{s_2} ma_s ds = \int_{s_1}^{s_2} m \frac{dv_s}{dt} ds.$$

Zde jsme užili vztahů: $\vec{F}_v = m\vec{a}$ (S je inerciální, \vec{F}_v výslednice) $\rightarrow F_s = ma_s$, kde F_s, a_s jsou průměty do orientované tečny k trajektorii. Dále platí $a_s = dv_s/dt$, kde v_s je dráhová rychlost a dv_s, dt jsou diferenciály (odst. 1.4). Pak

$$\frac{dv_s}{dt} ds = dv_s \frac{ds}{dt} = dv_s v_s,$$

kde v_s je dráhová rychlost. Tedy

$$W_{F_v, P_1 \rightarrow P_2} = \int_{v_{s,1}}^{v_{s,2}} mv_s dv_s = \left[\frac{1}{2}mv_s^2 \right]_{v_{s,1}}^{v_{s,2}} = \frac{1}{2}mv_{s,2}^2 - \frac{1}{2}mv_{s,1}^2 (= E_{k,2} - E_{k,1}).$$

Ježto pro dráhovou rychlost platí $|v_s| = |\vec{v}| = v$, dostáváme vztah (2.68).

2.5. ČASOVÝ A DRÁHOVÝ ÚČINEK SÍLY

Co je na vztahu (2.68) pozoruhodné? To, že k přechodu hmotného bodu ze stavu 1, v němž má jeho rychlost velikost v_1 , do stavu 2, v němž je $v = v_2$, je zapotřebí vykonat výslednicí sil vždy stejnou práci $W_{F_v, P_1 \rightarrow P_2}$. Tato práce nezávisí ani na poloze bodů P_1 a P_2 , ani na tvaru trajektorie — závisí jen na m, v_1, v_2 . Známe-li m, v_1, v_2 , známe i $W_{F_v, P_1 \rightarrow P_2}$. To umožňuje zavést novou fyzikální veličinu E_k nazvanou „kinetická energie hmotného bodu“ v uvažované vztažné soustavě definičním vztahem

$$\{1.2-67\} \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad \text{definice kinetické energie hmotného bodu} \quad (2.69)$$

{ram-39}

Tato veličina charakterizuje pohybový stav hmotného bodu. Z definičního vztahu (2.69) a ze vztahu (2.68) plyne její nejdůležitější vlastnost, která je vyjádřena souvislostí práce výslednice sil se změnou kinetické energie

$$\{1.2-68\} \quad W_{F_v, P_1 \rightarrow P_2} = E_{k,2} - E_{k,1} = \Delta E_k. \quad \text{základní vlastnost kinetické energie} \quad (2.70)$$

{ram-40}

Informace:

1. Jednotky: $[E_k] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$;
2. Hodnota E_k závisí na volbě vztažné soustavy;
3. Jestliže $W_{F_v, P_1 \rightarrow P_2} > 0$, tj. koná-li výsledná síla \vec{F}_v kladnou práci, rychlost v se zvětšuje a E_k roste. Ke vzrůstu E_k je tedy třeba vykonat kladnou práci;
4. Jestliže na hmotný bod působí jen síly způsobené stykem s jinými tělesy, pak síly, kterými působí hmotný bod na své okolí, vykonají při pohybu hmotného bodu z P_1 do P_2 práci $W' = -W = E_{k,1} - E_{k,2}$.
5. Vztahy (2.68), (2.69), (2.70) i ostatní úvahy a informace platí i pro těleso konečných rozměrů, které koná translační pohyb.

{pr1.2-12}

KP 2.5-5

Malé těleso (hmotný bod) o hmotnosti $m = 0,2 \text{ kg}$ bylo vrženo v bodě P_1 na povrchu Země rychlostí o velikosti $v_1 = 20 \text{ m/s}$ šikmo vzhůru. V bodě P_2 ve výšce $h_2 = 12 \text{ m}$ mělo rychlost o velikosti $v_2 = 10 \text{ m/s}$. Určete:

1. Práci W_v výslednice sil působících na hmotný bod na úseku P_1P_2 ;
2. Práci tíhové síly na úseku P_1P_2 ;
3. Rozhodněte, zda na hmotný bod působila při pohybu kromě síly \vec{G} ještě další síla. Jestliže ano, uveďte která a určete práci, kterou vykonala.

Řešení:

1. $W_v = ?$ $W_v = E_{k,2} - E_{k,1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \dots = -30 \text{ J}$;
2. $W_G = ?$ Viz rovnice (2.67). $W_G = mgh_1 - mgh_2 = 0 - mgh_2 = \dots = -24 \text{ J}$;
3. Další síla? $W_v \neq W_G$, působila ještě další síla, a to síla odporu vzduchu \vec{F}_o . Pro práci W_o , kterou vykonala, platí

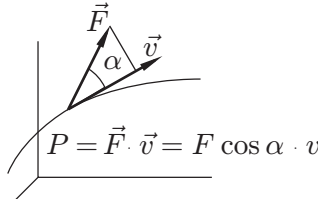
$$W_v = W_G + W_o \rightarrow W_o = W_v - W_G = 30 \text{ J} - 24 \text{ J} = -6 \text{ J}.$$

2.6. GRAVITAČNÍ POLE

Řešte příklady [KP 1.4-1](#) až [KP 1.4-16](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.4-9](#) až [KP 2.4-14](#).

2.5.5 Výkon

Výkon P je veličina, která charakterizuje rychlost, se kterou koná práci nějaká síla \vec{F} (neboli rychlost, se kterou koná práci nějaké zařízení, např. stroj, které na své okolí působí silou \vec{F}) v uvažované vztažné soustavě.



{obr1.2-50}

Obr. 2.51: Výkon síly \vec{F} při pohybu působitě rychlostí \vec{v} .

1. Definice výkonu

Nechť síla \vec{F} koná práci během určitého časového intervalu. Práce, kterou vykoná od začátku děje, je funkcí času, $W(t)$.

a) Střední výkon $P_{\text{stř}}(\Delta t)$ síly \vec{F} v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ je definován vztahem

$$P_{\text{stř}}(\Delta t) = \frac{W(t_2) - W(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

b) Výkon síly \vec{F} v čase t_1 je definován vztahem

$$P(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_{\text{stř}}(\Delta t) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{W(t_2) - W(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{dW(t_1)}{dt}.$$

2. Vyjádření výkonu pomocí rychlosti působitě síly

Nechť působitě síly \vec{F} se pohybuje v čase t_1 v uvažované vztažné soustavě rychlostí \vec{v} (obr. 2.51). Pak výkon této síly v čase t_1 je podle definice

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

kde $\Delta \vec{r}$ je posunutí působitě síly \vec{F} v časovém intervalu $\langle t_1, t_1 + \Delta t \rangle$. Tedy

$$\vec{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Řešte příklad [KP 2.4-15](#).

2.6 Gravitační pole

Nejprve jsou vyloženy obecné vlastnosti gravitačního pole, poté je zavedena veličina „intenzita gravitačního pole“ a vysloven Newtonův gravitační zákon. V další části je vyšetřeno gravitační pole z energetického hlediska. Je dokázáno, že gravitační pole je konzervativní. Na základě této vlastnosti gravitačního pole je definována potenciální gravitační energie hmotného bodu a potenciál gravitačního pole. V poslední části je podrobněji vyšetřeno gravitační a tíhové pole Země.

Cíl:

2.6. GRAVITAČNÍ POLE

- I) Umět použít uvedené vztahy a zákony uvedené v rámečcích, vysvětlit pojmy, veličiny a výsledky;
- II) Vyložit hlavní vlastnosti gravitačních interakcí, definovat a vysvětlit veličinu „intenzita gravitačního pole“, vyslovit a vyložit Newtonův gravitační zákon;
- III) Vyložit pojem „konzervativní silové pole“, definovat potenciální energii hmotného bodu v gravitačním poli a užít ji k výpočtu práce gravitačních sil. Definovat potenciál gravitačního pole;
- IV) Vysvětlit vlastnosti gravitačního pole ideální a skutečné Země, vyložit souvislost gravitační a tíhové síly, vysvětlit vlastnosti tíhového pole v blízkosti povrchu Země;
- V) Řešit příklady řešené v tomto textu a příklady typu [KP 1.5-2](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#) a [KP 2.6-4](#) až [KP 2.6-9](#).

2.6.1 Newtonův gravitační zákon

2.6.1.1 Gravitační interakce

Výsledky pozorování a pokusů ukazují, že všechny materiální objekty vytvářejí (budí) ve svém okolí i ve svém vnitřku gravitační pole. Toto pole se projevuje zejména tím, že působí na jiné hmotné objekty silami, které se nazývají síly gravitační. Vzájemné působení těles prostřednictvím gravitačních polí se nazývá gravitační interakce. Je to jedno ze čtyř základních působení hmotných objektů (viz odst. 2). Hovoříme-li o hmotných objektech, nemáme na mysli jen objekty látkové, sestávající z atomů a molekul, nýbrž i objekty s nulovou klidovou hmotností, např. fotony, tj. částice elektromagnetického pole, neutrino, atd. Gravitační působení je univerzální.

Gravitační pole každého hmotného objektu sahá (teoreticky) do nekonečna a nelze jej odstínit. Jeho mohutnost se však s rostoucí vzdáleností rychle zmenšuje, takže gravitační působení velmi vzdálených objektů je většinou zanedbatelně malé. Gravitační interakce jsou ostatně ze známých interakcí nejslabší. Např. vzájemné gravitační působení objektů o hmotnostech srovnatelných s hmotností lidského těla je velmi slabé a lze je zjistit jen citlivými přístroji. Gravitační interakce se neuplatňují ani ve světě atomů a atomových jader. Přesto však jsou gravitační síly v denním životě nejběžnější, neboť žijeme na Zemi, tj. na tělese s obrovskou hmotností. Ve světě planet, galaxií a v celém vesmíru mají gravitační interakce dominující postavení: udržují pohromadě planetární systémy i celé galaxie a ovlivňují významným způsobem vývoj všech vesmírných objektů i vesmíru jako celku.

K poznání základních zákonitostí gravitačního pole přispěl rozhodujícím způsobem I. Newton (1642–1727), který na základě tehdejších poznatků o pohybu planet odvodil základní zákon gravitačního působení (rovnice (2.76)). V tomto století to byl zejména A. Einstein (1879–1955), který položil základy obecné teorie relativity, jejíž podstatnou částí je teorie gravitačního pole. Řada otázek gravitačních interakcí ještě není vyjasněna.

2.6.1.2 Intenzita gravitačního pole, \vec{K}_g

Přesná měření ukázala, že gravitační síly působící v určitém bodě P gravitačního pole na různá malá tělesa o stejných hmotnostech, zhotovená však z různých látek (dřevo, ocel atd.), jsou stejné. Dále, že tyto síly jsou úměrné hmotnostem těles, tj. že platí

{1.2-69}

$$\vec{F}_g \sim m, \quad (2.71)$$

2.6. GRAVITAČNÍ POLE

kde \vec{F}_g je gravitační síla a m je veličina, která vystupuje v druhém pohybovém zákoně $\vec{F}_v = m\vec{a}$, tj. hmotnost tělesa. Vztah (2.71) vyjadřuje přírodní zákon a není samozřejmý: mohlo by se totiž stát, že gravitační síly působící na 1 kg oceli a na 1 kg vody by byly různé. Pak by bylo nutno zavést tzv. gravitační hmotnost, která by byla pro zmíněná tělesa různá. Na základě poněkud složitějších úvah, které zde nebudeme uvádět, se vyslovuje uvedený zákon výrokem „gravitační hmotnost je úměrná setrvačné hmotnosti“.

Poznamenejme ještě, že síla \vec{F}_g nezávisí na pohybu hmotného bodu. Z uvedeného vztahu (2.71) plyne, že vektorová veličina \vec{F}_g/m nebude již záviset na hmotnosti uvažovaného hmotného bodu. Závisí ovšem na mohutnosti gravitačního pole v bodě P a tedy toto pole po stránce silových účinků v bodě P charakterizuje. To vede k tomu, že definujeme v obecném bodě P gravitačního pole vektorovou veličinu \vec{K}_g , zvanou intenzita gravitačního pole vztahem

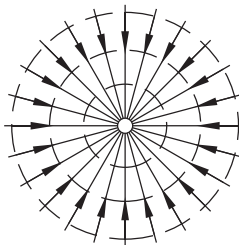
$$\{1.2-70\} \quad \vec{K}_g = \frac{\vec{F}_g}{m}, \quad \text{intenzita gravitačního pole} \quad (2.72)$$

{ram-41}

kde \vec{F}_g je gravitační síla působící v bodě P na libovolný hmotný bod o hmotnosti m .
Informace:

1. \vec{K}_g je vektorová veličina, která má stejný směr jako \vec{F}_g . Jednotka: $[K_g] = \text{m/s}^2$;
2. Jestliže je vztažná soustava, v níž gravitační působení zkoumáme, inerciální a jestliže na hmotný bod působí jen síla gravitační, má hmotný bod v bodě P zrychlení $\vec{a}_g = \vec{F}_g/m$. Srovnáním se vztahem (2.72), dostaneme $\vec{K}_g = \vec{a}_g$.

Gravitační pole, v jehož všech bodech je \vec{K}_g stejné, se nazývá homogenní, jinak je nehomogenní. Jestliže se \vec{K}_g s časem nemění, nazývá se pole stacionární. Na základě dosavadních poznatků soudíme, že změny gravitačního pole se jím šíří rychlostí c , podobně jako změny pole elektromagnetického a že gravitační interakce jsou zprostředkovány „polními“ částicemi, které nazýváme gravitony. Gravitační pole znázorňujeme někdy přehledně graficky gravitačními siločárami. Jsou to orientované křivky, jejichž orientovaná tečna v libovolném bodě siločáry má směr příslušného vektoru \vec{K}_g . Na obr. 2.52 a obr. 2.53 jsou zakresleny plnými čarami siločáry gravitačního pole Země a soustavy Země-Měsíc.



{obr1.2-51} Obr. 2.52: Siločáry gravitačního pole Země (orientované přímky směřující do jejího středu).

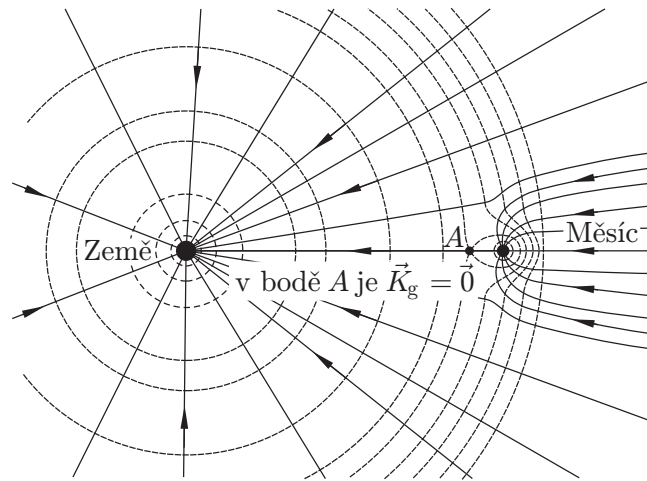
Superpozice gravitačních polí Z experimentů plyne, že dva hmotné objekty Z_1, Z_2 budí gravitační pole, jehož intenzita \vec{K}_g v obecném bodě P je dána vztahem

$$\{1.2-71\} \quad \vec{K}_g = \vec{K}_{g,1} + \vec{K}_{g,2}, \quad \text{zákon superpozice} \quad (2.73)$$

{ram-42}

kde $\vec{K}_{g,1}, \vec{K}_{g,2}$ jsou intenzity gravitačních polí, které by budily zdroje Z_1, Z_2 samostatně (obr. 2.54).

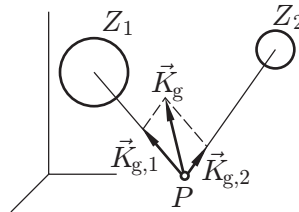
2.6. GRAVITAČNÍ POLE



{obr1.2-52}

Obr. 2.53: Siločáry gravitačního pole soustavy Země - Měsíc (orientované křivky).

To značí: Zdroje se v buzení gravitačních polí neovlivňují a jejich pole se překládají (superponují). Analogický výsledek platí pro libovolný počet zdrojů. Nazývá se zákon superpozice gravitačních polí.



{obr1.2-53}

Obr. 2.54: Zákon superpozice gravitačních polí.

2.6.1.3 Newtonův gravitační zákon.

Základní zákon gravitační interakce zní: Hmotný bod H_1 o hmotnosti m_1 (obr. 2.55) budí gravitační pole, které působí na hmotný bod H_2 o hmotnosti m_2 ve vzdálenosti r silou \vec{F}_g o velikosti

$$\{1.2-72a\} \quad F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \text{Newtonův gravitační zákon} \quad (2.74)$$

{ram-43}

která leží ve spojnici $H_1 H_2$ a je orientována směrem k H_1 . Pole buzené hmotným bodem H_2 působí na H_1 silou \vec{F}'_g , pro niž platí

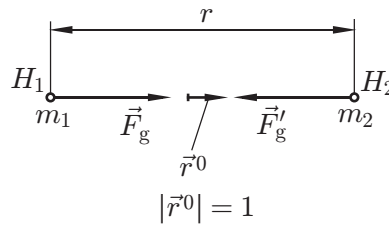
$$\{1.2-72b\} \quad \vec{F}'_g = -\vec{F}_g. \quad \text{Newtonův gravitační zákon} \quad (2.75)$$

{ram-44}

Konstanta κ se nazývá gravitační konstanta. Její (experimentálně zjištěná) hodnota je $\kappa = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Vztah pro sílu F_g lze zapsat ve vektorovém tvaru

2.6. GRAVITAČNÍ POLE



{obr1.2-54}

Obr. 2.55: K Newtonovu gravitačnímu zákonu.

{1.2-73}

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}^0, \quad \text{Newtonův gravitační zákon} \quad (2.76)$$

{ram-45}

kde $\vec{r}^0 = \overline{H_1 H_2} / |\overline{H_1 H_2}|$, obr. 2.55. Zákon nazvaný Newtonův gravitační zákon lze vyslovit stručně: Dva hmotné body se přitahují stejně velkými silami o velikosti dané vztahem (2.74).

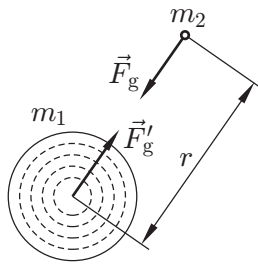
Informace:

1. Platnost gravitačního zákona, který vyvodil Newton rozbořením pohybu planet kolem Slunce, byla ověřena astronomickými měřeními, studiem pohybů družic i experimenty v laboratořích. Naopak ze vztahů (2.74), (2.75) lze s užitím pohybových rovnic určit teoreticky trajektorie planet i zákonitosti jejich pohybu, z nichž některé vyvodil J. Kepler na základě astronomických pozorování ještě před Newtonem (tři Keplerovy zákony). Největším úspěchem a potvrzením Newtonova gravitačního zákona bylo předpovědní existence, teoretické určení polohy a objevení osmé planety Slunce, planety Neptuna. Výpočty provedl r. 1840 U. Leverrier na základě studia malých odchylek dráhy planety Uranu od eliptické trajektorie, po níž by se Uran pohyboval jen účinkem gravitačního působení Slunce.
2. Zákon vyjádřený vztahy (2.74), (2.75) platí tehdy, jsou-li hmotné body v klidu nebo když se pohybují rychlostmi mnohem menšími než je rychlost světla. Při velmi rychlých (relativistických) pohybech se uplatňují jevy zpoždění způsobené konečnou rychlostí šíření změn gravitačního pole.
3. Gravitační síly, jimiž na sebe působí dvě tělesa T_1, T_2 obecného tvaru a které tudíž nelze dále považovat za hmotné body (tj. tělesa, jejichž lineární rozměry nejsou zanedbatelně malé vzhledem k jejich vzdálenosti), nelze určit prostým užitím vztahů (2.76), (2.75). Vždyť pro taková tělesa — např. pro dva vedle sebe stojící domy — není veličina r ve vztahu (2.76) vůbec definována. Gravitační síly \vec{F}_g působící na T_1 lze určit např. takto: Obě tělesa T_1, T_2 si představíme rozdělena na tak malé elementy, že je lze považovat za hmotné body. S užitím vztahů (2.76), (2.75) určíme gravitační síly, jimiž na sebe navzájem působí libovolné dva z těchto elementů. Poté sečteme (vektorově) všechny síly, které působí na všechny elementy tělesa T_1 . Tím získáme hledanou gravitační sílu \vec{F}_g . Tento postup je v obecném případě matematicky velmi náročný.

Lze však dokázat — a to buď s užitím uvedeného postupu nebo podstatně snadněji s užitím postupu, jímž se dokazuje tzv. **Gaussův zákon elektrostatiky** (viz [9], 1.2), tento důležitý výsledek: Dvě koule o hmotnostech m_1, m_2 , v nichž je hmotnost rozložena s kulovou symetrií (obr. 2.56), např. tedy i dvě homogenní koule, jejichž středy jsou od sebe vzdáleny o r , působí na sebe gravitačními silami danými vztahy (2.74), (2.75). Tento výsledek je důležitý zejména pro gravitační pole Země.

4. Intenzita gravitačního pole hmotného bodu a koule se souměrně rozloženou hmotností.

2.6. GRAVITAČNÍ POLE

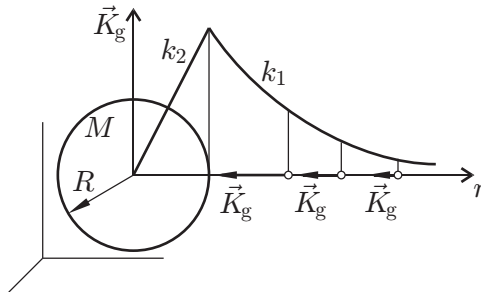


Obr. 2.56: Dvě homogenní koule, jejichž středy jsou od sebe vzdáleny o r , působí na sebe gravitačními silami danými vztahy (2.74) a (2.75).

Označíme-li hmotnost M , plyne ze vztahů (2.72) a (2.76), že intenzita \vec{K}_g ve vzdálenosti r od hmotného bodu nebo ve vzdálenosti r od středu koule v jejím vnějšku (tj. pro $r > R$, obr. 2.57) je dána vztahem

$$\{1.2-74\} \quad \vec{K}_g = -\kappa \frac{M}{r^2} \vec{r}^0. \quad (2.77)$$

Pro velikost \vec{K}_g dostáváme $K_g = \kappa M/r^2$. V obr. 2.57 je zakreslen křivkami k_1, k_2 průběh veličiny K_g pro homogenní kouli. Vně koule je to křivka k_1 . Lze dokázat, že uvnitř koule je to část přímky (k_2).



Obr. 2.57: Závislost velikosti vektoru intenzity gravitačního pole \vec{K}_g na velikosti vzdálenosti r od středu koule se symetricky rozloženou hmotou.

5. Silové pole, v němž působí na malé (bodové) těleso síly, které míří do jednoho bodu C , se nazývá centrální silové pole. Bod C se nazývá centrum. Gravitační pole homogenní koule je tedy centrální.

{pr1.2-13a} KP 2.6-1

Určete hmotnost Země za předpokladu, že je to nerotující homogenní koule (ideální Země) o poloměru $R_Z = 6,37 \cdot 10^6$ m a že gravitační zrychlení na jejím povrchu je $a_g = 9,8 \text{ m/s}^2 (\doteq g)$.

Řešení:

Ze vztahů $a_g = K_g$ a (2.77) plyne

$$a_g = \kappa M_Z / R_Z^2 \rightarrow M_Z = a_g R_Z^2 / \kappa = 9,80 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2 / 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg} = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Pozn.: tabulková hodnota $M_Z = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

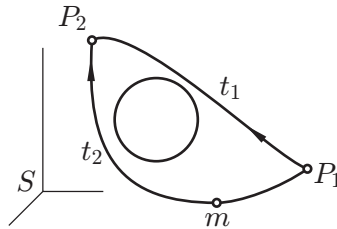
2.6.2 Gravitační energie

V této části budeme uvažovat o gravitačních polích buzených tělesy, která jsou v klidu v některé inerciální vztažné soustavě S , nebo která se vzhledem k ní pohybují pomalu. Taková gravitační pole se nazývají statická nebo kvazistatická.



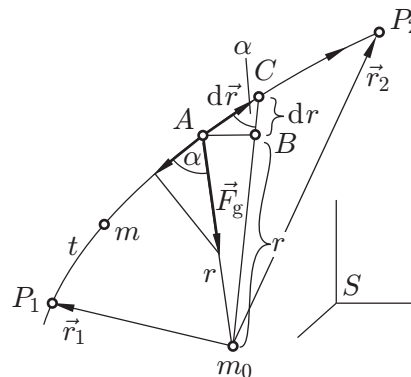
2.6.2.1 Práce sil gravitačního pole

Pohybuje-li se hmotný bod v gravitačním poli vzhledem ke vztažné soustavě, v níž jsou zdroje gravitačního pole v klidu (např. družice v poli Země), konají gravitační síly práci. Jednou z nejdůležitějších vlastností gravitačního pole (kterou dokážeme) je, že velikost této práce je při přemístění hmotného bodu z nějakého bodu P_1 do libovolného bodu P_2 závislá pouze na poloze bodů P_1, P_2 , nikoliv však na tvaru trajektorie. V obr. 2.58 jsou tedy práce gravitačních sil na trajektoriích t_1 a t_2 stejné.



Obr. 2.58: Hodnota práce gravitačních sil při přemístění hmotného bodu o hmotnosti m z bodu P_1 do bodu P_2 nezávisí na tvaru trajektorie oba body spojující.

{obr1.2-57}



Obr. 2.59: K vyjádření práce gravitační síly (která je buzena hmotným bodem m_0 a působí na hmotný bod m), která byla vykonána při přemístění hmotného bodu m z bodu P_1 do bodu P_2 .

{obr1.2-58}

Důkaz:

- a) V gravitačním poli buzeném hmotným bodem m_0 (jenž je v S v klidu, viz obr. 2.59) nechť se přemístí hmotný bod m po trajektorii t z bodu P_1 do P_2 . Gravitační síla \vec{F}_g , která na něj působí, vykoná práci

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_t dW,$$

kde

$$dW = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -F_g |d\vec{r}| \cos \alpha = -\kappa \frac{m_0 m}{r^2} dr,$$

protože

$$|d\vec{r}| \cos \alpha = dr$$

2.6. GRAVITAČNÍ POLE

(viz trojúhelník ABC). Tedy

$$\{1.2-75\} \quad W_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} -\kappa \frac{m_0 m}{r^2} dr = \kappa \frac{m_0 m}{r_2} - \kappa \frac{m_0 m}{r_1}. \quad \text{práce sil grav. pole} \quad (2.78)$$

{ram-46}

Důležitý výsledek: $W_{1 \rightarrow 2}$ nezávisí na tvaru trajektorie. Vztah (2.78) platí i v případě, že je gravitační pole buzeno homogenní koulí o hmotnosti m_0 . Přitom r je vzdálenost hmotného bodu od středu koule.

- b) Obecné gravitační pole lze interpretovat jako pole vzniklé superpozicí gravitačních polí hmotných bodů, na něž lze zdroj obecného pole rozložit. Síla, kterou působí na hmotný bod výsledné pole, je rovna součtu sil od těchto elementárních polí. Dále: práce výslednice sil je rovna součtu prací jednotlivých sil. Avšak práce těchto jednotlivých sil podle (2.78) nezávisí na tvaru trajektorie. Tedy ani výsledná práce nezávisí na tvaru trajektorie.

Výsledek:

Práce $W_{1 \rightarrow 2}$, kterou vykonají gravitační síly působící na hmotný bod při jeho přemístění z bodu P_1 do P_2 , nezávisí na tvaru trajektorie C , tj. integrál

$$\{1.2-76\} \quad W_{1 \rightarrow 2} = \int_{P_1, C}^{P_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = m \int_{P_1, C}^{P_2} \vec{K}_g \cdot d\vec{r} \quad (2.79)$$

nezávisí na tvaru křivky C . Přemístí-li se hmotný bod po uzavřené křivce C , tj. vrátí-li se do výchozího bodu P_1 , určíme práci gravitačních sil takto: Volíme na C další bod P_2 , tím rozdělíme C na dvě části C', C'' : $C' \dots P_1 P_2$, $C'' \dots P_2 P_1$. Práce W , vykonaná gravitačními silami na celé křivce C , je dána vztahem $W = W_{1 \rightarrow 2, C'} + W_{2 \rightarrow 1, C''} = W_{1 \rightarrow 2, C'} - W_{1 \rightarrow 2, C''} = 0$. Tedy

$$\{1.2-77\} \quad W = \oint_C \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = m \oint_C \vec{K}_g \cdot d\vec{r} = 0. \quad \text{konzervativnost grav. pole} \quad (2.80)$$

{ram-47}

Silové pole, které má tu vlastnost, že práce sil, jimiž působí na pohybující se hmotný bod, závisí jen na počáteční a výsledné poloze hmotného bodu v poli (nikoliv však na tvaru trajektorie), se nazývá konzervativní silové pole. Nutná a postačující podmínka pro to, aby silové pole $\vec{F}(x, y, z)$ bylo konzervativní, zřejmě je

$$\{1.2-78\} \quad \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \text{podmínka konzervativnosti silového pole} \quad (2.81)$$

{ram-48}

kde C je libovolná uzavřená křivka. Obecné gravitační pole je tedy (vzhledem k platnosti rovnice (2.80)) konzervativní.

2.6.2.2 Gravitační energie hmotného bodu

Na základě výsledku předešlého odstavce můžeme vyslovit definici gravitační potenciální energie E_g :

2.6. GRAVITAČNÍ POLE

Gravitační potenciální energie hmotného bodu (krátce: gravitační energie hmotného bodu) v obecném bodě P obecného gravitačního pole (buzeného hmotnými objekty ležícími v konečné vzdálenosti od bodu P), je definována takto:

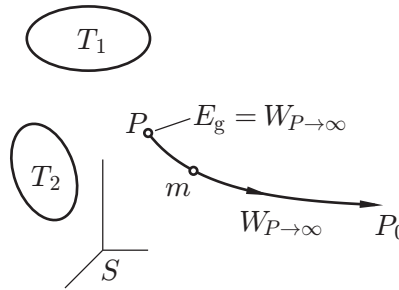
1. V referenčním bodě $P_0 \rightarrow \infty$ (v nekonečnu) je podle definice

$$\{1.2-79\} \quad E_g(\infty) = 0; \quad (2.82)$$

2. V obecném bodě P je

$$E_g(P) = -W_{P_0 \rightarrow P} = W_{P \rightarrow P_0} = W_{P \rightarrow \infty} (= m \int_P^\infty \vec{K}_g \cdot d\vec{r}),$$

kde $W_{P \rightarrow \infty}$ je práce, kterou vykonají gravitační síly působící na hmotný bod při jeho přemístění z bodu P do ∞ po libovolné křivce (obr. 2.60) a kde \vec{K}_g je intenzita gravitačního pole.



Obr. 2.60: Práce gravitačních sil působících na hmotný bod m při přemístění tohoto hmotného bodu z bodu P do $P_0 \rightarrow \infty$, ve kterém je zvolena $E_g = 0$.

Gravitační energie hmotného bodu o hmotnosti m v gravitačním poli jiného hmotného bodu o hmotnosti m_0 nebo homogenní koule v jejím vnějšku.

V bodě P (obr. 2.61) má hmotný bod gravitační energii danou vztahem (2.82). Přitom $W_{P \rightarrow \infty}$ je dáno vztahem (2.78), kde $r_1 = r$ a $r_2 \rightarrow \infty$. Tedy

$$\{1.2-80\} \quad E_g(P) = W_{P \rightarrow \infty} = -\kappa \frac{m_0 m}{r}. \quad \text{grav. energie dvojice hmotných bodů} \quad (2.83)$$

{ram-49}

Všimněme si: E_g je záporná, s rostoucím r roste, pro $P \rightarrow \infty$ je $E_g \rightarrow 0$. energii E_g danou vztahem (2.83) lze interpretovat i jako gravitační energii soustavy „koule + hmotný bod“. Výsledek platí i pro dvě koule nebo dva hmotné body.

{pr1.2-13b}

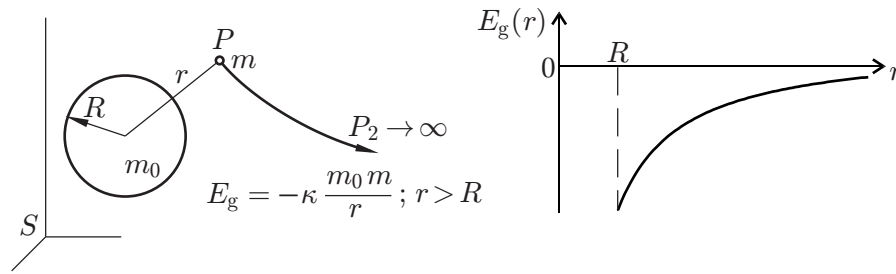
KP 2.6-2

Určete:

1. Sílu, kterou přitahuje Země Měsíc;
2. Intenzitu gravitačního pole Země v oblasti Měsíce;
3. Zrychlení Měsíce v geocentrické soustavě;
4. Gravitační energii soustavy „Země + Měsíc“.

Řešení:

2.6. GRAVITAČNÍ POLE



Obr. 2.61: Gravitační energie E_g soustavy „koule o hmotnosti m_0 + hmotný bod m “ v bodě P (nacházející se mimo kouli).

{obr1.2-60}

1. $\vec{F}_g = ?$ Je orientována do středu Země. Má velikost $F_g = \kappa \frac{M_Z \cdot M_M}{r_{ZM}^2}$. Dosadíme hodnoty z tabulek na straně 401. $F_g = 1,99 \cdot 10^{20}$ N;
2. $\vec{K}_g = ?$ $\vec{K}_g \parallel \vec{F}_g$, $K_g = \kappa \frac{M_Z}{r_{ZM}^2} = \dots = 2,70 \cdot 10^{-3}$ m/s²;
3. $\vec{a} = ?$ $\vec{a} = \vec{K}_g$;
4. $E_g = ?$ $E_g = -\kappa \frac{M_Z \cdot M_M}{r_{ZM}} = \dots = -7,62 \cdot 10^{28}$ J.

2.6.2.3 Potenciál gravitačního pole

Gravitační pole lze charakterizovat nejen intenzitou gravitačního pole \vec{K}_g , nýbrž i skalární veličinou φ_g nazvanou potenciál gravitačního pole. Při její definici vycházíme z toho, že podle (2.82) je gravitační energie E_g hmotného bodu v libovolném bodě P gravitačního pole úměrná jeho hmotnosti m . Skalární veličina E_g/m tedy na m nezávisí. Potenciál gravitačního pole φ_g v jeho obecném bodě P definujeme vztahem

{1.2-81}

$$\varphi_g = \frac{E_g}{m}, \quad \text{potenciál gravitačního pole} \quad (2.84)$$

{ram-50}

kde E_g je gravitační energie hmotného bodu o (libovolné) hmotnosti m v bodě P .

Informace:

1. Jednotky: $[\varphi_g] = \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$;
2. Fyzikální význam: Volíme-li $m = 1$ kg, je $\{\varphi_g\} = \{W_g\}$, tj. číselně ...;
3. Z předešlých úvah vyplývá, že pro φ_g platí zákon superpozice: Potenciál φ_g pole buzeného zdroji Z_1, Z_2, \dots je dán vztahem $\varphi_g = \varphi_{g,1} + \varphi_{g,2} + \dots$, kde $\varphi_{g,1}, \varphi_{g,2}, \dots$ jsou potenciály gravitačních polí, které by budily jednotlivé zdroje Z_1, Z_2, \dots , kdyby existovaly samostatně;
4. Potenciál gravitačního pole hmotného bodu. Podle (2.84) a (2.83) je potenciál φ_g v bodě P gravitačního pole buzeného (hmotným bodem o hmotnosti m_0) dán vztahem

{1.2-82}

$$\varphi_g = \frac{E_g}{m} = \frac{1}{m} \cdot \left(-\kappa \frac{m m_0}{r} \right) = -\kappa \frac{m_0}{r}. \quad (2.85)$$

2.6. GRAVITAČNÍ POLE

Zde m je hmotnost jiného hmotného bodu, vloženého do bodu P a E_g jeho gravitační energie v poli, vytvořeném hmotným bodem m_0 . Vztah (2.92) platí i pro gravitační pole buzené homogenní koulí (např. ideální Zemí) v jejím vnějšku.

- Hladina stejného potenciálu (též ekvipotenciála) gravitačního pole je plocha, na níž má potenciál φ_g všude stejnou hodnotu. V gravitačním poli buzeném hmotným bodem, v němž je φ_g dáno vztahem (2.85), jsou hladiny potenciálu soustředné kulové plochy ($r = \text{konst.}$). Hladiny potenciálu jsou všude kolmé na gravitační siločáry (viz obr. 2.52, 2.53).
- Ze zákona superpozice gravitačních polí plyne, že gravitační energie hmotného bodu v gravitačním poli buzeném několika zdroji (např. Slunce + Země + Měsíc + ...) je dána vztahem

$$E_g = E_{g,1} + E_{g,2} + \dots + E_{g,n},$$

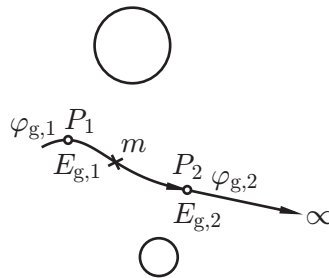
kde $E_{g,1}, E_{g,2}, \dots$ jsou gravitační energie, které by hmotný bod měl v jednotlivých gravitačních polích.

Práci gravitačních sil působících v obecném gravitačním poli na hmotný bod při jeho přemístění z bodu P_1 do P_2 lze vyjádřit takto (obr. 2.62)

$$\{1.2-83\} \quad W_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow \infty} - W_{2 \rightarrow \infty} = E_{g,1} - E_{g,2}. \quad (2.86)$$

Užili jsme definičního vztahu (2.82). Pomocí potenciálu — rovnice (2.84) — lze práci vyjádřit takto

$$\{1.2-84\} \quad W_{1 \rightarrow 2} = E_{g,1} - E_{g,2} = m(\varphi_{g,1} - \varphi_{g,2}). \quad (2.87)$$



Obr. 2.62: K odvození práce gravitačních sil působících v obecném gravitačním poli na hmotný bod o hmotnosti m při jeho přemístění z bodu P_1 do bodu P_2 vyjádřená pomocí potenciálních energií $E_{g,1}, E_{g,2}$ a potenciálů $\varphi_{g,1}, \varphi_{g,2}$ určených v bodech P_1 , resp. P_2 .

{obr1.2-61}

{pr1.2-14} **KP 2.6-3** —————

Družice o hmotnosti $m = 4\,000$ kg, která se původně pohybovala ve výšce $h = 4\,000$ km, přistála na Zemi. Určete:

- Gravitační energii družice
 - ve výšce h ,
 - na Zemi;
- Práci, kterou vykonala gravitační síla při sestupu družice.

Řešení:

- a) $E_{g,1} = ?$ $E_{g,1} = -\kappa \frac{mM_Z}{R_Z+h} = \dots = -1,54 \cdot 10^{11}$ J,

2.6. GRAVITAČNÍ POLE

$$\text{b) } E_{g,2} = ? \quad E_{g,2} = -\kappa \frac{mM_Z}{R_Z} = \dots = -2,50 \cdot 10^{11} \text{ J};$$

$$2. \quad W = ? \quad W = E_{g,1} - E_{g,2} = 9,6 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

2.6.3 Gravitační pole Země

2.6.3.1 Ideální Země

představuje nerotující kulově souměrné těleso o poloměru $R_Z = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$. Gravitační síla \vec{F}_g působící na hmotný bod m na povrchu Země je centrální a má velikost

$$F_g = \kappa \frac{M_Z m}{R_Z^2}.$$

Gravitační zrychlení \vec{a}_g míří rovněž do středu Země a má velikost

$$\{1.2-85\} \quad a_g = \frac{F_g}{m} = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} = \dots \doteq 9,80 \text{ m/s}^2 (\doteq g). \quad (2.88)$$

Gravitační energie hmotného bodu ve vzdálenosti $r (> R_Z)$ od středu Země je dána vztahem

$$\{1.2-86\} \quad E_g = -\kappa \frac{mM_Z}{r}. \quad (2.89)$$

2.6.3.2 Skutečná Země

má tvar baňaté hrušky s vystouplým severním pólem. Gravitační síly \vec{F}_g působící na hmotný bod i a gravitační zrychlení jsou v různých místech povrchu Země (vzhledem ke zmiňovanému nerovnoměrnému rozložení hmoty) různě velké a nejsou přesně centrální. Označíme-li \vec{a}_P gravitační zrychlení na pólu a \vec{a}_R gravitační zrychlení na rovníku, platí

$$a_P - a_R = 0,018 \text{ m/s}^2.$$

Tyto výsledky byly získány v poslední době na základě zkoumání pohybu družic Země.

Vzhledem k tomu, že Země v geocentrické vztažné soustavě rotuje, je neinerciální vztažnou soustavou a na tělesa na jejím povrchu působí i setrvačné síly. Ježto rotace Země je (téměř) rovnoměrná, působí na klidný hmotný bod na jejím povrchu ze sil setrvačných jen setrvačná síla odstředivá³ \vec{F}_o^* o velikosti $F_o^* = mv^2/r$. Na rovníku je $r = R_Z$, $v = 465 \text{ m/s}$. Součet sil \vec{F}_g a \vec{F}_o^* se nazývá tíhová síla nebo tíže nebo tíha. Značí se \vec{G} (obr. 2.63):

$$\{1.2-87\} \quad \vec{G} = \vec{F}_g + \vec{F}_o^*. \quad (2.90)$$

Má největší velikost na pólech ($G = F_g$), nejmenší na rovníku ($G = F_g - F_o^*$).

Rozdíl velikostí tíhového zrychlení \vec{g} definovaného vztahem

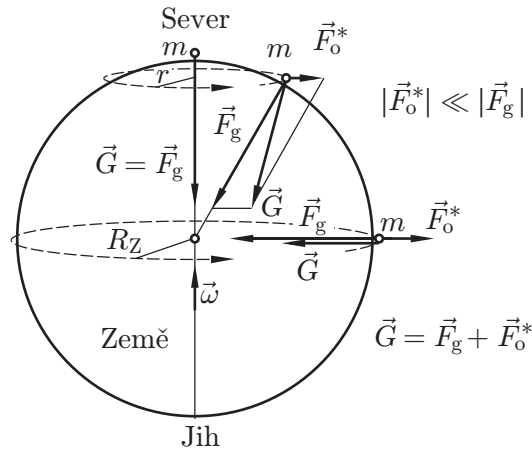
$$\vec{g} = \frac{\vec{G}}{m}$$

na severním pólu a na rovníku je $g_P - g_R = (9,8321 - 9,7799) \text{ m/s}^2 = 0,0522 \text{ m/s}^2$.

Fyzikální pole, které se projevuje tíhovými silami, se nazývá tíhové pole.

³Lze ji rovněž vyjádřit vztahem $F_o^* = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$, kde \vec{R} je polohový vektor hmotného bodu v soustavě spojené se středem Země.

2.6. GRAVITAČNÍ POLE



Obr. 2.63: Tíhová síla \vec{G} je dána vektorovým součtem gravitační síly \vec{F}_g a odstředivé setrvačné síly \vec{F}_o^* .

{obr1.2-62}

Ke vztahu (2.90) poznamenejme, že síla \vec{G} je součet gravitační síly \vec{F}_g tj. síly skutečné a setrvačné síly \vec{F}_o^* (která se někdy považuje za neskutečnou, zdánlivou). Sčítání sil různého typu je oprávněné proto, že z hlediska účinků není mezi silami skutečnými a setrvačnými rozdíl. Nadto je velmi pravděpodobné, že síly setrvačné jsou způsobeny gravitačním působením veškerých hmot vesmíru, takže mezi oběma typy sil není pravděpodobně podstatný rozdíl ani z hlediska jeho vzniku.

2.6.3.3 Tíhové pole u povrchu Země

v nepříliš velké oblasti je homogenní. Tíhová síla

$$\{1.2-88\} \quad \vec{G} = m\vec{g} \quad (2.91)$$

působící na hmotný bod má v této oblasti všude stejný směr a velikost. Je dána vztahem (2.90) — viz obr. 2.64a. Vektor \vec{G} má podle definice svislý směr. Přibližně platí

$$\{1.2-89\} \quad \vec{G} \doteq \vec{F}_g. \quad (2.92)$$

Z předešlých úvah o obecném gravitačním poli i z výsledku příkladu 1.2-10 plyne, že tíhové pole je konzervativní, tj. že platí

$$\{1.2-90\} \quad \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (2.93)$$

kde C je libovolná uzavřená křivka. Přemístí-li se hmotný bod z bodu P_1 ve výšce h_1 (obr. 2.64b) do bodu P_2 ve výšce h_2 , vykoná tíhová síla \vec{G} práci (viz příklad KP 2.5-3)

$$\{1.2-91\} \quad W_{G,1 \rightarrow 2} = G(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2 (= E_{G,1} - E_{G,2} = -\Delta E_G) \quad (2.94)$$

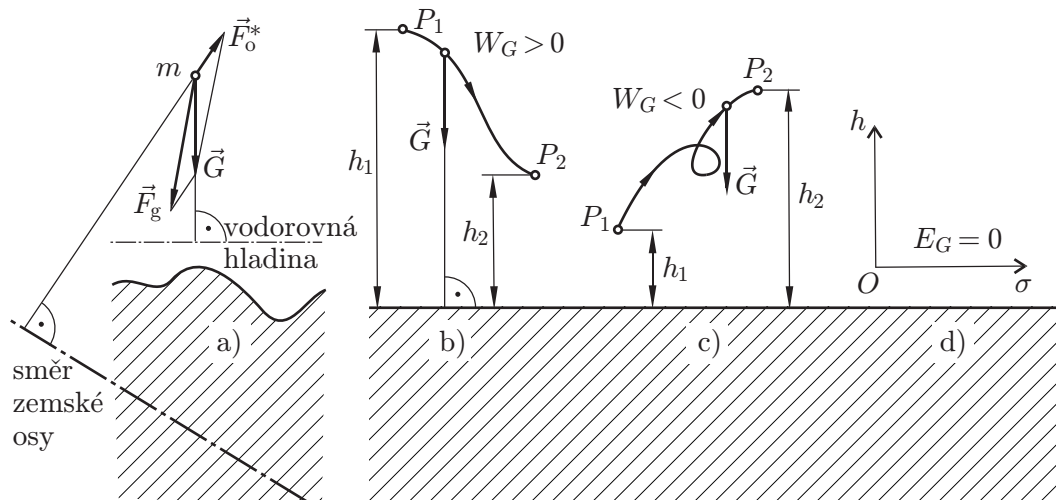
nezávislou na tvaru trajektorie, na rychlosti pohybu a na tom, zda na hmotný bod současně působí i jiné síly. Je-li $h_1 > h_2$ (obr. 2.64b), je $W_G > 0$. Je-li $h_1 < h_2$, je $W_G < 0$ (obr. 2.64c).

Na základě vztahu (2.94) definujeme potenciální energii hmotného bodu v homogenním tíhovém poli (krátce: tíhovou energii), označenou E_G , takto:

1. Volíme libovolnou vodorovnou rovinu σ rovnoběžnou s povrchem Země a pro každý její bod P položíme

$$E_G(P) = 0 \text{ J.}$$

2.6. GRAVITAČNÍ POLE



Obr. 2.64: Aproximace síly \vec{F}_g tíhovou silou \vec{G} u povrchu Země (a). Práce tíhové síly, působící na hmotný bod po libovolné trajektorii (b), (c). Hladina nulové potenciální tíhové energie σ je rovinou, v jejímž každém bodě P položíme $E_G(P) = 0$, je rovnoběžná se zemským povrchem.

Pozn.: rovina σ se nazývá hladina nulové tíhové energie (obr. 2.64d).

2. Zavedeme svislou osu Oh s počátkem v rovině σ , orientovanou nahoru. Tíhová potenciální energie v bodě P o souřadnici h je podle definice

$$\{1.2-92\} \quad E_G(P) = mgh. \quad (2.95)$$

Informace:

1. Jednotka $[E_G] = \text{joule}$. Pro $h > 0$ je $E_G > 0$, pro $h < 0$ je $E_G < 0$.
2. Z definičního vztahu (2.95) a ze vztahu (2.94) plyne, že platí (obr. 2.64)

$$\{1.2-93\} \quad W_{G,P_1 \rightarrow P_2} = E_G(P_1) - E_G(P_2) = -\Delta E_G. \quad \text{práce tíhové síly} \quad (2.96)$$

{ram-51}

Tento vztah je zvláštním případem obecného vztahu (2.86).

3. Lze dokázat (viz odst. 2.9), že tíhová potenciální energie obecného tělesa, jež nelze pokládat za hmotný bod, je rovněž dána vztahem (2.95), přičemž h je souřadnice jeho těžiště.
4. Za hladinu nulové tíhové potenciální energie se volí nejčastěji povrch Země.

Poznámka: Souvislost mezi vztahy (2.89) a (2.95). Potenciální energie hmotného bodu v gravitačním poli buzeném tělesy rozloženými v ohraničené oblasti vesmíru (např. tělesy sluneční soustavy) byla definována vztahy (2.82) tak, že jsme volili hodnotu potenciální energie hmotného bodu v nekonečně vzdáleném bodě P_0 rovnu nule, tj. $E_g(P_0 \rightarrow \infty) = 0$. Tato volba byla účelná, ale libovolná.

Volme nyní bod P_0 , v němž pro hmotný bod platí $E_g(P_0) = 0$, na povrchu ideální Země. Pak v obecném bodě P ve vzdálenosti $r \geq R_2$ bude mít hmotný bod gravitační potenciální energii

$$\{1.2-94\} \quad E_g(P) = -\kappa \frac{mM_Z}{r} + C. \quad (2.97)$$

Konstantu C určíme z podmínky, že pro $r = R_Z$ má být $E_g(P) = E_g(P_0) = 0$. Dosazením do (2.97) dostaneme $C = \kappa m M_Z / R_Z$.

Ve výšce $h (\ll R_Z)$ nad povrchem Země má pak hmotný bod gravitační potenciální energii přibližně rovnou tíhové potenciální energii:

$$E_g = -\kappa \frac{m M_Z}{(R_Z + h)} + \kappa \frac{m M_Z}{R_Z} = -\kappa m M_Z (R_Z + h)^{-1} + \kappa \frac{m M_Z}{R_Z} = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} m h = m g h.$$

Při úpravě jsme užili binomického rozvoje

$$(R_Z + h)^{-1} = R_Z^{-1} (1 + h/R_Z)^{-1} \doteq R_Z^{-1} (1 - h/R_Z)$$

a vztahu (2.88). Hlavní výsledek: rovnice (2.95) je přibližný vztah plynoucí z obecného vztahu (2.97).

Řešte příklady [KP 1.5-2](#) v v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.6-4](#) až [KP 2.6-9](#).

2.7 Mechanická energie hmotného bodu, pohyb hmotného bodu v gravitačním poli

Nejprve zde bude definována mechanická energie hmotného bodu v tíhovém a gravitačním poli, poté odvozen základní vztah mezi změnou mechanické energie hmotného bodu a prací sil, které na něj působí — rovnice (2.102). Zvláštním případem tohoto vztahu je zákon zachování mechanické energie, rovnice (2.107). V další části jsou nejprve odvozeny zákonitosti ideálního šikmého vrhu. Poté je odvozena energetická podmínka pro setrvání hmotného bodu v gravitačním poli nebo jeho úniku do nekonečna. V dalším je diskutován tvar trajektorií při pohybu hmotného bodu v centrálním gravitačním poli a vysloveny zákonitosti tohoto pohybu (zobecnění Keplerových zákonů). V závěru jsou vyšetřeny tzv. kosmické rychlosti.

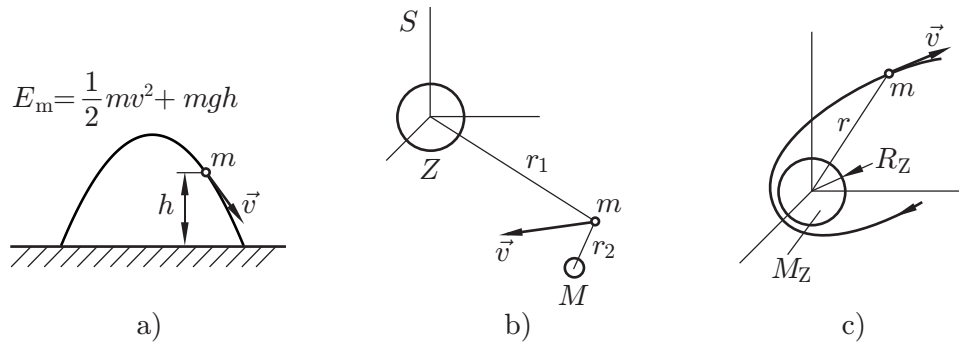
- Cíl:**
- I) Vztahy a zákony uvedené v rámečcích, vysvětlit pojmy, veličiny a výsledky v tomto textu;
 - II) Definovat mechanickou energii hmotného bodu v gravitačním a tíhovém poli, vysvětlit souvislost jejich změn s prací působících sil;
 - III) Vyslovit a vyložit zákon zachování mechanické energie hmotného bodu v gravitačním a tíhovém poli;
 - IV) Odvodit a vysvětlit zákonitosti ideálního šikmého vrhu;
 - V) Odvodit a vysvětlit podmínku setrvání hmotného bodu v gravitačním poli resp. jeho úniku, vysvětlit zákonitosti pohybu hmotného bodu v centrálním gravitačním poli — tvar trajektorií, zobecnění Keplerových zákonů;
 - VI) Vysvětlit pojem kosmických rychlostí, odvodit vztahy pro velikost první a druhé kosmické rychlosti, znát jejich velikosti;
 - VII) Řešit samostatně příklady uvedené v tomto textu a příklady typu [KP 1.4-8](#) až [KP 1.4-18](#), [KP 1.4-10](#) až [KP 1.4-11](#), [KP 1.5-1](#), [KP 1.5-3](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.6-10](#) až [KP 2.6-20](#).

2.7.1 Mechanická energie hmotného bodu v tíhovém a gravitačním poli



2.7.1.1 Definice mechanické energie

Hmotný bod o hmotnosti m , který se pohybuje v tíhovém poli Země (např. kámen vržený na povrchu Země), má ve vztahné soustavě dané povrchem Země (tj. v laboratorní vztahné soustavě) kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ a potenciální tíhovou energii $E_p = E_G = mgh$ (obr. 2.65a).



Obr. 2.65: Mechanická energie E_m hmotného bodu v tíhovém poli Země (a), v gravitačním poli soustavy „Země + Měsíc“ (b), v gravitačním poli ideální Země (c).

{obr1.2-64}

Hmotný bod, který se pohybuje v obecném gravitačním poli (např. kosmická sonda), má v geocentrické (nebo heliocentrické) vztahné soustavě (obr. 2.65b) kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ a potenciální gravitační energii $E_p = E_g$. V obou případech definujeme mechanickou energii hmotného bodu v uvažované vztahné soustavě vztahem

{1.2-95}

$$E_m = E_k + E_p. \quad \text{definice mechanické energie hmotného bodu} \quad (2.98)$$

{ram-52}

Tento obecný definiční vztah nabývá v konkrétních případech tento tvar:

1. hmotný bod v homogenním tíhovém poli Země, v laboratorní soustavě, obr. 2.65a:

{1.2-96}

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgh. \quad (2.99)$$

2. hmotný bod v obecném gravitačním poli, v geocentrické (nebo heliocentrické) soustavě, obr. 2.65b:

{1.2-97}

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_g. \quad (2.100)$$

Konkrétní tvar funkce udávající E_g závisí na uvažovaném gravitačním poli — viz příklad KP 2.7-2.

3. hmotný bod v gravitačním poli ideální Země, v geocentrické soustavě, obr. 2.65c:

{1.2-98}

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM_Z}{r}. \quad (2.101)$$

Význam symbolů je zřejmý z obr. 2.65c. Analogický vztah platí pro hmotný bod v gravitačním poli Slunce, Měsíce nebo obecně v gravitačním poli hmotného bodu.

{pr1.2-15} **KP 2.7-1** _____

Určete mechanickou energii kamene o hmotnosti $m = 0,2\text{ kg}$, který se ve výšce $h = 15\text{ m}$ pohybuje v tíhovém poli Země rychlostí $v = 10\text{ m/s}$.

Řešení:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \dots = 40\text{ J}.$$

{pr1.2-16} **KP 2.7-2** _____

Určete mechanickou energii kosmické sondy v gravitačním poli soustavy „Země + Měsíc“, obr. 2.65b. Sonda má hmotnost $m = 1\,000\text{ kg}$, její rychlost v geocentrické soustavě je $v = 2\text{ km/s}$, její vzdálenost od Země je $r_1 = 3,80 \cdot 10^5\text{ km}$ a od Měsíce $r_2 = 1,00 \cdot 10^4\text{ km}$. Gravitační pole Slunce neuvažujte.

Řešení:

Mechanická energie sondy v geocentrické soustavě je dána vztahem

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_g, \quad \text{kde } E_g = -\kappa \frac{mM_Z}{r_1} - \kappa \frac{mM_M}{r_2}.$$

Užili jsme zákona superpozice. Dosazením a užitím tabulkových hodnot dostaneme $E_m = 4,6 \cdot 10^8\text{ J}$.

2.7.1.2 Práce a mechanické energie

Úvahy v této části navazují na obecné úvahy o energii v odst. 2.5.2 a na úvahy o kinetické energii v odst. 2.5.4. Budeme vyšetřovat energetické poměry při pohybu malého tělesa (hmotného bodu) v tíhovém a gravitačním poli v laboratorní a geocentrické vztažné soustavě S .

Uvažujme o hmotném bodu, který se pohybuje v homogenním tíhovém poli Země — obr. 2.66a, (resp. v obecném gravitačním poli — obr. 2.66b) současným účinkem tíhové síly \vec{G} (resp. gravitační síly \vec{F}_g) a dalších sil. Hmotným bodem může být např. raketa, na kterou působí kromě konzervativní síly \vec{G} (resp. \vec{F}_g) síla odporu vzduchu \vec{F}_o a síla motoru \vec{F}_m . Označme $E_{m,1}$ a $E_{m,2}$ mechanickou energii hmotného bodu ve dvou bodech P_1, P_2 , jimiž hmotný bod prochází v uvedeném pořadí. Dokážeme, že platí

$$\{1.2-99\} \quad E_{m,2} - E_{m,1} = W_{\text{nekonz}}, \quad \text{souvislost změny mech. energie s prací} \quad (2.102)$$

{ram-53}

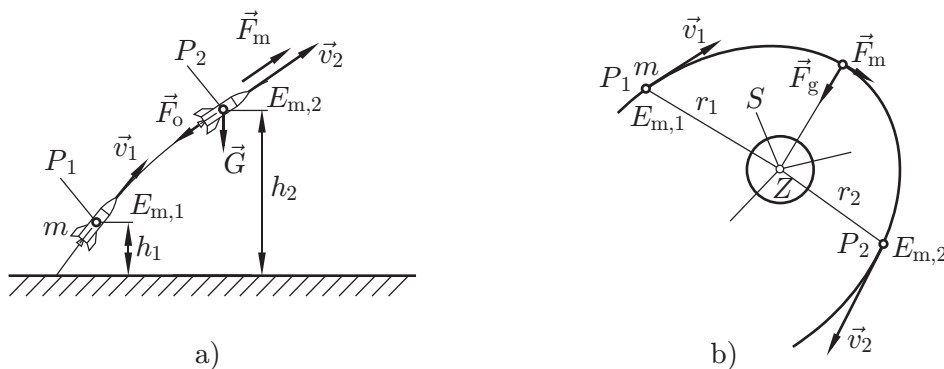
kde W_{nekonz} je součet prací, které na úseku P_1P_2 vykonají všechny síly jiné než konzervativní, tj. síly jiné než síla tíhová \vec{G} (resp. gravitační \vec{F}_g). V případě rakety na obr. 2.66a je W_{nekonz} součet prací sil odporu vzduchu \vec{F}_o a motoru rakety \vec{F}_m .

Důkaz: Součet prací všech sil působících na hmotný bod na úseku P_1P_2 , tj. výsledná práce W_v , je rovna změně kinetické energie hmotného bodu (viz odst. 2.5.4):

$$\{1.2-100\} \quad \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_v, \quad \text{kde } W_v = W_{\text{konz}} + W_{\text{nekonz}}. \quad (2.103)$$

Přitom jsme vyjádřili W_v jako součet práce síly konzervativní (tíhové resp. gravitační), W_{konz} , a práce všech jiných sil, W_{nekonz} . Práce W_{konz} je rovna rozdílu potenciálních energií, $W_{\text{konz}} = E_{p,1} - E_{p,2}$, kde E_p může být např. E_G nebo E_g , viz rovnice (2.94), (2.86). Dosadíme-li do rovnice (2.103) a užijeme-li definičního vztahu (2.98), dostaneme po úpravě dokazovaný vztah (2.102).

V konkrétních případech nabude obecný vztah (2.102) tento tvar:



{obr1.2-65} Obr. 2.66: Pohyb hmotného bodu v tíhovém poli Země (a) a v obecném gravitačním poli (b).

1. hmotný bod v homogenním tíhovém poli Země (obr. 2.66a)

$$\{1.2-101\} \quad \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1\right) = W_{\text{nekonz}}; \quad (2.104)$$

2. hmotný bod v obecném gravitačním poli

$$\{1.2-102\} \quad \frac{1}{2}mv_2^2 + E_{g,2} - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + E_{g,1}\right) = W_{\text{nekonz}}; \quad (2.105)$$

3. hmotný bod v centrálním gravitačním poli ideální Země (obr. 2.66b)

$$\{1.2-103\} \quad \frac{1}{2}mv_2^2 - \kappa \frac{mM_Z}{r_2} - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 - \kappa \frac{mM_Z}{r_1}\right) = W_{\text{nekonz}}. \quad (2.106)$$

{pr1.2-17} **KP 2.7-3** _____

Kámen (hmotný bod) o hmotnosti $m = 0,1 \text{ kg}$ byl vržen v bodě P_1 na povrchu Země šikmo vzhůru rychlostí \vec{v}_1 o velikosti $v_1 = 20 \text{ m/s}$. V bodě P_2 ve výšce $h_2 = 14 \text{ m}$ měla jeho rychlost velikost $v_2 = 10 \text{ m/s}$. Pro úsek P_1P_2 trajektorie určete:

1. Práci výsledné síly působící na hmotný bod;
2. Práci tíhové síly;
3. Práci síly odporu vzduchu.

Řešení:

1. $W_v = ?$ $W_v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \dots = -15 \text{ J}$;
2. $W_G = ?$ $W_G = mgh_1 - mgh_2 = -mgh_2 = -14 \text{ J}$;
3. $W_o = W_{\text{nekonz}} = E_{m,2} - E_{m,1} = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \dots = -1 \text{ J}$. [Nebo: $W_v = W_G + W_o \rightarrow W_o = W_v - W_G = \dots = -1 \text{ J}$].

Poznámka: Síla odporu prostředí koná vždy zápornou práci, neboť míří proti směru pohybu. Působí-li na těleso pohybující se v tíhovém poli kromě síly \vec{G} jen síla odporu prostředí, E_m klesá — viz rovnice (2.102). Tento proces přeměny mechanické energie hmotného bodu v energii neuspořádaného pohybu molekul okolního prostředí i jeho vlastních se nazývá disipace energie.

2.7.1.3 Zákon zachování mechanické energie hmotného bodu



Jestliže se hmotný bod pohybuje v tíhovém poli jen účinkem tíhové síly \vec{G} (tj. jestliže na něj nepůsobí jiné síly) nebo jestliže se hmotný bod pohybuje v gravitačním poli jen účinkem síly gravitační, je ve vztahu (2.102) $W_{\text{nekonz}} = 0$. Vyjádříme-li v tomto vztahu E_m podle rovnice (2.98), dostaneme

$$(E_{k,2} + E_{p,2}) - (E_{k,1} + E_{p,1}) = 0, \quad \text{tj. } E_{k,2} + E_{p,2} = E_{k,1} + E_{p,1}.$$

Ježto tyto vztahy platí pro libovolnou dvojici bodů $P_1 P_2$ náležejících trajektorii hmotného bodu, platí během celého pohybu

$$\{1.2-104\} \quad E_k + E_p = \text{konst.} \quad \text{zákon zachování mechanické energie} \quad (2.107)$$

{ram-54}

Tedy:

$$\{1.2-105\} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{konst.} \quad \text{v homogenním tíhovém poli (obr. 2.64a)} \quad (2.108)$$

{ram-55}

$$\{1.2-106\} \quad \frac{1}{2}mv^2 + E_g = \text{konst.} \quad \text{v obecném gravitačním poli (obr. 2.64b)} \quad (2.109)$$

{ram-56}

$$\{1.2-107\} \quad \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM}{r} = \text{konst.} \quad \text{v centrálním gravitačním poli (obr. 2.64c)} \quad (2.110)$$

{ram-57}

Zde jsou v, h, E_g, r proměnné funkce času.

Vztah (2.107) nebo vztahy (2.108) – (2.110) vyjadřují zákon zachování mechanické energie hmotného bodu v tíhovém a gravitačním poli.

Informace:

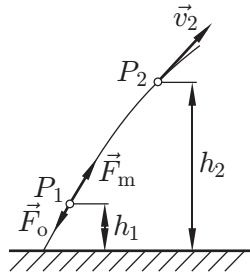
1. Vztah $E_{m,2} - E_{m,1} = W_{\text{nekonz}}$ je jeden z typických vztahů znázorněných schematicky v obr. 2.43. Nalevo je rozdíl hodnot mechanické energie ve stavech 1, 2, napravo je veličina W_{nekonz} charakterizující určitým způsobem děj, kterým hmotný bod ze stavu 1 do stavu 2 přechází.
2. Vztah (2.107) platí i tehdy, když na hmotný bod působí i jiné síly než gravitační nebo tíhové, jestliže tyto síly nekonají práci ($W_{\text{nekonz}} = 0$) — viz příklad 1.2-19.

pr1.2-18} KP 2.7-4

Startující meteorologická raketa o hmotnosti $m = 1$ kg měla v bodě P_1 ve výšce $h_1 = 10$ m nad Zemí rychlost $v_1 = 10$ m/s a v bodě P_2 ve výšce $h_2 = 50$ m rychlost $v_2 = 20$ m/s. Považujte hmotnost rakety na úseku $P_1 P_2$ za stálou a řešte úkoly:

1. Určete E_k, E_G, E_m v bodech P_1, P_2 ;
2. Odhadněte práci, kterou na úseku $P_1 P_2$ vykonala síla odporu vzduchu \vec{F}_o , jestliže motor rakety vykonal práci $W_{\text{mot}} = 340$ J (obr. 2.67).

Řešení:



Obr. 2.67: Příklad KP 2.7-4.

{obr1.2-66}

1.

$$E_{k,1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 \text{ J} = 50 \text{ J},$$

$$E_{G,1} = mgh_1 = \dots = 100 \text{ J}.$$

$$E_{k,2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \dots = 200 \text{ J},$$

$$E_{G,2} = mgh_2 = \dots = 250 \text{ J}.$$

$$E_{m,1} = E_{k,1} + E_{G,1} = 50 \text{ J} + 100 \text{ J} = 150 \text{ J},$$

$$E_{m,2} = 450 \text{ J};$$

2. $W_{\text{mot}} = ?$ Podle (2.102) platí $W_{\text{nekonz}} = E_{m,2} - E_{m,1}$. Přitom $W_{\text{nekonz}} = W_{\text{mot}} + W_o$, kde W_o je práce síly odporu vzduchu. Ježto $W_o < 0$ (\vec{F}_o působí proti směru pohybu), musí být $W_{\text{mot}} > W_{\text{nekonz}} = E_{m,2} - E_{m,1} = 300 \text{ J}$;
3. $W_o = ?$ $W_{\text{nekonz}} = W_{\text{mot}} + W_o$, $W_o = W_{\text{nekonz}} - W_{\text{mot}} = 300 \text{ J} - 340 \text{ J} = -40 \text{ J}$.

{pr1.2-19}

KP 2.7-5

Těleso (hmotný bod) o hmotnosti $m = 0,5 \text{ kg}$, zavěšené na vlákne délky $l = 80 \text{ cm}$ (obr. 2.68), bylo vychýleno z rovnovážné polohy (úhel $\alpha = 60^\circ$) a puštěno s nulovou počáteční rychlostí. Zanedbejte odpor vzduchu a určete:

- Kinetickou energii hmotného bodu při průchodu rovnovážnou polohou;
- Sílu \vec{F}_1 , kterou působí vlákno na hmotný bod v nejnižším bodě trajektorie.

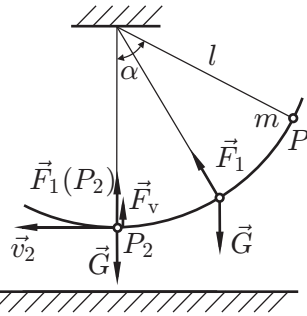
Řešení:

Těleso se pohybuje účinkem síly \vec{G} , která je stálá, a síly \vec{F}_1 , kterou na ně působí vlákno a která se při pohybu mění. Označíme počáteční bod P_1 , nejnižší bod trajektorie P_2 .

1. $E_k = ?$ Vyjdeme ze vztahu (2.102), kde W_{nekonz} je práce síly \vec{F}_1 . Tato síla je trvale kolmá na trajektorii, tedy $W_{\text{nekonz}} = 0$. Mechanická energie hmotného bodu při pohybu je tedy stálá – viz rovnice (2.102): $E_m = \text{konst.}$ Tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1, \quad \text{a zároveň } v_1 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow E_{k,2} &= \frac{1}{2}mv_2^2 = mg(h_1 - h_2) = mg(l - l \cos \alpha) = mgl(1 - \cos \alpha) = \dots = 2 \text{ J}. \end{aligned}$$

2. $\vec{F}_1(P_2) = ?$ $\vec{F}_1 + \vec{G} = \vec{F}_v$ (obr. 2.68), $F_v = mv_2^2/l$ (síla dostředivá) $\rightarrow F_1 = G + mv_2^2/l = mg + 2E_{k,2}/l = \dots = 10 \text{ N}$.

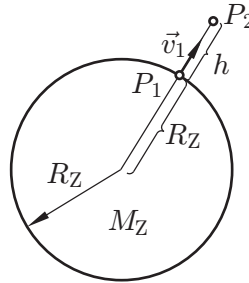


Obr. 2.68: Příklad KP 2.7-5.

{obr1.2-67}

{pr1.2-20} **KP 2.7-6** _____

Těleso je vrženo na povrchu ideální Země svisle vzhůru rychlostí $v = 7 \text{ km/s}$. Předpokládejte, že na ně působí jen gravitační síla Země a určete, do jaké výšky vystoupí.



Obr. 2.69: Příklad KP 2.7-6.

{obr1.2-68}

Řešení:

Označíme krajní body trajektorie P_1, P_2 (obr. 2.69). Platí: $E_m = \text{konst.}$, kde $E_m = mv^2/2 - \kappa m M_Z / r$, $\frac{1}{2}mv_1^2 - \kappa \frac{mM_Z}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \kappa \frac{mM_Z}{r_2}$, kde $v_1 = v$, $r_1 = R_Z$, $v_2 = 0$, $r_2 = R_Z + h$. Po dosazení a úpravě dostaneme $h = 4,09 \cdot 10^6 \text{ m}$.

2.7.2 Pohyb hmotného bodu v tíhovém a gravitačním poli

2.7.2.1 Pohyb hmotného bodu v homogenním tíhovém poli Země

Vyšetříme pohyb malého tělesa (hmotného bodu) v homogenním tíhovém poli Země, např. pohyb hozeného kamene nebo vystřeleného projektilu. Pohyb budeme zkoumat ve vztažné soustavě dané povrchem Země, tj. v laboratorní vztažné soustavě.

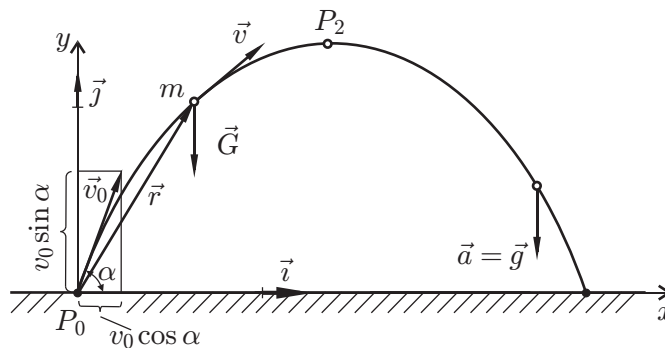
Při tomto pohybu působí na těleso tíhová síla $\vec{G} = m\vec{g}$, síla odporu vzduchu \vec{F}_{odp} a navíc působí⁴ Coriolisova síla $\vec{F}_C^* = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$, kde \vec{v} je rychlost tělesa v laboratorní soustavě, a síla odstředivá $\vec{F}_o^* = -m\omega^2 r \vec{n}$ (viz rovnice 2.51). Zde se však omezíme na vyšetřování idealizovaného pohybu, při němž lze síly \vec{F}_{odp} , \vec{F}_o^* i \vec{F}_C^* zanedbat a při němž se těleso, jež lze považovat za hmotný bod, pohybuje v relativně malé oblasti, v níž je tíhové pole homogenní. Takový pohyb nazveme ideální šikmý vrh.

Formulace úlohy: Na vodorovném povrchu Země je v bodě P_0 vymrštěn v čase $t = 0$ hmotný bod šikmo vzhůru rychlostí \vec{v}_0 , která svírá s vodorovnou rovinou úhel α . Předpokládejme, že na

⁴Vzhledem k tomu, že laboratorní vztažná soustava rotuje v geocentrické inerciální soustavě společně se Zemí úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ (viz obr. 2.63 a rovnice 2.51) a že je tedy neinerciální.



hmotný bod působí po vyvrstění jen tíhová síla $\vec{G} = m\vec{g}$, kde \vec{g} je v celé oblasti pohybu stejné.



{obr1.2-69}

Obr. 2.70: Pohyb hmotného bodu m v idealizovaném tíhovém poli Země.

Úkol: Určete rychlost $\vec{v}(t)$ a polohový vektor $\vec{r}(t)$ hmotného bodu jako funkce času.

Řešení:

Zavedeme soustavu souřadnic $Oxyz$ podle obr. 2.70 tak, že rovina Oxy je svislá a že v ní leží vektor \vec{v}_0 . Při pohybu hmotného bodu je polohový vektor \vec{r} a rychlost \vec{v} funkcí času. Zrychlení hmotného bodu $\vec{a} = \vec{g}$ je stálé. Je to pohyb se stálým zrychlením. Platí (rovnice 2.1, 2.4 a 2.7)

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k},$$

$$\vec{a}(t) = -g\vec{j} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k}.$$

Odtud plyne, že k řešení úlohy stačí určit funkce $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ a funkce $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ udávající souřadnice rychlosti $\vec{v}(t)$ a polohového vektoru $\vec{r}(t)$. Tyto funkce musí splňovat podmínky I. a II.:

I.:

$$(a_x(t) =) \frac{dv_x(t)}{dt} = 0, \frac{dx(t)}{dt} = v_x(t);$$

$$(a_y(t) =) \frac{dv_y(t)}{dt} = -g, \frac{dy(t)}{dt} = v_y(t);$$

$$(a_z(t) =) \frac{dv_z(t)}{dt} = 0, \frac{dz(t)}{dt} = v_z(t);$$

II.: počáteční podmínky: pro $t = 0$ musí být $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$, $v_y(0) = v_0 \sin \alpha$, $v_z(0) = 0$.

To je ryze matematická úloha. Řeší se postupnou integrací daných funkcí, tj. určováním jejich primitivních funkcí, analogicky jako v odst. 2.2.3. Tedy

1. Souřadnice v ose Ox : $a_x, v_x(t), x(t)$:

a) $v_x(t) = ?$ Je dáno $a_x = 0, v_x(0) = v_0 \cos \alpha$

Řešení:

$$\left\{ a_x = \frac{dv_x(t)}{dt}, a_x = 0 \right\} \rightarrow v_x(t) = C_1, \text{ kde } C_1 \text{ je libovolná konstanta o jednotce m/s.}$$

$$\text{Určení konstanty } C_1: \{v_x(t) = C_1, v_x(0) = v_0 \cos \alpha\} \rightarrow C_1 = v_0 \cos \alpha.$$

$$\text{Tedy } v_x(t) = v_0 \cos \alpha.$$

b) $x(t) = ?$ Je dáno $v_x(t) = v_0 \cos \alpha, x(0) = 0$.

Řešení:

$$\left\{ v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, v_x(t) = v_0 \cos \alpha \right\} \rightarrow x(t) = \int v_0 \cos \alpha dt = v_0 \cos \alpha \cdot t + C_2.$$

Určení C_2 : $\{x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t + C_2, x(0) = 0\} \rightarrow C_2 = 0$. Tedy $x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t$.

2. Souřadnice v ose Oy : $a_y, v_y(t), y(t)$. Postup zcela analogicky:

a) $v_y(t) = ?$ Je dáno $a_y = -g, v_y(0) = v_0 \sin \alpha$.

Řešení:

$$\left\{ a_y = \frac{dv_y(t)}{dt}, a_y = -g \right\} \rightarrow v_y(t) = \int -g dt = -gt + C_3. C_3 = ?:$$

$\{v_y(t) = -gt + C_3; v_y(0) = v_0 \sin \alpha\} \rightarrow C_3 = v_0 \sin \alpha$. Tedy: $v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$.

b) $y(t)$ - analogicky: $y(t) = \int v_y(t) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + C_4$. Dosadíme $t = 0$, dostaneme $C_4 = 0$. Celkem $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t$.

3. Souřadnice v ose Oz : $a_z, v_z(t), z(t)$. Analogickým postupem se dojde k výsledku $v_z(t) = 0, z(t) = 0$.

Výsledek:

Trajektorie leží v rovině Oxy . Pohyb je popsán vztahy



{1.2-108a}

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y(t) \vec{j}, \quad \text{kde } v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt \quad (2.111)$$

{1.2-108b}

$$\vec{r} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}, \quad \text{kde } x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.112)$$

ideální šikmý vrh

Vztahy (2.112) vyjadřují trajektorii v parametrickém tvaru (parametrem je čas t). Vyloučením parametru t dostaneme rovnici trajektorie ve tvaru

{1.2-109}

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (2.113)$$

Vztah (2.113) je rovnice paraboly. Trajektorie hmotného bodu při ideálním šikmém vrhu je tedy parabola.

Poznámky: Není-li odpor vzduchu zanedbatelný, trajektorie není parabola, nýbrž tzv. balistická křivka. Při střelbě na velké vzdálenosti se uplatňuje navíc vliv Coriolisovy setrvačné síly a případně i vliv nehomogenity gravitačního pole a náš původní předpoklad o ideálním tíhovém poli Země již splněn není.

{pr1.2-21}

KP 2.7-7 _____

Malé těleso (hmotný bod) bylo vrženo v čase $t = 0$ v bodě P_0 na vodorovném povrchu Země rychlostí \vec{v}_0 , která svírala s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 60^\circ$ a která měla velikost $v_0 = 30$ m/s. Považujte pohyb za ideální šikmý vrh a určete:

1. Polohu hmotného bodu v čase $t_1 = 1$ s;
2. \vec{v}_1 a její velikost v_1 v čase $t_1 = 2$ s;
3. Polohu nejvyššího bodu P_2 trajektorie;
4. Místo dopadu — bod P_3 (obr. 2.70).

Řešení:

1. $x(t_1), y(t_1) = ?$ Užijme rovnici (2.112): $x_1 = x(t_1) = v_0 \cos \alpha \cdot t_1 = 30 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 \text{ m} = 30 \text{ m}$.
 $y_1 = y(t_1) = v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \dots = 32 \text{ m}$.
2. $\vec{v}_1 = ?, v_1 = ?$ $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1) = v_x(t_1)\vec{i} + v_y(t_1)\vec{j}$. Zde $v_x(t_1) = v_0 \cos \alpha = \dots = 15 \text{ m/s}$, $v_y(t_1) = v_0 \sin \alpha - gt_1 = \dots = 6,0 \text{ m/s}$; $v_1 = \sqrt{v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1)} = 16,2 \text{ m/s}$;
3. $P_2 = ?$ V nejvyšším bodě P_2 je $v_y = 0$. Z této podmínky určíme příslušný čas t_2 a dosadíme do (2.112): $(v_y(t_2) =) v_0 \sin \alpha - gt_2 = 0 \rightarrow t_2 = (v_0 \sin \alpha)/g = \dots = 2,60 \text{ s}$. Souřadnice bodu P_2 : $x_2 = x(t_2) = v_0 \cos \alpha \cdot t_2 = 39,0 \text{ m}$, $y_2 = y(t_2) = v_0 \sin \alpha \cdot t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = \dots = 33,7 \text{ m}$;
4. $P_3 = ?$ V bodě P_3 je $y_3 = y(t_3) = 0$. Z této podmínky určíme t_3 a dosadíme do (2.112): $(y(t_3) =) v_0 \sin \alpha \cdot t_3 - \frac{1}{2}gt_3^2 = 0 \rightarrow t_3' = 0$ (start); t_3'' (dopad), $t_3'' = (v_0 \sin \alpha)/(\frac{1}{2}g) = \dots = 5,2 \text{ s}$; $x_3 = v_0 \cos \alpha \cdot t_3 = \dots = 78 \text{ m}$.

2.7.2.2 Podmínka úniku hmotného bodu z gravitačního pole



Uvažujme o hmotného bodu, který se pohybuje v obecném gravitačním poli buzeném objekty nacházejícími se v ohraničené oblasti prostoru pouze účinkem gravitačních sil. Může to být např. kosmická sonda, která se pohybuje s vyrazenými motory v oblasti sluneční soustavy, nebo těleso, které vniklo do sluneční soustavy ze vzdálených oblastí vesmíru. Předpokládejme, že v některém okamžiku t_1 známe polohu hmotného bodu a jeho rychlost v inerciální vztažné soustavě spojené s těžištěm soustavy těles, jež jsou zdrojem uvažovaného gravitačního pole.

Položme si otázku, zda a za jakých podmínek se hmotný bod bude pohybovat v ohraničené oblasti prostoru, (tj. kdy jeho pohyb bude finitní) a naopak, za jakých podmínek se bude trvale vzdalovat do libovolně velkých vzdáleností, tj. kdy unikne do nekonečna.

Odpověď lze najít úvahou o mechanické energii hmotného bodu. Působí-li na hmotný bod při pohybu jen gravitační síla ($E_p = E_g$), je jeho mechanická energie E_m stálá, tj. platí

$$\{1.2-110\} \quad (E_m =) \frac{1}{2}mv^2 + E_g = E_{m,1}. \quad (2.114)$$

Zde v je (obecně se měnící) velikost rychlosti hmotného bodu v uvažované vztažné soustavě, E_g jeho (obecně se měnící) gravitační energie a $E_{m,1}$ jeho mechanická energie v čase t_1 . Gravitační energie hmotného bodu je přitom definována tak, že v nekonečně vzdáleném bodě P_∞ má hmotný bod gravitační energii nulovou, tj. že platí $E_{g,\infty} = 0$. Celková mechanická energie hmotného bodu v bodě P_∞ je tedy

$$E_{m,\infty} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 + E_{g,\infty} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \geq 0,$$

kde v_∞ je rychlost hmotného bodu v nekonečnu. Má-li tedy hmotný bod, jehož energie E_m je dána vztahem (2.114), uniknout do nekonečna, musí platit $E_{m,1} \geq 0$. Platí-li $E_{m,1} < 0$, pak je pohyb hmotného bodu finitní. Shrňme výsledek úvah:

Má-li hmotný bod v některém bodě gravitačního pole takovou kinetickou energii E_k a takovou gravitační energii E_g , že platí

$$\{1.2-111\} \quad 1. E_k + E_g < 0, \quad \text{tj. } E_m < 0, \quad \text{podmínka finitního pohybu} \quad (2.115)$$

{ram-58}

neunikne do nekonečna, jeho pohyb je finitní.

{1.2-112}
$$2. E_k + E_g = 0, \quad \text{tj. } E_m = 0, \quad \text{mezní případ úniku} \quad (2.116)$$

{ram-59}

může uniknout (a lze dokázat, že unikne) do nekonečna, kde má limitní rychlost $v_\infty = 0$

{1.2-113}
$$3. E_k + E_g > 0, \quad \text{tj. } E_m > 0, \quad \text{podmínka úniku} \quad (2.117)$$

{ram-60}

může uniknout (a lze dokázat, že unikne) do nekonečna, kde má limitní rychlost $v_\infty > 0$.

Přitom se samozřejmě předpokládá, že hmotný bod se neseská s jiným tělesem (např. že nenarazí na Zemi).

Je-li uvažované gravitační pole buzeno kulově souměrným tělesem, tj. je-li centrální, je E_g v podmínkách (2.115) až (2.117) dáno vztahem (2.83), tj.

{1.2-114}
$$E_g = -\kappa \frac{mM}{r}, \quad (2.118)$$

kde m je hmotnost hmotného bodu, M hmotnost tělesa T budícího gravitační pole a r vzdálenost hmotného bodu od středu tělesa T .

{pr1.2-22} **KP 2.7-8** —————

Vyšetřete, zda je finitní pohyb tělesa (družice, kosmické sondy), které se pohybuje pouze účinkem gravitačního pole Země tak, že ve výšce $h = 3\,000$ km nad Zemí má rychlost, jež má velikost $v = 6,00$ km/s a jež je orientovaná směrem od Země.

Řešení:

Je nutno rozhodnout, který ze vztahů (2.115) až (2.117) platí, přičemž E_g je dáno vztahem (2.89). Tedy

$$E_m = m \left(\frac{1}{2} v^2 - \kappa \frac{M_Z}{R_Z + h} \right) = \dots = m \cdot (-1,80 \cdot 10^7 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}) < 0.$$

Za M_Z a R_Z jsme dosadili tabulkové hodnoty. Odsud a ze vztahu (2.115) plyne, že pohyb tělesa je finitní, těleso neunikne do nekonečna.

2.7.2.3 Pohyb hmotného bodu v centrálním gravitačním poli

centralniPole}

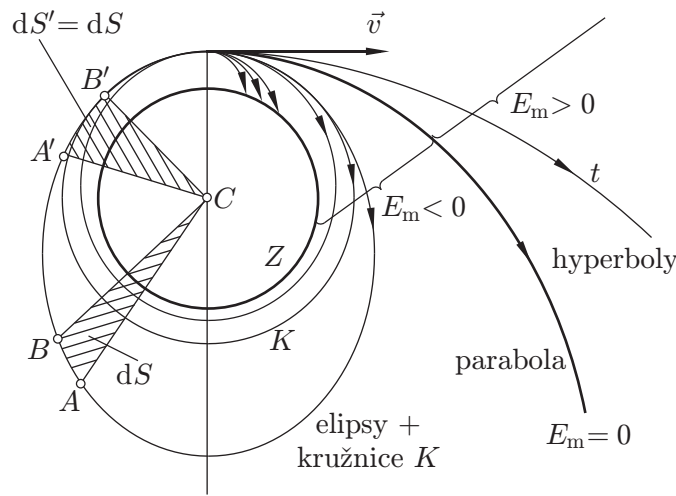
Tvar trajektorie a zákonitosti pohybu hmotného bodu v centrálním gravitačním poli s centrem C (např. družice v poli Země, planety v poli Slunce atd.) lze vyšetřit teoreticky na základě Newtonova gravitačního zákona a pohybové rovnice $\vec{F}_v = m\vec{a}$ s užitím diferenciálního a integrálního počtu. Zde uvedeme pouze výsledky. Budeme užívat vztažné soustavy, v níž je silové centrum C v klidu, a budeme o ní předpokládat, že je inerciální. V této soustavě platí:

I. Možné trajektorie hmotného bodu jsou kuželosečky — elipsy (a jejich zvláštní případy kružnice) hyperboly a paraboly (ve zvláštním případě to mohou být i přímky jdoucí centrem C). Jedno z jejich ohnisek (nebo střed kružnice) leží v centru. Označíme-li E_m celkovou mechanickou energii hmotného bodu v uvažovaném poli, pak trajektorie je

$$\begin{aligned} \text{elipsa nebo kružnice} &\longleftrightarrow E_m < 0, \\ \text{parabola} &\longleftrightarrow E_m = 0, \\ \text{hyperbola} &\longleftrightarrow E_m > 0. \end{aligned}$$

{ram-61}

Tvar trajektorie tedy závisí na počáteční poloze a počáteční rychlosti hmotného bodu. Na obr. 2.71 jsou znázorněny trajektorie družic vystřelovaných ve vodorovném směru ve velké výšce nad povrchem Země s postupně se zvětšujícími rychlostmi. Křivka t může být např. i hyperbolická trajektorie objektu přilétajícího k Zemi z vesmíru.



Obr. 2.71: Trajektorie družic vystřelovaných ve velké výšce nad povrchem Země s postupně se zvětšujícími rychlostmi.

{obr1.2-70}

II. Plochy dS obecných trojúhelníků ABC , $A'B'C$ opsaných průvodičem hmotného bodu ve stejných dobách dt na jedné trajektorii (libovolného typu) jsou stejné. Plošná rychlost dS/dt na jedné trajektorii je stálá.

III. Při pohybu hmotného bodu na dvou libovolných uzavřených trajektoriích v téže poli platí

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Zde T_1 je oběžná doba na jedné trajektorii (elipse nebo kružnici), a_1 je délka její hlavní poloosy nebo poloměr kružnice. Stejný význam mají T_2, a_2 na druhé trajektorii.

Zvláštním případem těchto zákonitostí jsou tři Keplerovy zákony, které vyslovil astronom J. Kepler pro pohyb planet kolem Slunce na základě astronomických pozorování. Vyslovte je samostatně!



2.7.2.4 Kosmické rychlosti

Kosmickými rychlostmi se obvykle nazývají tři rychlosti, které jsou význačné z hlediska pohybu tělesa (hmotného bodu) v gravitačním poli Země a Slunce.

1. První kosmická rychlost v_1 (tzv. kruhová rychlost) je velikost rychlosti, se kterou by se pohyboval hmotný bod vzhledem ke geocentrické vztahné soustavě po kružnici kolem Země v těsné její blízkosti, kdyby nebylo odporu vzduchu.

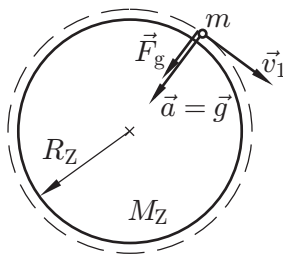
{pr1.2-23}

KP 2.7-9 —————

Určete první kosmickou rychlost.

Řešení:

Uvažujme o hmotném bodu, který se pohybuje v centrálním gravitačním poli ideální Země (M_Z, R_Z) v geocentrické vztahné soustavě (GCS) po kružnici o poloměru R_Z (obr. 2.72). GCS je přibližně inerciální, jestliže se v ní zanedbá gravitační síla Slunce (viz odst. 2.4),



Obr. 2.72: Příklad KP 2.7-9.

platí v ní tedy $\vec{F} = m\vec{a}$. Zde $\vec{F} = \vec{G}$, kde $\vec{G} = m\vec{g}$, přičemž \vec{g} je tíhové zrychlení na pólu ($g \doteq 9,80 \text{ m/s}^2$).

Zrychlení \vec{a} : $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{F}_g$, $a = v_1^2/R_Z$. Tedy $mv_1^2/R_Z = mg \rightarrow$

{1.2-115}

$$v_1 = \sqrt{gR_Z} \doteq 7,9 \text{ km/s.} \quad \text{první kosmická rychlost} \quad (2.119)$$

{ram-62}

Přibližně touto rychlostí se pohybovala první umělá družice Země — Sputnik.

2. Druhá kosmická rychlost v_2 (tzv. parabolická rychlost) je minimální velikost rychlosti, kterou by musel mít na povrchu Země hmotný bod, aby unikl do nekonečna, kdyby nebylo Slunce a planet a kdyby odpor vzduchu byl zanedbatelný (hmotný bod by se pohyboval do nekonečna po parabole nebo přímce).

{pr1.2-23a}

KP 2.7-10 —————

Určete druhou kosmickou rychlost v_2 .

Řešení:

Podle rovnic (2.12), (2.13) unikne hmotný bod pohybující se v gravitačním poli ideální Země do nekonečna tehdy, když pro jeho mechanickou energii bude platit $E_m \geq 0$, tj.

$$E_k + E_g \geq 0, \text{ tj. } \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM_Z}{r} \geq 0.$$

Odtud plyne (pro $v = v_2, r = R_Z$)

{1.2-116}

$$\frac{1}{2}v_2^2 - \kappa \frac{M_Z}{R_Z} = 0, \frac{1}{2}v_2^2 - gR_Z = 0, \quad (2.120)$$

kde g je tíhové zrychlení dané vztahem (2.88). Ze vztahu (2.120) plyne

{1.2-117}

$$v_2 = \sqrt{2gR_Z} \doteq 11,2 \text{ km/s.} \quad \text{druhá kosmická rychlost} \quad (2.121)$$

{ram-63}

3. Třetí kosmická rychlost v_3 (tzv. úniková rychlost) je minimální velikost rychlosti měřené v geocentrické soustavě, kterou by musel mít na povrchu Země hmotný bod, aby při zanedbatelném odporu vzduchu unikl ze sluneční soustavy do nekonečna. Její hodnota je $v_3 = 16,7 \text{ km/s}$.

Řešte příklady [KP 1.4-8](#) až [KP 1.4-18](#), [KP 1.4-10](#) až [KP 1.4-11](#), [KP 1.5-1](#), [KP 1.5-3](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.6-10](#) až [KP 2.6-13](#) a [KP 2.6-14](#) až [KP 2.6-20](#).

2.8 Mechanika hmotných soustav

Úvod k částem [2.9](#), [2.10](#):

Při zkoumání pohybu skupiny hmotných bodů nebo těles (tuto skupinu budeme nazývat „hmotná soustava“) je často obtížné (a někdy i nemožné) vyšetřovat detailně pohyb jednotlivých částí soustavy jako celku. Proto se zavádějí vhodné veličiny charakterizující soustavu jako celek — energie soustavy, celková hybnost soustavy, moment hybnosti soustavy a zkoumají se jejich změny v závislosti na silách, které na soustavu působí. Výsledky se vyslovují ve formě fyzikálních vět a zákonů. Zvláštním případem těchto zákonů jsou tzv. zákony zachování. V části [2.9](#) jsou odvozeny vztahy mezi změnami energie hmotné soustavy a vysloven zákon zachování energie. V části [2.10](#) jsou odvozeny vztahy mezi změnou hybnosti soustavy a momentem působících sil. Jsou to pohybové rovnice hmotné soustavy. Jejich zvláštním případem je zákon zachování hybnosti soustavy a zákon zachování momentu hybnosti soustavy.

2.9 Energie hmotných soustav

Hlavní poznatky obsažené v této části jsou: Hmotné soustavy (HS) mají při mechanickém pohybu mechanickou energii, která sestává z energie kinetické a potenciální, jejímž zvláštním případem je energie elastická. Změny těchto energií souvisejí zcela určitým způsobem s prací zcela určitých sil působících na soustavu. Zvláštním případem hmotné soustavy jsou izolované soustavy. Probíhají-li v nich pouze mechanické děje, platí zákon zachování mechanické energie. Probíhají-li v nich i jiné děje (např. chemické, elektromagnetické atd.), platí pro ně zákon zachování energie v obecné formě. Důležité veličiny definované pro hmotnou soustavu jsou hmotný střed (neboli těžiště) a moment setrvačnosti tělesa vzhledem k přímce.

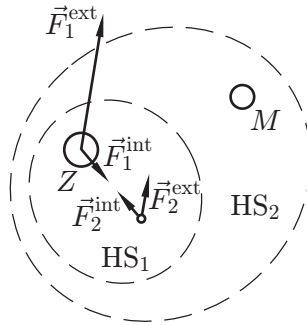
- Cíl:**
- I) Definovat a vysvětlit pojmy a veličiny: hmotná soustava, kinetická energie, potenciální energie, elastická energie a mechanická energie hmotné soustavy;
 - II) z paměti vztah [\(2.129\)](#) mezi ΔE_k a prací všech sil, vztah [\(2.137\)](#) mezi ΔE_p a prací konzervativních sil a vztah [\(2.145\)](#) mezi ΔE_m a prací nekonzervativních sil, vysvětlit je a naznačit postup jejich odvození;
 - III) z paměti definici hmotného středu a momentu setrvačnosti tělesa vzhledem k přímce, vysvětlit hlavní vlastnosti, význam a užití;
 - IV) z paměti a na příkladech vysvětlit zákon zachování mechanické energie a obecný zákon zachování energie;
 - V) vztahy pro určení kinetické energie rotujícího tělesa a obecně se pohybujícího se tělesa;
 - VI) z paměti vztahy a zákony uvedené v rámečcích a podtržené plnou čarou v tomto textu.
 - VII) řešit samostatně příklady uvedené v tomto textu a příklady typu [KP 1.4-9](#), [KP 1.4-22](#), [KP 1.4-23](#) a [KP 1.6-3](#), [KP 1.6-4](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.6-21](#) až [KP 2.6-27](#).

2.9.1 Hmotná soustava, hmotný střed

{1.2.7A}

2.9.1.1 Hmotná soustava

Hmotnou soustavou zde budeme rozumět skupinu objektů, které mají nenulovou klidovou hmotnost — tělesa (nebo jen jedno těleso), částice, molekuly atd. Tuto skupinu vyčleníme (myšlenkově) z ostatních těles, a to ve složení, jež se nám jeví účelné a uvažujeme o ní jako o jednom objektu. Jako příklad je na obr. 2.73 znázorněna hmotná soustava HS_1 sestávající ze Země a družice a hmotné soustavy HS_2 sestávající ze Země, družice a Měsíce. Jednotlivé části hmotných soustav budeme nazývat prvky nebo elementy hmotné soustavy.



Obr. 2.73: Vnější (horní index „ext“) a vnitřní (index „int“) síly působící na hmotné objekty soustavy HS_1 , která se skládá ze Země a družice. Dále je zde vyznačena hmotná soustava HS_2 , sestávající ze Země, družice a Měsíce.

{obr1.2-72}

Prvky hmotné soustavy se v obecném případě pohybují účinkem sil, jež dělíme do dvou skupin:

1. Síly vnitřní, neboli interní, jež označujeme \vec{F}^{int} , jsou síly, kterými na sebe navzájem působí prvky soustavy buď při vzájemném dotyku, nebo prostřednictvím svých polí. Např. v HS_1 jsou to gravitační síly, kterými na sebe navzájem působí Země a družice.
2. Síly vnější, neboli externí, jež označujeme \vec{F}^{ext} , jsou síly, kterými na prvky soustavy působí objekty, které do ní nepatří. Např. v HS_1 jsou to gravitační síly, kterými na Zemi a na družici působí Slunce, Měsíc a planety. Které síly jsou vnitřní v soustavě HS_2 ?

Důležité vlastnosti vnitřních sil: jejich (vektorový) součet je roven nule, tj platí

{1.2-118}

$$\vec{F}_1^{\text{int}} + \vec{F}_2^{\text{int}} + \dots + \vec{F}_N^{\text{int}} = \vec{0}. \quad \text{součet vnitřních sil} \quad (2.122)$$

{ram-64}

Tento vztah plyne z toho, že vnitřní síly splňují třetí Newtonův pohybový zákon – součet dvou sil, jež jsou ve vztahu akce a reakce, je roven nule (odstavec 2.4.3).

Izolovaná hmotná soustava je soustava, na niž nepůsobí vnější objekty, takže vnější síly nepůsobí, jsou nulové:

{1.2-119}

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}. \quad \text{izolovaná hmotná soustava} \quad (2.123)$$

{ram-65}

Izolované hmotné soustavy ve skutečnosti neexistují, neboť na každý objekt působí gravitační pole všech ostatních objektů vesmíru. Často však jsou vnější síly ve srovnání s vnitřními zanedbatelně malé. Někdy vnější síly malé nejsou, působí však tak, že hmotná soustava se chová jako izolovaná — uvidíme to na konkrétních příkladech. Pro pohyb izolovaných hmotných soustav

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

platí všechny zákonitosti, jimiž se řídí pohyb obecných soustav, tyto zákonitosti však nabývají jednoduššího tvaru. Některé veličiny charakterizují pohybový stav soustavy, např. energie soustavy, hybnost soustavy atd., se v izolovaných soustavách nemění. Tyto výsledky jsou vyslovovány jako „zákony zachování“.

2.9.1.2 Hmotný střed (těžiště)

Hmotný střed neboli těžiště hmotné soustavy je bod C , který je definován takto (obr. 2.74): Hmotnou soustavu rozdělíme na tak malé části (elementy), že je můžeme považovat za hmotné body a očíslovujeme je. Jejich hmotnosti nechť jsou m_1, m_2, \dots, m_n , celková hmotnost hmotné soustavy je $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Zavedeme (libovolně) soustavu souřadnic $Oxyz$ a polohové vektory hmotných bodů hmotné soustavy označíme $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Hmotný střed hmotné soustavy je podle definice ten bod C , jehož polohový vektor \vec{r}_C je dán vztahem

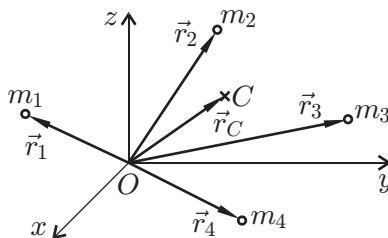
$$\{1.2-120\} \quad \vec{r}_C = \frac{1}{m}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n). \quad \text{definice hmotného středu} \quad (2.124)$$

{ram-66}

Odsud plyne

$$\{1.2-121\} \quad \begin{aligned} x_C &= \frac{1}{m}(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n), \\ y_C &= \frac{1}{m}(m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n), \\ z_C &= \frac{1}{m}(m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_nz_n). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Tyto vztahy plynou ze vztahu (2.124) tak, že v něm vyjádříme všechny vektory $\vec{r}_C, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ v semikartézském tvaru $\vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k}$, $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ atd. a porovnáme postupně členy obsahující $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



Obr. 2.74: Polohový vektor hmotného středu C (těžiště) hmotné soustavy je definován jako

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

{obr1.2-73}

Informace:

1. Hmotný střed C má tyto význačné vlastnosti (pro které se vlastně zavádí): jeho pohyb závisí jen na vnějších silách působících na hmotnou soustavu a s jeho užitím lze snadno vyjádřit: celkovou hybnost hmotné soustavy, otáčivý moment tíhových sil, případně potenciální energii hmotné soustavy v tíhovém poli Země atd.
2. Lze dokázat (zde to nebudeme dokazovat), že poloha bodu C nezávisí na volbě soustavy souřadnic $Oxyz$.
3. Polohový vektor \vec{r}_C pro těleso se spojitě rozloženou hmotností M je definován vztahem (2.126) analogickým vztahu (2.124). Získáme jej takto: O tělese budeme uvažovat

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

jako o souboru elementů o hmotnostech dm , pro každý element vytvoříme součin $\vec{r}dm$, kde \vec{r} je polohový vektor elementu a všechny takto vzniklé vektory sečteme a dělíme M . V limitě bude⁵:

{1.2-122}

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} dm. \quad (2.126)$$

Tohoto vztahu však nebudeme v dalším užívat.

4. Hmotný střed hmotné soustavy sestávající z několika těles o hmotnostech M_1, M_2, \dots, M_n lze určit takto:

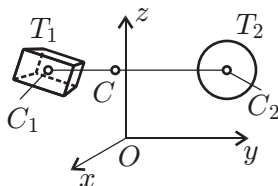
- Najdeme hmotné středy C_1, C_2, \dots, C_n všech těles;
- do bodů C_1, C_2, \dots, C_n vložíme hmotné body o hmotnostech M_1, M_2, \dots, M_n ;
- určíme hmotný střed C' této soustavy hmotných bodů. Tento bod je totožný s hmotným středem C soustavy těles.

Důkaz: Důkaz provedeme pro jednoduchost jen pro hmotnou soustavu sestávající ze dvou těles T_1, T_2 (obr. 2.75).

Těleso T_1 považujeme za soubor hmotných elementů (hmotných bodů), které očísujeme $1, 2, \dots, k$. Podobně těleso T_2 , jehož elementy očísujeme $(k+1), (k+2), \dots, n$. Zavedeme libovolnou soustavu souřadnic $Oxyz$ a podle rovnice (2.125) a určíme x_C : $x_C = \frac{1}{M_1+M_2}(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n) \rightarrow (M_1 + M_2)x_C = M_1 \cdot \frac{1}{M_1}(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k) + M_2 \frac{1}{M_2}(m_{k+1}x_{k+1} + m_{k+2}x_{k+2} + \dots + m_nx_n) = M_1x_{C_1} + M_2x_{C_2}$. Tedy

$$x_C = \frac{1}{M}(M_1x_{C_1} + M_2x_{C_2}) = x_{C'}, \quad \text{kde } M = M_1 + M_2.$$

Podobně se určí y_C, z_C .

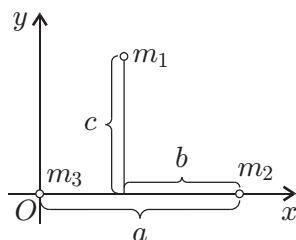


Obr. 2.75: K výpočtu hmotného středu C (těžiště) hmotné soustavy sestávající ze dvou těles T_1 a T_2 .

{obr1.2-74}

- Hmotný střed homogenních rotačně symetrických těles leží na jejich ose souměrnosti. Důkaz se provede tak, že se zvolí souřadnicová soustava $Oxyz$ tak, aby osa Oz splývala s osou souměrnosti tělesa. Těleso se rozdělí na dvojice stejně hmotných elementů souměrně položených vzhledem k ose Oz . Ze vztahů (2.125)a, b pak plyne $x_C = 0, y_C = 0$. Analogicky platí: Střed souměrnosti homogenních bodově souměrných těles je jejich hmotným středem.

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV



Obr. 2.76

{obr1.2-75}

{pr1h2-24}

KP 2.9-1

Určete hmotný střed soustavy sestávající se ze tří hmotných bodů o hmotnostech $m_1 = 2$ g, $m_2 = 0,8$ g, $m_3 = 1,2$ g, rozmístěných podle obr. 2.76, kde $a = 40$ cm, $b = 30$ cm, $c = 28$ cm.

Řešení:

K určení polohy bodu C můžeme zavést libovolnou soustavu souřadnic $Oxyz$. Souřadnice x_C, y_C, z_C vypočteme podle vztahů (2.125). V konkrétní situaci zavedeme $Oxyz$ tak, aby výpočet byl co nejjednodušší. V uvažovaném případě zavedeme soustavu Oxy např. podle obr. 2.76. Pak

$$x_C = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) =$$

$$= \frac{1}{(2+0,8+1,2) \cdot 10^{-3} \text{ kg}}(2 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,4 + 0) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m} = 0,13 \text{ m},$$

$$y_C = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}(m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3) = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}(2 \cdot 0,28 + 0 + 0) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m} = 0,14 \text{ m}.$$

Doplňující úkol: Určete bod C tak, že zavedeme jiný (opět vhodný) systém souřadnic.

2.9.2 Kinetická energie hmotné soustavy

Kinetická energie hmotné soustavy v určité vztažné soustavě S je definována na základě tohoto důležitého výsledku (který později dokážeme):

Nechť se hmotná soustava pohybuje (vzhledem k S) a necht' přitom na ni (obecně) působí vnitřní a vnější síly. Označíme $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vektorové funkce času udávající rychlosti hmotných bodů hmotné soustavy o hmotnostech m_1, m_2, \dots, m_n . Výslednici vnitřních sil působících na k -tý hmotný bod označíme $\vec{F}_{v,k}^{\text{int}}$, výslednici vnějších sil označíme $\vec{F}_{v,k}^{\text{ext}}$ (obr. 2.77). V některém okamžiku necht' je hmotná soustava v určitém pohybovém stavu 1, charakterizovaném polohami a rychlostmi jejích hmotných bodů (obr. 2.77). Účinkem vnitřních a vnějších sil se její pohybový stav mění, takže v některém pozdějším okamžiku je její pohybový stav 2. Příkladem může být např. startující běžec: V okamžiku startu je jeho pohybový stav 1, pak se běžec pohybuje účinkem vnějších sil (tíhová síla, síla od povrchu Země na jeho chodidla, síla odporu vzduchu) a vnitřních sil (vzájemná působení svalů a kostí). Po několika sekundách je v jistém pohybovém stavu 2.

Označíme $W_{v,1 \rightarrow 2}$ součet prací, které vykonaly při přechodu $1 \rightarrow 2$ všechny síly, tj. vnější i vnitřní, působící na hmotnou soustavu v uvažované inerciální vztažné soustavě S . Pak platí

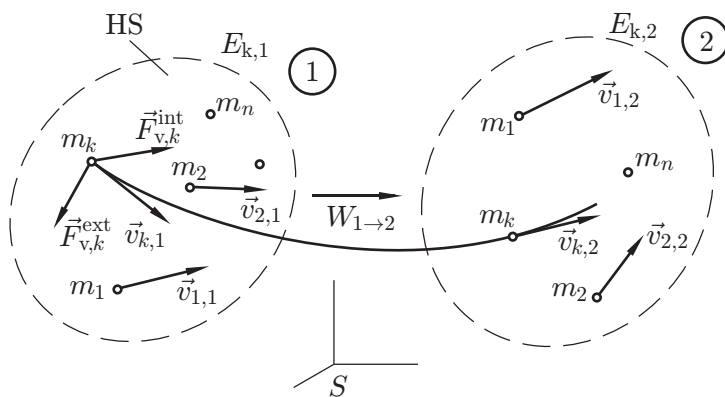
$$W_{v,1 \rightarrow 2} = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_nv_n^2 \right)_2 - \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_nv_n^2 \right)_1, \quad (2.127)$$

{1.2-123}

kde symboly $()_1, ()_2$ označují hodnoty uvedených výrazů ve stavu 1 a 2.

⁵Viz též přechod od vztahu 1.21 ke vztahu 1.22.

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV



Obr. 2.77: K výpočtu změny kinetické energie hmotné soustavy.

Na základě tohoto výsledku definujeme kinetickou energii E_k hmotné soustavy v libovolné (inerciální i neinerciální) vztažné soustavě vztahem

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_nv_n^2, \quad \text{definice kinetické energie hmotné soustavy} \quad (2.128)$$

tj. jako součet kinetických energií jejích hmotných bodů. Pak lze vztah (2.127), platný v inerciální vztažné soustavě, psát ve tvaru

$$E_{k,2} - E_{k,1} = W_{v,1 \rightarrow 2}. \quad \text{základní vztah mezi kinetickou energií a prací všech sil} \quad (2.129)$$

Důkaz: Důkaz vztahu (2.127): Uvažujme o pohybu k -tého hmotného bodu hmotné soustavy v inerciální vztažné soustavě S (obr. 2.76). Jeho pohybová rovnice (druhý Newtonův pohybový zákon – rovnice 2.36) zní

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_{v,k}^{\text{ext}} + \vec{F}_{v,k}^{\text{int}}.$$

Při pohybu hmotné soustavy ze stavu 1 do stavu 2 vykonají síly $\vec{F}_{v,k}^{\text{ext}}$ a $\vec{F}_{v,k}^{\text{int}}$, které na něj působí na trajektorii t_k , celkovou práci $W_{k,1 \rightarrow 2}$, pro kterou plyne ze vztahu (2.68)

$$W_{k,1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}m_k v_{k,2}^2 - \frac{1}{2}m_k v_{k,1}^2. \quad (2.130)$$

Napišeme-li tyto rovnice pro $k = 1, 2, \dots, n$, a tyto rovnice sečteme, dostaneme vztah (2.127).

Informace:

1. $[E_k] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{joule}$;
2. E_k závisí jen na velikostech rychlostí $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, nezávisí na jejich směru. V různých vztažných soustavách je různá;
3. Změna $E_{k,2} - E_{k,1}$ závisí jen na součtu prací, všech vnějších a vnitřních sil. Nezávisí na tvaru trajektorií hmotných bodů ani na rychlostech během přechodu $1 \rightarrow 2$ v uvažované vztažné soustavě;

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

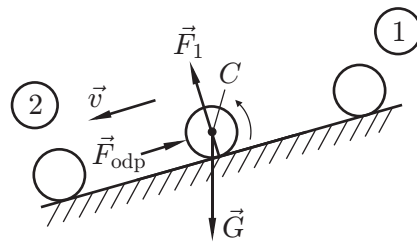
4. Vztah (2.129) je zcela analogický vztahu (2.70) platnému pro hmotný bod;
5. Při výpočtu kinetické energie hmotné soustavy se spojitě rozloženou hmotností (např. tělesa) na základě vztahu (2.128) je nutno nahradit součet konečného počtu členů integrálem

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V \rho(P) v^2 dV,$$

kde $\rho(P)dV$ je hmotnost malého elementu o objemu dV obsahujícího bod P . Tento vztah uvádíme pouze pro informaci, nebudeme jej používat.

6. Poznamenejme výslovně, že úvahy jsme provedli pouze pro nerelativistické rychlosti, při nichž hmotnosti hmotných bodů jsou stálé. S tímto omezením je definována např. (2.128) i kinetická energie E_k .

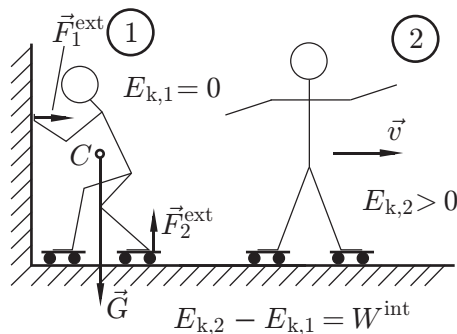
Příklady dějů, při nichž se mění kinetická energie soustavy účinkem vnějších nebo vnitřních sil.



$$E_{k,2} - E_{k,1} = W_G + W_1 + W_{\text{odp}} (= W_{\text{nekonz}})$$

Obr. 2.78: Tuhý váleček valící se po drsné nakloněné rovině.

{obr1.2-77}



Obr. 2.79: Šikovní experimentátor na kolečkových bruslích se uvádí do pohybu odtlačováním od zdi.

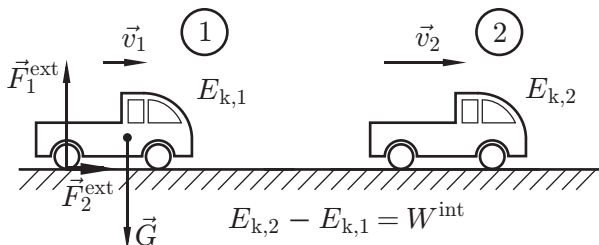
{obr1.2-78}

1. Na obr. 2.78 je znázorněn tuhý váleček, který se valí na drsné nakloněné rovině. Na váleček přitom působí jednak vnitřní síly (elementy válce působí na sebe navzájem), jednak vnější síly: \vec{G} - tíhová síla (je vnější, i když působí v celém objemu válce, neboť ji vyvolává vnější tíhové pole), \vec{F}_1 - síla, kterou působí na váleček nakloněná rovina, \vec{F}_o - síla odporu vzduchu. Tyto síly vykonají při přechodu $1 \rightarrow 2$ práce W_G, W_1, W_o . Platí: $E_{k,2} - E_{k,1} = W_G + W_1 + W_o$, neboť vnitřní síly v tuhém⁶ tělese nekonají práci.

⁶Tuhé těleso má neproměnné vzdálenosti jednotlivých svých elementů, tedy přítomné vnitřní síly (které jej udržují pohromadě) nemohou konat práci.

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

- Na obr. 2.79 je znázorněn šikovní experimentátor na kolečkových bruslích (bez tření), který se uvádí do pohybu odtlačováním ode zdi. Vnější síly jsou: \vec{F} - tíhová síla, \vec{F}_1^{ext} - stěna na jeho ruce, \vec{F}_2^{ext} - síla na jeho brusle (je svíslá). Práce každé z těchto sil je nulová. Člověk získává pohybovou energii jen prací vnitřních sil: $E_{k,2} - E_{k,1} = W^{\text{int}}$, kde W^{int} je práce vnitřních sil.
- Na obr. 2.80 je naznačena idealizovaná jízda automobilu se zanedbatelným valivým odporem i zanedbatelným odporem vzduchu. Vnější síly \vec{G} , \vec{F}_1^{ext} , \vec{F}_2^{ext} konají práci nulovou — automobil se v jistém smyslu „odtlačuje“ od silnice tak, jak v obr. 2.79 člověk ode zdi, a to silou \vec{F}_2^{ext} . Změna jeho vnitřní energie je rovna práci jeho vnitřních sil: $E_{k,2} - E_{k,1} = W^{\text{int}}$.



Obr. 2.80: Idealizovaná jízda automobilu (se zanedbatelným valivým odporem a zanedbatelným odporem vzduchu), který se pohybuje silou \vec{F}_2^{ext} .

{obr1.2-79}

2.9.3 Potenciální energie hmotné soustavy

Potenciální energie hmotné soustavy je veličina, která charakterizuje, podobně jako kinetická energie, určitým způsobem stav hmotné soustavy. Kinetická energie hmotné soustavy závisí na rychlostech jejích elementů — viz rovnice (2.128) a její změna závisí na práci všech (tj. výslednici) sil působících na hmotnou soustavu — viz rovnice (2.129). Potenciální (neboli polohová, konfigurační) energie hmotné soustavy však závisí jen na polohách elementů hmotné soustavy — viz např. rovnice (2.131) a její změnu lze vyjádřit pomocí práce konzervativních sil působících na soustavu — viz rovnice (2.137).

2.9.3.1 Potenciální energie hmotné soustavy v poli vnějších konzervativních sil

{1.2.7C}

Pohybuje-li se hmotná soustava vzhledem k nějaké inerciální vztažné soustavě, působí na její elementy obecně síly vnější a vnitřní (obr. 2.76). Uvažujme konkrétně např. o dětském autíčku na péro, které jede po nakloněné rovině směrem vzhůru. Na autíčko, jež považujeme za hmotnou soustavu, působí síly vnější (síla tíhová, síla od podložky, síla, kterou působí vzduch) a vnitřní (jednotlivé elementy autíčka včetně pružiny na sebe navzájem). Pohyb autíčka zkoumáme v laboratorní soustavě, v níž je tíhové pole homogenní a časově neměnné. Síly tíhové jsou konzervativní. Přejde-li hmotná soustava (tj. autíčko) ze stavu 1 (obr. 2.81) do stavu 2, vykonají tíhové síly práci (viz rovnice (2.67))

$$\{1.2-127\} \quad W_{G,1 \rightarrow 2} = (gm_1h_1 + gm_2h_2 + \dots + gm_nh_n)_1 - (gm_1h_1 + gm_2h_2 + \dots + gm_nh_n)_2, \quad (2.131)$$

kde h_1, h_2, \dots, h_n jsou výšky hmotných elementů o hmotnostech m_1, m_2, \dots, m_n nad povrchem Země. Na základě tohoto výsledku definujeme potenciální energii hmotné soustavy v tíhovém poli, krátce tíhovou energii hmotné soustavy, vztahem

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

{1.2-128}
$$E_G = gm_1h_1 + gm_2h_2 + \dots + gm_nh_n. \quad \text{definice tíhové energie hmotné soustavy} \quad (2.132)$$

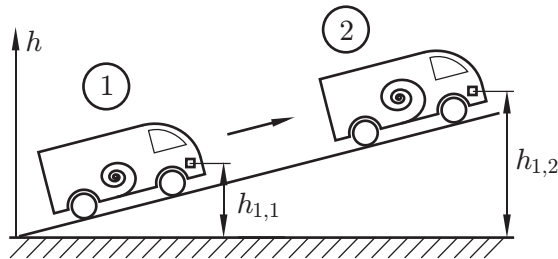
{ram-69}

Vztah (2.131) lze psát ve tvaru

{1.2-129}
$$W_{G,1 \rightarrow 2} = E_{G,1} - E_{G,2}. \quad \text{vyjádření práce tíhové síly pomocí tíhové energie} \quad (2.133)$$

{ram-70}

Jestliže autíčko po nakloněné rovině stoupá, působí tíhové síly proti směru pohybu a konají zápornou práci, $W_{G,1 \rightarrow 2} < 0$. Tedy $E_{G,1} < E_{G,2}$, tj. E_G roste.



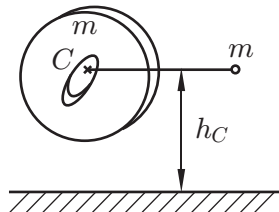
{obr1.2-80}

Obr. 2.81: Práce tíhových sil při přechodu autíčka ze stavu 1 do stavu 2.

Vyjádření potenciální energie obecné hmotné soustavy v homogenním tíhovém poli pomocí těžiště. Definiční vztah (2.132) pro E_G lze s užitím vztahu (2.125) upravit takto:

{1.2-130}
$$E_G = g(m_1h_1 + m_2h_2 \dots + m_nh_n) = gmh_C, \quad (2.134)$$

kde $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ je celková hmotnost uvažované soustavy. Fyzikální obsah vztahu (2.134): Potenciální energie hmotné soustavy o hmotnosti m v tíhovém poli je rovna tíhové energii hmotného bodu o hmotnosti m umístěného ve výšce těžiště C (obr. 2.82).



{obr1.2-81}

Obr. 2.82: Potenciální energie hmotné soustavy o hmotnosti m v tíhovém poli je rovna potenciální energii hmotného bodu o hmotnosti m umístěného ve výšce těžiště C .

Informace:

1. V jiném poli než homogenním, např. v obecném gravitačním poli, potenciální energie pomocí polohy těžiště vyjádřit nelze.
2. Vztahy (2.131) až (2.134) platí nezávisle na tom, zda na hmotnou soustavu současně působí či nepůsobí i jiné síly.

Zcela analogicky jako tíhová energie se definuje potenciální energie hmotné soustavy v libovolném jiném vnějším konzervativním silovém poli, např. potenciální energie hmotné

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

soustavy v obecném gravitačním poli, nebo potenciální energie soustavy elektricky nabitých částic v elektrostatickém poli. Např. potenciální energie hmotné soustavy ve (vnějším) gravitačním poli (krátce: gravitační energie) je definována vztahem

{1.2-131}

{ram-71}

$$E_g = E_{g,1} + E_{g,2} + \dots + E_{g,n}, \quad \text{definice potenciální energie hmotné soustavy v grav. poli} \quad (2.135)$$

kde $E_{g,1}$ je potenciální gravitační energie prvního elementu hmotné soustavy atd. Pro změnu gravitační energie platí, analogicky vztahu (2.133), vztah

{1.2-132}

$$W_{g,1 \rightarrow 2} = E_{g,1} - E_{g,2}, \quad (2.136)$$

kde $W_{g,1 \rightarrow 2}$ je práce, kterou vykonají síly vnějšího gravitačního pole působícího na soustavu při jejím přechodu ze stavu 1 do stavu 2.

2.9.3.2 Potenciální energie hmotné soustavy v poli vnitřních sil

Podobně jako vnější síly mohou i vnitřní síly v hmotné soustavě být konzervativní (např. síly gravitační v soustavě Země - Měsíc, nebo síly elastické neboli pružné, nebo síly elektrostatické), tak nekonzervativní (např. síly vnitřního tření v látkách). Vnitřní konzervativní síly mají tuto důležitou vlastnost: Jestliže v hmotné soustavě proběhl nějaký děj a jestliže přitom vzájemné polohy jejích elementů byly na konci děje stejné jako na jejich začátku (říkáme, že konfigurace soustavy se nezměnila), pak konzervativní síly vykonaly během děje nulovou práci.

Z této vlastnosti konzervativních sil plyne, podobně jako dříve, že má hmotná soustava v poli vnitřních sil potenciální energii, krátce vnitřní potenciální energii E_p^{int} , pro kterou platí: Přejde-li hmotná soustava při nějakém ději ze stavu 1 do stavu 2, vykonají vnitřní konzervativní síly práci $W_{1 \rightarrow 2}^{\text{int}}$, pro kterou platí

$$W_{1 \rightarrow 2}^{\text{int}} = E_{p,1}^{\text{int}} - E_{p,2}^{\text{int}}.$$

2.9.3.3 Celková potenciální energie hmotné soustavy

Celková potenciální energie hmotné soustavy $E_{p,1}$ je rovna podle definice součtu všech jejích potenciálních energií v poli vnějších i vnitřních konzervativních sil. Např. potenciální energie E_p autíčka na obr. 2.81 je součet jeho tíhové energie E_G a jeho vnitřní potenciální energie pružnosti, E_{elast} (tj. elastické energie jeho pružiny). Přejde-li hmotná soustava při nějakém ději ze stavu 1 do stavu 2, vykonají vnější i vnitřní konzervativní síly práci $W_{k,1 \rightarrow 2}$ danou vztahem

{1.2-133}

{ram-72}

$$W_{k,1 \rightarrow 2} = E_{p,1} - E_{p,2} = -\Delta E_p. \quad \text{změna potenciální energie soustavy} \quad (2.137)$$

Např. při pohybu autíčka podle obr. 2.81 konají (vnější) tíhové síly zápornou práci (a tíhová energie roste), pružné (vnitřní) síly konají práci kladnou (a elastická energie klesá). Součet obou prací může být kladný, záporný nebo nulový.

Informace: Při úvahách o potenciální energii hmotné soustavy v poli vnějších sil lze postupovat takto: K tělesům uvažované hmotné soustavy přiřčujeme navíc těleso, které je zdrojem vnějšího silového pole. Tím dostaneme novou (širší) hmotnou soustavu HS' , v níž se staly síly, které v hmotné soustavě byly síly vnější, silami vnitřními. Např.: Při pohybu družice D v gravitačním

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

poli Země buď považujeme družici za hmotnou soustavu, která se pohybuje ve vnějším gravitačním poli Země, nebo považujeme družici a Zemi za jedinou soustavu HS' . V této nové soustavě $HS' \equiv (D + Z)$ jsou gravitační síly, kterými na sebe navzájem působí družice a Země, silami vnitřními. Potenciální energie této nové soustavy je pak její potenciální energií v poli vnitřních sil, která závisí jen na vzájemných polohách těles soustavy, tj. na její konfiguraci.

{pr1p2-25}

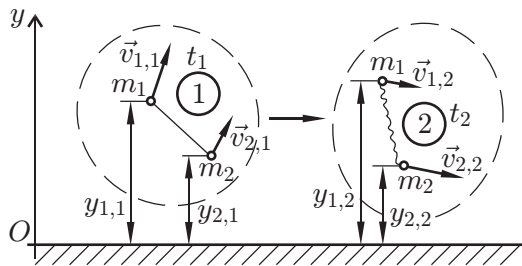
KP 2.9-2

Dvě malá tělesa (hmotné body) o hmotnostech m_1, m_2 , spojená pružným vláknem o zanedbatelné hmotnosti, byla vyhozena vzhůru na vodorovném povrchu Země (obr. 2.83). V čase t' měla tělesa souřadnice y'_j a rychlosti v'_j ($j = 1, 2$), (stav 1), v čase $t'' (> t')$ byly souřadnice y''_j a rychlosti v''_j (stav 2). Předpokládejte, že veličiny $m_1, m_2, y'_1, y'_2, v'_1, v'_2, y''_1, y''_2, v''_1, v''_2, g$ jsou dány. Uvažujte o této dvojici hmotných bodů jako o soustavě (hmotné soustavě) a řešte úkoly:

1. Vyjmenujte všechny síly, které působily na hmotnou soustavu během pohybu $1 \rightarrow 2$;
2. Určete součet prací všech sil, které působily na hmotnou soustavu;
3. Určete práci, kterou vykonaly tíhové síly;
4. Určete součet prací, které vykonaly ostatní síly (tj. síly od vlákna a síly odporu vzduchu).

Řešení:

1. Působily tíhové síly \vec{G}_1, \vec{G}_2 , síly od vlákna a síly odporu vzduchu;
2. $W_{1 \rightarrow 2} = \Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1} = \frac{1}{2}m_1 v_1''^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2''^2 - (\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2)$;
3. $W_{G,1 \rightarrow 2} = W_{\text{konz},1 \rightarrow 2} = -\Delta E_p = E_{G,1} - E_{G,2} = g(m_1 y_1' + m_2 y_2') - g(m_1 y_1'' + m_2 y_2'')$;
4. $W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} - W_{\text{konz},1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} - W_{G,1 \rightarrow 2}$.



Obr. 2.83: Dvě malá tělesa (hmotné body) a o hmotnostech m_1 a m_2 spojená pružným vláknem o zanedbatelné hmotnosti vyhozena vzhůru nad vodorovným povrchem Země.

{obr1.2-82}

2.9.4 Elastická energie hmotné soustavy

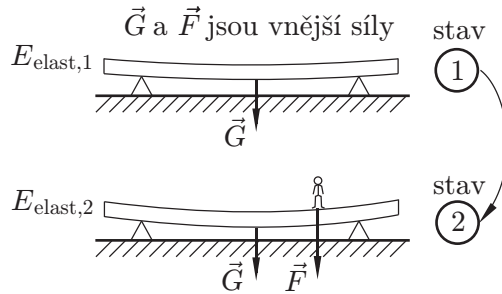
2.9.4.1 Elastická energie pružného tělesa

V této části pojednáme stručně o energetických poměrech při deformování (změně tvaru) pružných těles působením jiných těles nebo silových polí. Deformace těles je z hlediska fyzikálního složitý děj, jehož průběh závisí na molekulární struktuře těles, na časovém průběhu působících sil a na mnoha dalších faktorech. Zvláštní skupinu těles tvoří tělesa pružná, tj. taková tělesa, která se po odstranění vnějších příčin deformace sama vrací do stavu velmi blízkého stavu původnímu.

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

Idealizované těleso, které se vrátí přesně do původního stavu, se nazývá dokonale pružné těleso. Skutečně tělesa se dokonale pružnému tělesu při malých deformacích svými vlastnostmi většinou velmi blíží.

Deformujeme-li dokonale pružné těleso, které bylo zpočátku v klidu a které bylo již jistým způsobem deformováno (stav 1) a převedeme je do (obecně jiného) stavu 2, v němž je opět v klidu a v němž je deformováno (obecně) jinak, vykonají vnější síly na ně působící (mezi tyto síly patří i síla tíhová) jistou práci $W_{1 \rightarrow 2}$ (obr. 2.84). Tato práce nezávisí u dokonale pružného tělesa na způsobu, jakým těleso přešlo ze stavu 1 do stavu 2, nýbrž jen na počátečním a konečném stavu. Tento výsledek plyne z definice dokonale pružného tělesa a jeho přibližná platnost pro reálná tělesa je ověřena experimentálně.



Obr. 2.84: Elastická energie pružného tělesa při přechodu ze stavu 1 do stavu 2.

Na základě uvedeného výsledku definujeme potenciální energii pružnosti, neboli elastickou energii tělesa, E_{elast} , takto

- V nedeformovaném stavu, který označíme indexem 0, je $E_{\text{elast},0} = 0$.
- V deformovaném stavu (stav 1) je $E_{\text{elast},1} = W_{0 \rightarrow 1}^{\text{ext}}$, kde $W_{0 \rightarrow 1}^{\text{ext}}$ je práce, kterou vykonaly při deformaci vnější síly působící na těleso za předpokladu, že v počátečním i výsledném stavu bylo těleso v klidu.

{1.2-134}

(definice elastické energie tělesa) (2.138)

{ram-73}

Z této definice plyne pro elastické energie $E_{\text{elast},1}, E_{\text{elast},2}$ ve dvou stavech 1, 2 vztah

{1.2-135}

$$E_{\text{elast},2} - E_{\text{elast},1} = W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}}, \quad \text{práce vnějších sil při pružné deformaci} \quad (2.139)$$

{ram-74}

kde $W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}}$ je práce, kterou vykonají vnější síly působící na těleso při deformování tělesa ze stavu 1 do stavu 2.

Důkaz:

$$E_{\text{elast},2} = W_{0 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = W_{0 \rightarrow 1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = W_{0 \rightarrow 1}^{\text{ext}} + W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = E_{\text{elast},1} + W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} \rightarrow W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}} = E_{\text{elast},2} - E_{\text{elast},1}.$$

Práce sil, kterými působí pružné těleso na okolí při deformaci $1 \rightarrow 2$, je $W_{1 \rightarrow 2}^{\text{int}} = -W_{1 \rightarrow 2}^{\text{ext}}$. Tedy

{1.2-136}

$$W_{1 \rightarrow 2}^{\text{int}} = E_{\text{elast},1} - E_{\text{elast},2} = -\Delta E_{\text{elast}}. \quad (2.140)$$

V technických zařízeních pružná tělesa (např. pružiny) v některých fázích děje energii přijímají, v jiných fázích ji opět vydávají (vzduchové pistole, pružiny ventilů, tlumičů atd.).

Poznamenejme, že elastická energie je vnitřní energií soustavy. Někdy však (při obecných úvahách) se z vnitřní energie vyčleňuje a uvádí zvlášť.

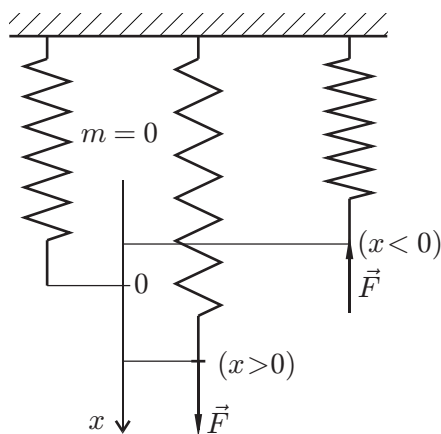
2.9.4.2 Elastická energie ideální pružiny

Ideální pružina je pružina, která má zanedbatelně malou hmotnost ($m = 0$), která je dokonale pružná a která splňuje Hookův zákon (protažení \sim působící síla, $\Delta l \sim F$, viz odst. 1.4, obr. 2.20). Pružné vlastnosti pružiny jsou charakterizovány veličinou k , která se nazývá tuhost pružiny a která je definována vztahem

$$\{1.2-137\} \quad k = \frac{F}{|x|}. \quad \text{definice tuhosti pružiny} \quad (2.141)$$

{ram-75}

Zde F je velikost síly působící deformaci a x je její prodloužení ($x > 0$) nebo zkrácení ($x < 0$), obr. 2.85; $[k] = \text{N/m}$.



Obr. 2.85: Síla \vec{F} způsobuje deformaci pružiny – její prodloužení ($x > 0$) nebo zkrácení ($x < 0$).

{obr1.2-84}

Z definičního vztahu $E_{\text{elast}} = W^{\text{ext}}$, viz definici (2.138) a ze vztahu (1.24) plyne

$$\{1.2-138\} \quad E_{\text{elast}} = \frac{1}{2} k x^2; \quad \text{elastická energie pružiny} \quad (2.142)$$

{ram-76}

{pr1.2-26} **KP 2.9-3** _____

Pružina ventilu je stlačena o 8 mm silou o velikosti 40 N. Určete její tuhost a její elastickou energii. Považujte pružinu za ideální.

Řešení:

$$1. \quad k = F/|x| = 40 \text{ N}/(8 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 5 \cdot 10^3 \text{ N/m};$$

$$2. \quad E_{\text{elast}} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} 5 \cdot 10^3 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^2 \text{ J} = 0,16 \text{ J}.$$

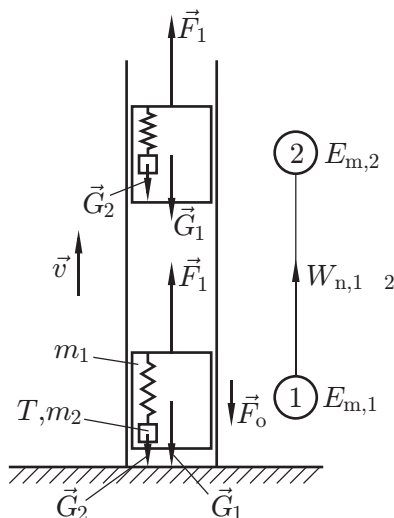
2.9.5 Mechanická energie hmotné soustavy

2.9.5.1 Mechanická energie hmotné soustavy

Mechanická energie E_m hmotné soustavy v určité vztažné soustavě je definována vztahem

$$E_m = E_k + E_p, \quad \text{definice mechanické energie hmotné soustavy} \quad (2.143)$$

kde E_k je její kinetická energie — rovnice (2.128) a E_p její potenciální energie — odst. 2.9.3.1. Např. mechanická energie hmotné soustavy tvořené stoupající kabinou výtahu o hmotnosti m_1 , v níž na pružině kmitá těleso T o hmotnosti m_2 , je (v laboratorní soustavě) součet kinetických energií všech jejích prvků, tíhových energií všech jejích prvků a elastické energie pružiny (obr. 2.86).



Obr. 2.86: Mechanická energie hmotné soustavy.

Mechanická energie hmotné soustavy je veličina velmi důležitá v technické praxi. Její změny při různých dějích souvisejí s prací sil, které na hmotnou soustavu působí, a to podle vztahu (2.145) případně podle vztahu (2.147), který je zvláštním případem předešlého vztahu. V dalším oba vztahy odvodíme a vysvětlíme.

Uvažujme konkrétně o hmotné soustavě znázorněné na obr. 2.86, tj. o soustavě „kabina + pružina + těleso T “. Budeme předpokládat, že vliv vzduchu v kabině na průběh děje je zanedbatelně malý. V určitém čase je hmotná soustava ve stavu 1, později je ve stavu 2. Při přechodu hmotné soustavy ze stavu 1 do stavu 2 vykonají všechny síly působící na soustavu (vnější i vnitřní) celkovou práci $W_{v,1 \rightarrow 2}$, pro kterou podle vztahu (2.129) platí

$$E_{k,2} - E_{k,1} = W_{v,1 \rightarrow 2}, \quad (2.144)$$

kde E_k je kinetická energie hmotné soustavy. Vyjádříme $W_{v,1 \rightarrow 2}$ takto: Síly působící na hmotnou soustavu rozdělíme na dvě skupiny:

1. konzervativní (to jsou síly tíhové a elastické) a
2. všechny jiné (síla od lana, síly odporu vedení a vzduchu).

Při ději $1 \rightarrow 2$ vykonají konzervativní síly práci $W_{\text{konz},1 \rightarrow 2} = E_{p,1} - E_{p,2}$, viz rovnice (2.137). Součet prací všech jiných sil označíme $W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2}$. Vztah (2.144) pak lze upravit takto

$$E_{k,2} - E_{k,1} = W_{v,1 \rightarrow 2} = W_{\text{konz},1 \rightarrow 2} + W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2} = E_{p,1} - E_{p,2} + W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2}.$$

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

Odtud plyne úpravou

$$(E_{k,2} + E_{p,2}) - (E_{k,1} + E_{p,1}) = W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2},$$

tj.

$$\{1.2-141\} \quad E_{m,2} - E_{m,1} = W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2}. \quad \text{nejdůležitější vztah pro } E_m \quad (2.145)$$

{ram-78}

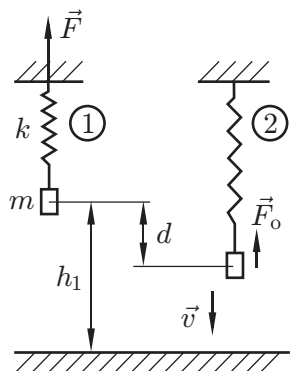
Připomeňme: E_m je mechanická energie hmotné soustavy. V případě hmotné soustavy na obr. 2.85 je $E_m = E_k + E_G + E_{\text{elast}}$. Veličina $W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2}$ je práce jiných sil než konzervativních. V případě hmotné soustavy na obr. 2.86 je to součet prací síly \vec{F}_1 , kterou působí lano na kabinu a (záporná) práce, kterou vykonají síly odporu. V technické praxi je W_{nekonz} většinou práce sil, kterými působí na uvažovanou hmotnou soustavu ostatní tělesa, s nimiž je hmotná soustava ve styku. Rovnice (2.145) je nejdůležitějším vztahem v celé části 2.9. Poznamenejme, že ji lze napsat i ve tvaru

$$\{1.2-142\} \quad \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_m = W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2}. \quad (2.146)$$

{pr1.2-27} **KP 2.9.5-1** _____

Na ideální nezatíženou pružinu ($m = 0, F = k|x|$) zavěsíme těleso o hmotnosti m (obr. 2.87). Nejprve je přidržíme a poté pustíme s nulovou počáteční rychlostí, takže těleso začne kmitat. Původní stav soustavy označíme 1. Po určitém čase (po několika kmitech) se soustava dostane do stavu 2 naznačeného na obr. 2.87b, v němž měřením zjistíme, že těleso má rychlost v . Určete:

1. Mechanickou energii soustavy ve stavu 1 a 2;
2. Práci W_o , kterou vykonaly síly odporu vzduchu.



Obr. 2.87: Příklad KP 2.9.5-1.

{obr1.2-86}

Řešení:

1. a) $E_{m,1} = E_{k,1} + E_{G,1} + E_{\text{elast},1} = 0 + mgh + 0$,
 b) $E_{m,2} = \frac{1}{2}mv^2 + mg(h_1 - d) + \frac{1}{2}kd^2$;
2. $W_o = W_{\text{nekonz}} = E_{m,2} - E_{m,1} = \dots (\leq 0)$. Pozn.: Kromě síly odporu vzduchu působí na soustavu síla \vec{F} v místě uchycení. Její působíště je v klidu, její práce je tedy nulová. Proto platí $W_{\text{nekonz}} = W_o + W_F = W_o$.

2.9.5.2 Zákon zachování mechanické energie

Při mnoha dějích probíhajících v hmotné soustavě je veličina $W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2}$ v rovnici (2.145) velmi malá, téměř nulová. Zejména v izolovaných soustavách, v nichž je navíc zanedbatelně malé vnitřní tření, je $W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2} = 0$, takže vztah (2.145) nabude tvar

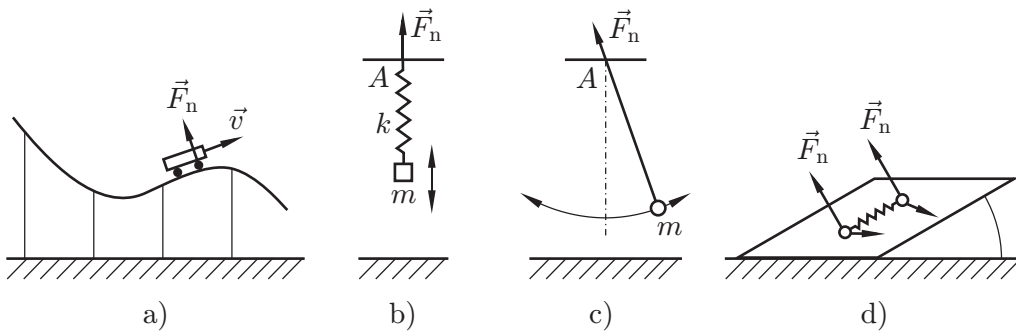
{1.2-143}
{ram-79}

$$\begin{aligned} E_m &= \text{konst.}, & \text{zákon zachování mechanické energie,} \\ E_k + E_p &= \text{konst.} & (\text{je-li } W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2} = 0) \end{aligned} \quad (2.147)$$

Každý z těchto vztahů vyjadřuje zákon zachování mechanické energie.

Diskuse: V odst. 2.9.1 jsme uvedli, že izolovaná soustava neexistuje. Kdy tedy platí zákon zachování, vyjádřený vztahy (2.147)? Platí vždy, když ve vztahu (2.145) platí $W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2} = 0$, tj. tehdy, když:

1. Nekonzervativní síly působící na hmotnou soustavu jsou tak malé, že jejich práce $W_{\text{nekonz},1 \rightarrow 2}$ je ve vztahu (2.145) téměř rovna nule. Příklady: hmotná soustava znázorněná na obr. 2.83 v případě, že síly odporu a vnitřního tření jsou zanedbatelné. Nebo: srážka dvou dokonale pružných míčů nebo pružná srážka dvou molekul plynu.
2. Nekonzervativní síly jsou zanedbatelně malé, konají však nulovou práci. Příklady:
 - a) Vozík na toboganu za předpokladu, že síly tření jsou zanedbatelně malé (obr. 2.88a). Síla \vec{F}_n (od kolejnic) je kolmá na směr pohybu, koná tedy nulovou práci. Platí rovnice (2.147);
 - b) hmotná soustava sestávající z ideální pružiny a tělesa, které na ní kmitá (obr. 2.88b). Na soustavu působí v bodě A pružiny síla $\vec{F}_n (\neq \vec{0})$, kterou vyvozuje závěs. Bod A je v klidu, síla \vec{F}_n koná nulovou práci, platí rovnice (2.147);
 - c) Zcela analogická je situace u matematického kyvadla na obr. 2.88c;
 - d) Dvě kuličky spojené ideální pružinou se pohybují po dokonale hladké nakloněné rovině (obr. 2.88d). Síly \vec{F}_n od podložky jsou kolmé na směr pohybu kuliček, jejich práce je nulová, platí rovnice (2.147).



Obr. 2.88: Příklady, kdy platí zákony zachování mechanické energie (nekonzervativní síla \vec{F}_n koná nulovou práci). Vozík na toboganu (a), těleso na ideální pružině (b), matematické kyvadlo (c) a hmotné body spojené pružinou pohybující se po dokonale hladké nakloněné rovině (d).

{pr1u2-28} **KP 2.9.5-2** —————

Na ideální nedeformovanou pružinu o tuhosti $k = 50 \text{ N/m}$ upevněnou v bodě A podle obr. 2.88b, zavěsíme těleso o hmotnosti $m = 0,4 \text{ kg}$ a pustíme je s nulovou počáteční rychlostí, takže začne volně kmitat. Odpor vzduchu je zanedbatelný; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Uvažujte o soustavě „pružina + těleso“ a vyřešte úkoly:

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

1. Rozhodněte a zdůvodněte, které z veličin $E_m, E_G, E_k, E_{\text{elast}}$ se mění a které nikoliv;
2. Určete největší protažení pružiny;
3. Rychlost tělesa v okamžiku, kdy je pružina protažena o 10 cm.

Řešení:

1. Vyjdeme ze vztahu (2.145), v němž W_{nekonz} je součet prací síly \vec{F}_n (obr. 2.88b) a nulové síly odporu vzduchu. Je tedy $W_{\text{nekonz}} = 0$, takže $E_m = \text{konst.}$ Veličiny $E_k, E_G, E_{\text{elast}}$ se mění.
2. Označíme h (proměnnou) výšku tělesa nad zemským povrchem. Stav, v němž je těleso v nejnižším bodě, označíme 2. Pak $\Delta l_{\text{max}} = h_1 - h_2$. Platí:

a) v nejvyšším bodě $E_{m,1} = E_{k,1} + E_{G,1} + E_{\text{elast},1} = 0 + mgh_1 + 0$

b) v nejnižším bodě $E_{m,2} = 0 = mgh_2 + \frac{1}{2}k(h_1 - h_2)^2$

$$E_{m,1} = E_{m,2} \rightarrow mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2}k(h_1 - h_2)^2 \rightarrow$$

1) $h_1 = h_2$ - triviální

2) $\Delta l_{\text{max}} = h_1 - h_2 = \frac{2mg}{k} = \dots = 0,16 \text{ m.}$

3. Označíme indexem 3 stav v němž je pružina protažena o $\Delta l = 10 \text{ cm.}$ Pak $E_{m,1} = E_{m3} \implies mgh_1 = mgh_3 + \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}k(h_1 - h_3)^2; h_1 - h_3 = \Delta l \implies v_3^2 = \Delta l(2g - \frac{k}{m}\Delta l) \implies v_3 = \dots = \sqrt{0,75} = 0,87 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

Pokyn: Řešte příklady [KP 2.6-21](#), [KP 1.4-9](#), [KP 1.4-22](#), [KP 1.4-23](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.6-22](#) až [KP 2.6-24](#).

2.9.6 Kinetická energie tuhých těles

{TuhychTeles}

Tuhým tělesem (nebo „dokonale tuhým“ tělesem) se nazývá takové těleso, v němž jsou vzájemné vzdálenosti jeho elementů stálé. Tuhé těleso je abstrakce, model reálných těles, jež se při působení sil vždy deformují, v nichž jsou molekuly v neustálém pohybu atd. Vyšetříme vlastnosti kinetické energie tuhých těles při rotačním a při obecném pohybu.

2.9.6.1 Kinetická energie rotujícího tělesa. Moment setrvačnosti

Dokážeme toto tvrzení: Kinetickou energii tuhého tělesa, rotujícího úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem osy p pevné v soustavě S (inerciální nebo neinerciální) (obr. 2.89), lze v této soustavě vyjádřit ve tvaru



{1.2-144}

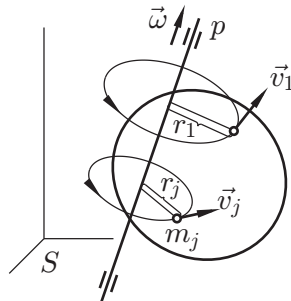
$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad \text{kinetická energie rotujícího tělesa} \quad (2.148)$$

{ram-80}

Zde I je veličina nazvaná „moment setrvačnosti tělesa vzhledem k přímce p “, definovaná takto: Rozdělíme těleso na tak malé elementy, že je můžeme považovat za hmotné body a očíslovujeme je. Hmotnost j -tého elementu označíme m_j , jeho vzdálenost od přímky p označíme r_j . Pak

$$\{1.2-145\} \quad I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{j=1}^n m_j r_j^2. \quad \text{definice momentu setrvačnosti} \quad (2.149)$$

{ram-81}



{obr1.2-88}

Obr. 2.89: K výpočtu kinetické energie rotujícího tělesa.

Důkaz: Do vztahu (2.128) pro E_k dosadíme $v_j^2 = \vec{v}_j \cdot \vec{v}_j = |\vec{\omega} \times \vec{r}_j|^2 = (r_j \omega)^2$ (obr. 2.89) a dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n (r_n \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2).$$

Zavedeme-li I definičním vztahem (2.149), dostaneme vztah (2.148).

Informace:

1. Vztahem (2.149) je definován i moment setrvačnosti libovolné soustavy hmotných bodů, nejen tělesa. Při konkrétním výpočtu I pro těleso se spojitě rozloženou hmotností na základě definice (2.149) je nutno nahradit součet konečného počtu členů integrálem

$$\{1.2-146\} \quad I = \int_V r^2(P) \rho(P) dV, \quad (2.150)$$

kde $\rho(P)$ je hustota tělesa v elementu o objemu dV v bodě P ve vzdálenosti r od přímky p . Jednotka $[I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

{pr1.2-29}

KP 2.9.5-3 —————

Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose Oy soustavy hmotných bodů naznačené v obr. 2.76.

Řešení:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = m_1 (a-b)^2 + m_2 a^2 + m_3 0^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 0,1^2 \text{ m}^2 + 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 0,4^2 \text{ m}^2 = 1,48 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

2. Moment setrvačnosti I vzhledem k libovolné přímce tělesa sestávajícího z několika částí o momentech setrvačnosti I_1, I_2, \dots, I_n (vzhledem k téže přímce) je dán vztahem

$$\{1.2-147\} \quad I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (2.151)$$

Důkaz: Součet na pravé straně definičního vztahu (2.149) rozdělíme na n součtů vztažených k jednotlivým tělesům a dostaneme přímo vztah (2.151).



3. Steinerova věta

Moment setrvačnosti I_p libovolného tělesa vzhledem k přímce p (obr. 2.90) a jeho moment setrvačnosti I_o vzhledem k přímce o jdoucí hmotným středem C rovnoběžně s p jsou vázány vztahem

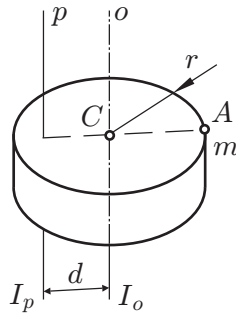
{1.2-148}

$$I_p = I_o + md^2, \quad \text{Steinerova věta} \quad (2.152)$$

{ram-82}

kde m je hmotnost tělesa a d je vzdálenost přímek p a o .

Užití: Výpočet I_p integrálem (2.150) je mnohdy obtížný, výpočet I_o je většinou snadnější, nadto je I_o pro řadu těles jednoduchých tvarů tabelováno. Např. pro kotouč na obr. 2.90 je $I_o = mr^2/2$. Vztah (2.152) lze dokázat s užitím definičního vztahu (2.149) a jednoduché geometrické úvahy.



{obr1.2-89}

Obr. 2.90: Příklad KP 2.9.5-3.

{pr1.2-30} **KP 2.9.5-4** _____

Kotouč na obr. 2.90 má parametry $m = 6$ kg, $r = 30$ cm. Určete:

1. I_o ;
2. I_p pro $d = 20$ cm.

Řešení:

1. $I_o = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}6 \text{ kg} \cdot 0,3^2 \text{ m}^2 = 0,27 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
2. $I_p = I_o + md^2 = (0,27 + 6 \cdot 0,2^2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0,51 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

{pr1.2-31} **KP 2.9.5-5** _____

Kotouč zadaný v KP 2.9.5-4 (předošlý příklad) se otáčí úhlovou rychlostí $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$ kolem

1. přímky o ,
2. přímky p .

Určete v obou případech jeho kinetickou energii.

Řešení:

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV

1. $E_k = \frac{1}{2}I_o\omega^2 = \frac{1}{2}0,27 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 4^2 \text{ s}^{-2} = 2,16 \text{ J}$;
2. $E'_k = \frac{1}{2}I_p\omega^2 = \frac{1}{2}0,51 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 4^2 \text{ s}^{-2} = 4,08 \text{ J}$.

2.9.6.2 Kinetická energie hmotné soustavy při obecném pohybu s užitím těžištové soustavy

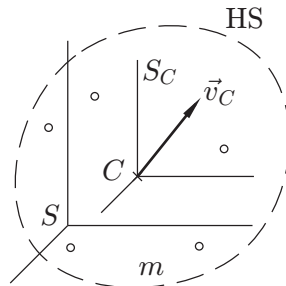
Kinetickou energii E_k libovolné hmotné soustavy v libovolné inerciální vztažné soustavě S (obr. 2.91) lze vyjádřit takto: Označíme m její hmotnost a \vec{v}_C rychlost jejího hmotného středu C . Zavedeme vztažnou soustavu S_C s počátkem v C , která koná v S translační pohyb. Nazveme ji „těžištvá soustava“. Označíme $E_{k,C}$ kinetickou energii hmotné soustavy v soustavě S_C . Pak platí

$$\{1.2-149\} \quad E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + E_{k,C} = E_{k,\text{trans}} + E_{k,C}. \quad (2.153)$$

Veličina

$$\{1.2-150\} \quad E_{k,\text{trans}} = \frac{1}{2}mv_C^2 \quad (2.154)$$

se nazývá energie translačního (postupného) pohybu hmotné soustavy ve vztažné soustavě S . Udává kinetickou energii, kterou by hmotná soustava měla, kdyby vykonávala ve vztažné soustavě S postupný pohyb rychlostí \vec{v}_C , kterou v ní má její těžiště. Naproti tomu veličina $E_{k,C}$ na volbě vztažné soustavy S nezávisí, udává tedy kinetickou energii vnitřního pohybu hmotné soustavy. Vztah (2.154) nebudeme dokazovat.



Obr. 2.91: Kinetická energie hmotné soustavy určovaná ve vztažné soustavě S je dána její celkovou hmotností m a rychlostí jejího hmotného středu \vec{v}_C (vzhledem k soustavě S).

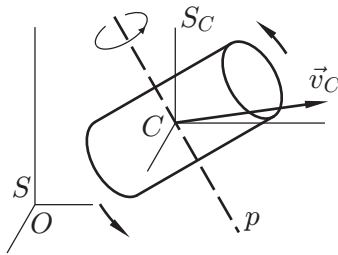
Vztah (2.154) samozřejmě platí i pro tuhé těleso. Jeho $E_{k,C}$ lze vyjádřit takto: Těžiště C je v S_C pevné, těleso tedy koná v S_C otáčivý pohyb kolem pevného bodu C . Lze dokázat (zde to nebudeme dokazovat), že rychlosti elementů tuhého tělesa v S_C jsou v každém okamžiku takové, jako kdyby se těleso právě otáčelo kolem jisté (s časem proměnné) přímky o jdoucí bodem C (obr. 2.92). Je tedy $E_{k,C}$ energií rotačního pohybu, tj. $E_{k,C} = E_{k,\text{rot}}$. Označíme-li moment setrvačnosti tělesa vzhledem k o symbolem I_o a symbolem ω jeho okamžitou úhlovou rychlost, pak kinetickou energii tuhého tělesa, která koná v S zcela obecný pohyb, lze vyjádřit ve tvaru

$$\{1.2-151\} \quad E_k = E_{k,\text{trans}} + E_{k,\text{rot}} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_o\omega^2. \quad \text{kinetická energie tuhého tělesa} \quad (2.155)$$

{ram-83}

Tedy: Kinetická energie tuhého tělesa konajícího obecný pohyb je rovna součtu kinetických energií translačního a rotačního pohybu.

2.9. ENERGIE HMOTNÝCH SOUSTAV



Obr. 2.92: Těleso se otáčí kolem pohybující se přímky p jdoucí těžištěm C .

Mechanická energie tuhého tělesa pohybujícího se v homogenním zemském tíhovém poli je dána vztahem

$$E_m = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_o\omega^2 + mgh_C,$$

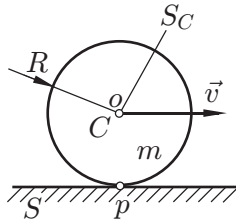
kde význam symbolů je zřejmý.

KP 2.9.5-6 _____

Po klidné vodorovné podložce se valí plný válec o poloměru R a o hmotnosti m rychlostí \vec{v} . Určete jeho kinetickou energii.

Řešení:

Není-li v zadání uvedeno výslovně, ve které vztažné soustavě se má energie určit, považujeme většinou za samozřejmé, že jde o laboratorní soustavu, tj. zde o soustavu spojenou s podložkou. Uvedeme dva způsoby výpočtu.



Obr. 2.93: Příklad KP 2.9.5-6.

1. Zavedeme opět soustavu S_C - viz obr. 2.93. V ní se válec otáčí kolem své osy souměrnosti o úhlovou rychlostí $\omega = v/R$ ve směru otáčení hodinových ručiček. Užijeme vztah (2.155) a dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_o\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2. \quad (2.156)$$

2. Valivý pohyb válce lze v každém okamžiku interpretovat jako jeho otáčení kolem osy dané přímkou dotyku p , a to úhlovou rychlostí $\omega' = v_C/R = v/R (= \omega)$. Kinetická energie válce je tedy

$$E_k = \frac{1}{2}I_p\omega^2,$$

kde I_p je moment setrvačnosti válce vzhledem k ose p . Ze Steinerovy věty (2.152) plyne

$$I_p = I_o + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Dosadíme-li do předešlého vztahu, dojdeme k výsledku

$$E_k = \frac{1}{2}I_p\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\omega^2 = \frac{3}{4}mv^2,$$

který je shodný s (2.156).

2.9.7 Zákon zachování energie

Při dosavadních úvahách o energii hmotných soustav jsme uvažovali jen o jejich mechanické energii. Hmotné soustavy však mají i jiné formy energie. Příklady: Atomy a molekuly ve všech látkách konají neuspořádaný (tepelný) pohyb a v různých vzájemných vzdálenostech na sebe působí přitažlivými nebo odpudivými silami. V důsledku toho mají látky tzv. vnitřní energii, kterou obvykle značíme U . Dále: V atomech a molekulách jsou v interakci atomová jádra s elektrony elektronového obalu. V důsledku tohoto vzájemného působení mají látky energii, která se mění např. při chemických reakcích (avšak i při jiných dějích — např. při ozařování), proto se nazývá energie chemické vazby, krátce energie chemická. Dále: Soustava částic tvořících atomové jádro — proton a neutrony — má energii, která se nazývá energie jaderná E_{jad} . Zmagnetovaný kus oceli má energii magnetickou, nabitý elektrický kondenzátor má energii elektrickou. Celková energie hmotné soustavy je definována jako součet všech jejích energií:

$$\{1.2-153\} \quad E = E_k + E_p + U + E_{\text{chem}} + \dots \quad (2.157)$$

Při dějích probíhajících v hmotných soustavách se (obecně) mění jak jednotlivé formy (neboli druhy) energie, tak i celková energie soustavy.

Z mnoha experimentů konaných s nejrůznějšími soustavami v makroskopickém i atomárním měřítku vyplývá, že energie hmotné soustavy, která není v interakci s okolím, tj. která je izolovaná, se nemění. Celková energie izolované soustavy zůstává stálá při všech dějích, které v ní probíhají. Platí:

$$\{1.2-154\} \quad E = \text{konst.} \quad \text{zákon zachování energie} \quad (2.158)$$

{ram-84}

Tento výsledek se nazývá zákon zachování energie. Je jedním z nejdůležitějších fyzikálních zákonů, má obecnou platnost.

Přechází-li izolovaná soustava z jednoho stavu (1) do druhého (2), plyne z rovnice (2.158), že platí $E_1 = E_2$, tj. $E_2 - E_1 = 0$, neboli

$$\{1.2-155\} \quad \Delta E = 0, \quad \text{tj.} \quad \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta U + \dots = 0. \quad (2.159)$$

{ram-85}

Při konkrétních dějích se mohou některé z energií zmenšovat, jiné zvětšovat a některé se nemusí měnit vůbec (málokdy se mění např. E_{jad}). Víme-li při zkoumání určitého děje předem, že určitý druh energie se při něm nemění, pak ve vztazích (2.159), (2.158) příslušný člen obvykle vůbec nevypisujeme. Mění-li se např. jen mechanická energie hmotné soustavy, přejde vztah (2.158) na vztah (2.147).

Zákon vyjádřený vztahem (2.158) se v literatuře často nazývá také „zákon zachování a přeměny energie“.

Řešte příklady [KP 1.4-9](#), [KP 1.4-22](#), [KP 1.4-23](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.6-21](#) až [KP 2.6-27](#).



2.10 Pohybové rovnice soustavy částic

{1.2.8}

Nejprve jsou zavedeny veličiny, které charakterizují pohybový stav hmotné soustavy jako celku: celková hybnost hmotné soustavy \vec{P} (charakterizuje pohybový stav hmotné soustavy z hlediska postupné složky jejího pohybu). První (resp. druhá) pohybová rovnice⁷ pro hmotnou soustavu vyjadřuje souvislost časové změny hybnosti (resp. momentu hybnosti) hmotné soustavy se silami (resp. s momenty sil), které na hmotnou soustavu působí. První a druhá impulsová věta vyslovuje tvrzení o změnách uvedených veličin v časovém intervalu konečné délky. V závěru je vyšetřena pohybová rovnice pro těleso, které koná otáčivý pohyb kolem pevné osy.

- Cíl:** I) Umět použít vztahy a zákony uvedené v rámečcích, vysvětlit pojmy, veličiny a výsledky v tomto textu;
- II) Vyslovit a vyložit první pohybovou rovnici a první impulsovou větu pro hmotnou soustavu, vysvětlit jejich souvislost a vyložit analogii s pohybovou rovnicí a impulsovou větou pro hmotný bod. Vyslovit zákon zachování hybnosti, vyložit podmínky jeho platnosti;
- III) Vysvětlit zákonitosti, jimiž se řídí pohyb hmotného středu soustavy;
- IV) Vysvětlit a vyložit druhou pohybovou rovnici a druhou impulsovou větu pro hmotnou soustavu, vysvětlit jejich souvislost. Vysvětlit analogii a rozdíl mezi první a druhou pohybovou rovnicí. Vyslovit zákon zachování momentu hybnosti, vyložit podmínky jeho platnosti;
- V) Vysvětlit zákonitosti rotačního pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy. Vysvětlit formální analogie mezi pohybovou rovnicí rotujícího tělesa a pohybovou rovnicí hmotného bodu;
- VI) Řešit samostatně příklady řešené v tomto textu a příklady [KP 1.4-3](#), [KP 1.4-4](#), [KP 1.6-1](#), [KP 1.6-2](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.6-28](#) až [KP 2.6-38](#).

2.10.1 První pohybová rovnice a první impulsová věta pro hmotné soustavy

Uvedená rovnice a věta vyslovují tvrzení o souvislosti hybnosti hmotných soustav se silami, které na soustavu působí. Dále v textu uvedené rovnice (2.161) resp. (2.162) jsou formálně shodné s pohybovou rovnicí (2.38) pro hmotný bod resp. s rovnicí (2.59) vyslovující impulsovou větu pro hmotný bod. První pohybová rovnice i první impulsová věta jsou důsledkem pohybových rovnic pro hmotný bod.

2.10.1.1 Definice celkové hybnosti hmotné soustavy

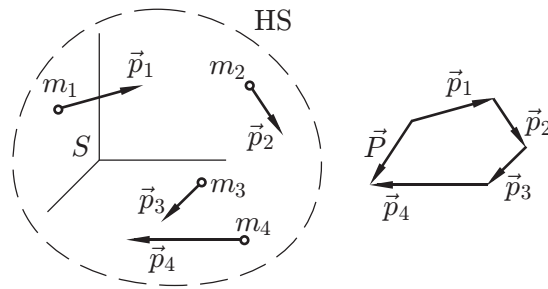
$$\vec{P}$$

Celková hybnost \vec{P} hmotné soustavy je další z veličin, které charakterizují její pohybový stav. Zákonitosti, jež celková hybnost hmotné soustavy splňuje, umožní získat užitečné informace o pohybu hmotné soustavy jako celku, aniž bychom detailně zkoumali pohyb jejích jednotlivých částí.

Celková hybnost hmotné soustavy v určité vztažné soustavě S je vektorová veličina \vec{P} definovaná vztahem

⁷V některé literatuře bývá obsah těchto vět pojmenováván jako I., respektive II. impulsová věta, které jsou v tomto textu vyhrazeny k pojmenování mírně odlišných tvrzení – viz níže.

2.10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY ČÁSTIC



Obr. 2.94: Celková hybnost \vec{P} hmotné soustavy HS je dána vektorovým součtem hybností jednotlivých jejích elementů.

{obr1.2-93}

{1.2-156}

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n, \quad \text{definice celkové hybnosti hmotné soustavy} \quad (2.160)$$

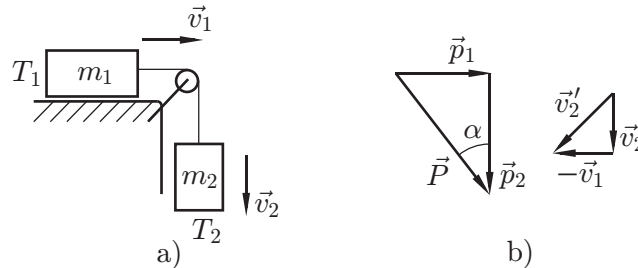
{ram-86}

kde $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ jsou hybnosti jejích elementů tak malých, že je lze považovat za hmotné body (obr. 2.94). Vektor \vec{P} lze zakreslit kamkoliv, nejčastěji se umísťuje do těžiště soustavy. Při pohybu soustavy jsou všechny vektorové veličiny ve vztahu (2.160) obecně funkcemi času.

{pr1.2-33}

KP 2.10-1

Určete celkovou hybnost \vec{P} soustavy sestávající ze dvou těles T_1, T_2 o hmotnostech $m_1, m_2 = 2m_1$, pohybujících se podle obr. 2.95a. Určete velikost a směr této hybnosti.



{obr1.2-94}

Obr. 2.95: Příklad KP 2.10-1.

Řešení:

a) $\vec{P} = ?; \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, viz obr. 2.95b. Přitom $|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1|$, $p_2 = m_2 v_2 = 2m_1 v_2 = 2m_1 v_1 = 2p_1$.

b) $P = ?, \alpha = ?; P = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{p_1^2 + (2p_1)^2} = \sqrt{5} \cdot p_1 = \sqrt{5} \cdot m_1 v_1; \alpha = \arctan \frac{p_1}{p_2} = \arctan \frac{1}{2} = 27^\circ$.

Pozn.: Hybnost jsme určili v laboratorní soustavě. Určete hybnost téže hmotné soustavy ve vztahné soustavě S' spojené s tělesem T_1 (v soustavě S' je $\vec{v}'_1 = \vec{0}$, $\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, obr. 2.95).

2.10.1.2 První pohybová rovnice a první impulsová věta pro hmotné soustavy

První pohybová rovnice pro hmotnou soustavu a první impulsová věta pro hmotnou soustavu jsou nejdůležitějšími vztahy, jež splňuje celková hybnost \vec{P} hmotných soustav. Jsou to analogie druhého Newtonova pohybového zákona a věty o impulsu síly pro hmotný bod, viz rovnice (2.38), (2.59).



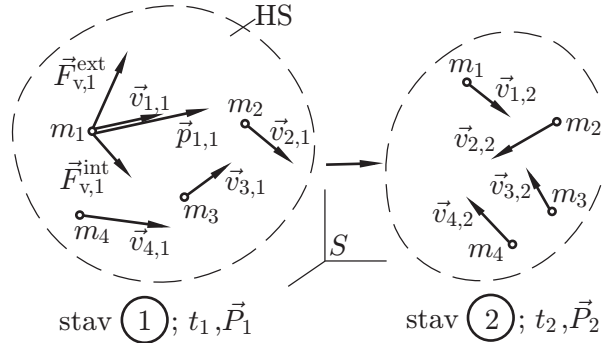
2.10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY ČÁSTIC

První pohybová rovnice pro hmotnou soustavu zní: Nechť se hmotná soustava pohybuje v inerciální vztažné soustavě S účinkem vnějších sil (\vec{F}^{ext}) a vnitřních sil (\vec{F}^{int}), obr. 2.96. Její hybnost $\vec{P}(t)$ se přitom (obecně) mění tak, že platí

$$\{1.2-157\} \quad \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \dot{\vec{P}}(t) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ext}} = \vec{F}_v^{\text{ext}}. \quad \text{první pohybová rovnice pro hmotné soustavy} \quad (2.161)$$

{ram-87}

Slovy: Derivace vektoru celkové hybnosti \vec{P} hmotné soustavy podle času je rovna součtu vnějších sil (tj. výslednici \vec{F}_v^{ext} vnějších sil), které na ni působí. To značí, že vnitřní síly nemají na \vec{P} vliv.



Obr. 2.96: Prvky hmotné soustavy HS se pohybují v inerciální vztažné soustavě S účinkem vnějších (\vec{F}^{ext}) a vnitřních sil (\vec{F}^{int}).

{obr1.2-95}

Důkaz: Napíšeme pohybové rovnice (viz rovnice (2.38)) všech elementů hmotné soustavy ve vztažné soustavě S , která je podle předpokladu inerciální, a sečteme je. Dostaneme

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k^{\text{ext}} + \vec{F}_k^{\text{int}}, k = 1, 2, \dots, n; \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ext}},$$

přičemž jsme užili toho, že součet vnitřních sil, které splňují třetí Newtonův pohybový zákon (viz strana 60), je roven nule. Užijeme-li v posledním vztahu vztah, který dostaneme derivováním rovnice (2.160) podle času, dostaneme vztah (2.161). Srovnajte tuto rovnici s (2.38).

První impulsovou větu, rovnice (2.162), dostaneme takto: Nechť uvažovaná hmotná soustava naznačená na obr. 2.96 má v čase t_1 hybnost \vec{P}_1 a v pozdějším čase t_2 hybnost \vec{P}_2 . V průběhu děje $1 \rightarrow 2$ se v malém časovém intervalu délky dt změní vektor \vec{P} o diferenciál $d\vec{P}$, pro který ze vztahu (2.161) plyne $d\vec{P} = \vec{F}_v^{\text{ext}} dt$, kde \vec{F}_v^{ext} je výslednice vnějších sil. Sečteme-li všechny tyto změny v celém časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, tj. integrujeme-li obě strany rovnice (2.161) podle času v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, dostaneme vztah

$$\{1.2-158\} \quad \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_v^{\text{ext}} dt. \quad \text{první impulsová věta pro hmotné soustavy} \quad (2.162)$$

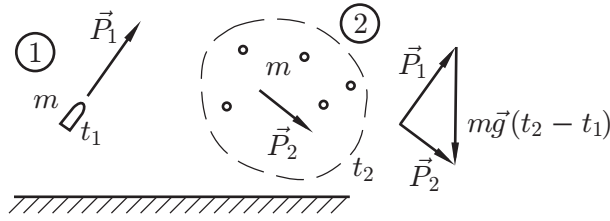
{ram-88}

Vektor daný integrálem na pravé straně je impuls vnějších sil v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, srovnajte rovnice (2.56) a (2.59). Impuls síly se značí \vec{I} .

Vztahy (2.161), (2.162) jsou sice formálně shodné se vztahy (2.38), (2.59) platnými pro hmotný bod, mají však obecnější fyzikální obsah. Poznamenejme, že vztahy (2.161), (2.162) jsou teoreticky získané z výsledků plynoucích z Newtonových pohybových zákonů.

{pr1.2-34} **KP 2.10-2** _____

Vystřelený dělostřelecký granát o hmotnosti m explodoval v čase t_1 , kdy měl hybnost \vec{P}_1 . Určete celkovou hybnost všech střepin a produktů exploze v pozdějším čase t_2 . Předpokládejte, že odpor vzduchu byl zanedbatelný a že žádná část granátu ještě nedopadla na zem (obr. 2.97).



{obr1.2-96}

Obr. 2.97: Příklad KP 2.10-2.

Řešení:

Granát i s náloží považujeme za hmotnou soustavu. Při pohybu v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ na ni působily vnitřní síly a z vnějších sil, podle předpokladu, pouze síly tíhové, jejichž výslednice byla $\vec{G} = m\vec{g}$. Z první impulsové věty (2.162) dostaneme (obr. 2.97):

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{G} dt = \vec{P}_1 + m\vec{g}(t_2 - t_1).$$

2.10.1.3 Zákon zachování hybnosti hmotné soustavy

Je-li součet vnějších sil působících na hmotnou soustavu roven nule, plyne ze vztahu (2.161), že platí $d\vec{P}/dt = \vec{0}$, neboli že je



$$\vec{P} = \text{konst.}, \quad \text{tj. } \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \text{konst.}, \quad \text{zákon zachování celkové hybnosti hmotné soustavy} \quad (2.163)$$

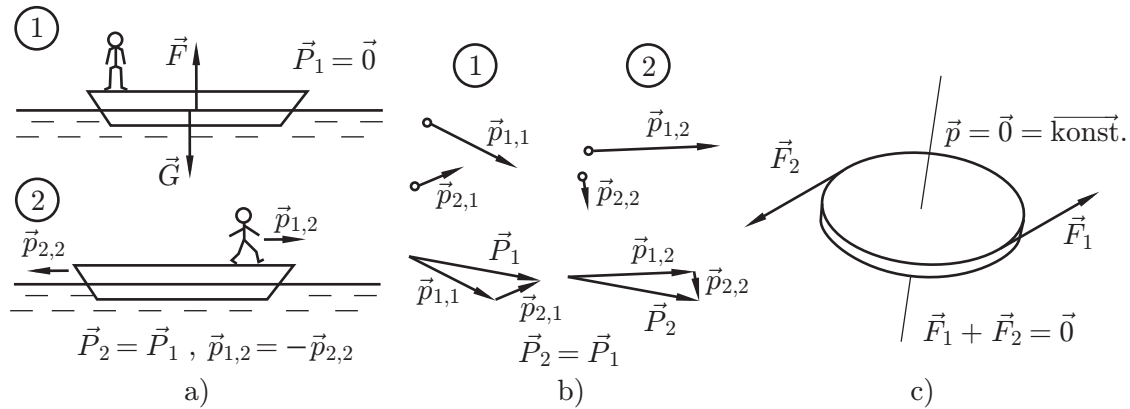
{1.2-159}
{ram-89}

kde $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ jsou hybnosti jejích elementů. Celková hybnost takové soustavy je tedy stálá. Hybnosti jednotlivých elementů se mohou měnit, jejich (vektorový) součet je však konstantní. Vztah (2.163) vyjadřuje zákon zachování hybnosti. Je-li zejména na počátku pohybu $\vec{P} = \vec{0}$, je $\sum \vec{p}_k = \vec{0}$ v každém dalším okamžiku. Tento zákon platí např. pro izolované soustavy, platí však i pro soustavy, které izolované nejsou a na které působí i vnější síly, jejichž součet je však nulový.

Příklady užití zákona zachování hybnosti

- Na obr. 2.98a je člověk v loďce na klidné vodě. Původně byla soustava „člověk + loďka“ v klidu, poté začal člověk kráčet doprava. Odpor vody byl zanedbatelný. Na soustavu působily tyto vnější síly: celková tíhová síla \vec{G} a vztlaková síla vody, $\vec{F} = -\vec{G}$. Jejich výslednice byla trvale rovna nule, $\vec{F}_v^{\text{ext}} = \vec{G} + \vec{F} = \vec{0}$. Ze vztahu (2.161) plyne, že hybnost soustavy je konstantní — nulová, neboť byla nulová v původním stavu. Loďka se tedy začne pohybovat doleva tak, aby pro její hybnost \vec{p}_2 platilo $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$, kde \vec{p}_1 je hybnost člověka (v laboratorní soustavě).
- Na obr. 2.98b jsou dvě tělesa těsně před srážkou (stav 1) a těsně po ní (stav 2). Byl-li impuls vnějších sil při srážce zanedbatelně malý, pak hybnost soustavy zůstala konstantní nezávisle na tom, zda srážka byla pružná nebo nepružná. Mechanická energie soustavy se ovšem mohla změnit.

2.10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY ČÁSTIC



Obr. 2.98: Příklady užití zákona zachování hybnosti: člověk v loďce (a), srážka dvou těles (b) a rotující setrvačnick (c).

{obr1.2-97}

- c) Na obr. 2.98c je rotující souměrný setrvačnick s volnou osou, na který působí pouze dvě vnější síly: \vec{F}_1 a $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Ježto součet vnějších sil je roven nule, hybnost setrvačnicku se nemění, i když se z jeho rotační pohyb a jeho kinetická energie mění.

2.10.1.4 Souvislost změn hybnosti hmotné soustavy s pohybem jejího hmotného středu

Hmotný střed C hmotné soustavy, neboli těžiště hmotné soustavy, je bod, jehož poloha je definována vztahem (2.124). Při dějích, jež probíhají v hmotné soustavě, nebo jichž se hmotná soustava zúčastní, se těžiště (obecně) pohybuje. Ukážeme, že jeho pohyb souvisí s celkovou hybností hmotné soustavy a jejími změnami.

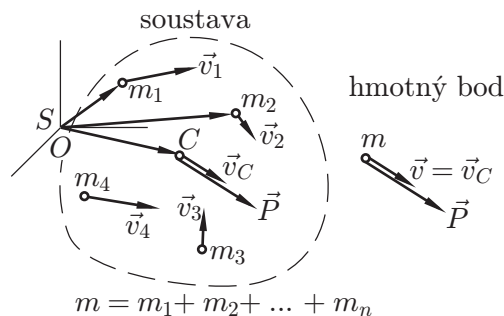
- a) Vyjádření hybnosti hmotné soustavy pomocí rychlosti těžiště.

Označíme-li \vec{v}_C rychlost těžiště C hmotné soustavy o celkové hmotnosti m v libovolné vztahné soustavě (obr. 2.99) a je-li \vec{P} její celková hybnost, pak platí

{1.2-160}

$$\vec{P} = m\vec{v}_C. \quad (2.164)$$

Skutečně je: $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n) = \frac{d}{dt}(m\vec{r}_C) = m\vec{v}_C$. Přitom jsme užili vztahu (2.124). Výsledek (2.164) lze vyjádřit slovy takto: Hybnost hmotné soustavy o hmotnosti m je stejná jako hybnost hmotného bodu o hmotnosti m pohybujícího se rychlostí hmotného středu.



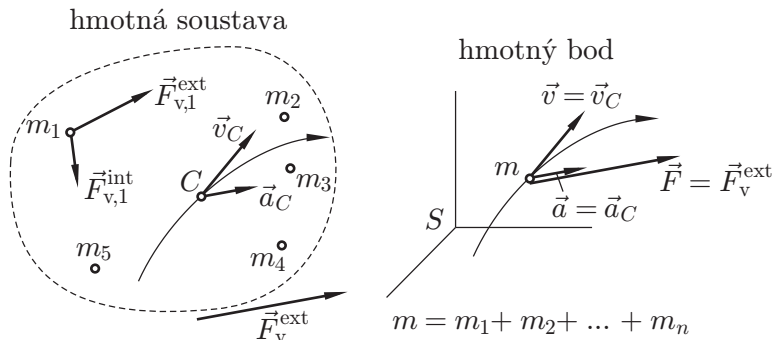
{obr1.2-98}

Obr. 2.99

2.10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY ČÁSTIC

b) Věta o pohybu hmotného středu

Tato zajímavá a užitečná věta zní: Hmotný střed hmotné soustavy o hmotnosti m , ve které působí vnitřní a vnější síly (tyto pak o výslednici \vec{F}_v^{ext}), se pohybuje v inerciální soustavě stejně jako hmotný bod o hmotnosti m , na který působí síla \vec{F}_v^{ext} (obr. 2.100). Vnitřní síly nemají na pohyb hmotného středu vliv.



Obr. 2.100

Tato věta vyplývá ze vztahu (2.165), který odvodíme: Pro celkovou hybnost \vec{P} soustavy platí vztah (2.164). Jeho derivováním podle času dostaneme

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_C) = m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = m\vec{a}_C,$$

kde \vec{a}_C je zrychlení hmotného středu. Dosadíme-li sem za $d\vec{P}/dt$ veličinu \vec{F}_v^{ext} ze vztahu (2.161) platného v libovolné inerciální soustavě, dostaneme

$$\vec{F}_v^{\text{ext}} = m\vec{a}_C. \quad \text{zrychlení hmotného středu} \quad (2.165)$$

Vztah $\vec{F}_v = m\vec{a}$ je však pohybová rovnice hmotného bodu o hmotnosti m , na který působí síly o výslednici \vec{F}_v . Ze vztahu (2.165) plyne, že hmotný střed má stejné zrychlení jako zmíněný hmotný bod. Mají-li hmotný bod a hmotný střed stejné počáteční rychlosti, pohybují se po stejných trajektoriích, viz obr. 2.100.

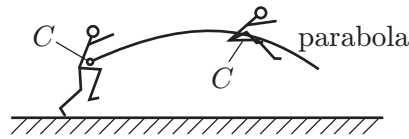
Příklady užití vztahu (2.165):

1. Je-li $\vec{F}_v^{\text{ext}} = \vec{0}$ (hmotná soustava je např. izolovaná), plyne ze vztahu (2.164) $\vec{a}_C = \vec{0}$. Hmotný střed je buď v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře.
2. Pohybuje-li se libovolná hmotná soustava jen účinkem homogenního tíhového pole (bez odporu vzduchu), je součet vnějších sil dán vztahem $\vec{F}_v^{\text{ext}} = \vec{G} = m\vec{g}$. Ze vztahu (2.165) pak plyne $\vec{a}_C = \vec{g}$. To značí: hmotný střed hmotné soustavy se pohybuje obecně po parabole. Na obr. 2.101 je znázorněn skokan. Po odrazu od země se jeho těžiště pohybuje po parabole, nezávisle na tom, jaké pohyby atlet během letu koná. Podobně se po parabole pohybuje i těžiště soustavy střeplin vybuchlého granátu znázorněného na obr. 2.97.

2.10.2 Druhá pohybová rovnice a druhá impulsová věta pro hmotné soustavy

Uvedeme věty vyslovující zákonitosti, které se vztahují k rotační části obecného pohybu obecné hmotné soustavy. Její hlavní smysl vysvětlíme na pohybu desky znázorněné v obr. 2.102. Homogenní čtvercová deska, na kterou nepůsobí vnější síly, nechť se v některém okamžiku otáčí

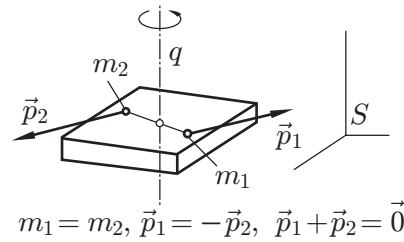
2.10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY ČÁSTIC



Obr. 2.101

{obr1.2-100}

v inerciální soustavě S kolem přímky q . Její hybnost \vec{P} je rovna nule, neboť celou desku lze považovat za soustavu dvojic hmotných elementů o stejných hmotnostech položených souměrně vzhledem k přímce q , pro něž platí $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ (obr. 2.102). (Pozn.: takový pohyb lze realizovat v kosmu nebo v soustavě, která je v nezátíženém stavu).



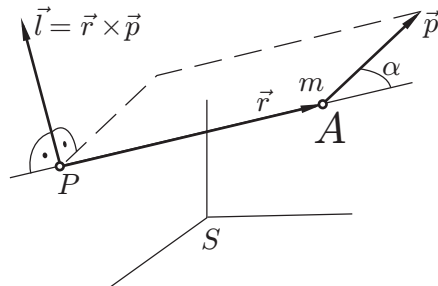
Obr. 2.102

{obr1.2-101}

Položme si otázku: Může se deska sama od sebe, jen působením vnitřních sil, začít otáčet rychleji nebo pomaleji? Tušíme, že ne. První pohybová rovnice však na tuto otázku nedává odpověď, tvrdí jenom, viz rovnice (2.163), že $\vec{P} = \text{konst.}$, tj. v našem případě $\vec{P} = \vec{0}$. Tento vztah by ovšem platil, i kdyby deska změnila svoji úhlovou rychlost. Tedy: Změna rotačního pohybu hmotné soustavy bez působení vnějších sil není v rozporu s první pohybovou rovnicí pro hmotnou soustavu. To, že změna rotačního pohybu izolované soustavy není možná, vyplývá až z tzv. druhé pohybové rovnice pro hmotnou soustavu, rovnice (2.169), kterou v dalším odvodíme. Nejprve však budeme definovat veličiny, které se uplatňují při rotačním pohybu — moment hybnosti a moment síly.

2.10.2.1 Moment hybnosti, moment síly

- a) Moment hybnosti hmotného bodu vzhledem k bodu P je vektorová veličina definována takto: Nechť hmotný bod se pohybuje vzhledem k nějaké soustavě S v určitém okamžiku bodem A rychlostí \vec{v} , takže má hybnost \vec{p} . Volme libovolně bod P a sestrojme vektor $\vec{r} = \vec{PA}$ (obr. 2.103). Moment hybnosti hmotného bodu vzhledem k bodu P je vektorová veličina \vec{l} definována vztahem



Obr. 2.103

{obr1.2-102}

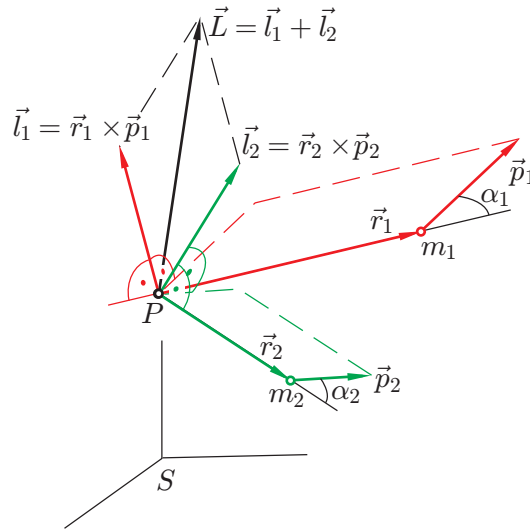
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad \text{definice momentu hybnosti hmotného bodu vzhledem k bodu} \quad (2.166)$$

{1.2-161a}
{ram-91}

Informace:

- (a) $[l] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
- (b) Vektor \vec{l} se umísťuje do bodu P , který se nazývá pól. Velikost i směr vektoru \vec{l} závisí na volbě bodu P . Velikost vektoru \vec{l} : $|\vec{l}| = r p \sin \alpha = r m v \sin \alpha$, kde $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ (obr. 2.103). Směr vektoru \vec{l} : $\vec{l} \perp \vec{r}, \vec{p}$, vektory $\vec{r}, \vec{p}, \vec{l}$ umístěné v jednom bodě tvoří pravotočivý trojhran, přitom postupujeme od \vec{r} k \vec{p} nejkratší cestou ($\alpha \leq 180^\circ$). Pozn.: Určení směru \vec{l} zde často činí potíže.
- (c) Všimněte si: Je-li pól P pevný a hmotný bod se pohybuje rovnoměrně po přímce ($\vec{p} = \text{konst.}$), je $\vec{l} = \text{konst.}$
- (d) Za pól P se nejčastěji volí počátek souřadnic, $P \equiv O$.

- b) Celkový moment hybnosti \vec{L} hmotné soustavy vzhledem k bodu P je definován jako (vektorový) součet momentů hybností všech jejích elementů vzhledem k bodu P (obr. 2.104), tj.



Obr. 2.104

{obr1.2-103}

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_n = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{p}_n. \quad \text{definice } \vec{L} \text{ pro hmotnou soustavu} \quad (2.167)$$

{1.2-162}

{ram-92}

V obr. 2.104 je pro přehlednost zakreslena hmotná soustava sestávající pouze ze dvou hmotných bodů. Pohybují-li se elementy hmotné soustavy, pak momenty hybností $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$, a \vec{L} se obecně mohou, ale také nemusí, měnit.

{pr1.2-35}

KP 2.10-3

Určete moment hybnosti bicyklového kola rotujícího úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem osy o podle obr. 2.105, a to vzhledem k pólu P ležícímu ve středu kružnice k . Předpokládejte, že hmotnost m kola je rozložena na kružnici k o poloměru R .

Řešení:

Kolo považujeme za hmotnou soustavu sestávající z malých elementů – hmotných bodů o hmotnostech $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$ a rychlostech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, jež mají stejné velikosti, $v_1 = v_2 = \dots = v_n = R\omega$. Hybnost k -tého elementu označíme $\Delta \vec{p}_k$, jeho moment hybnosti vzhledem k pólu P označíme $\Delta \vec{l}_k$. Pak platí

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^n \Delta \vec{l}_k = \Delta \vec{l}_1 + \Delta \vec{l}_2 + \dots + \Delta \vec{l}_n = \vec{r}_1 \times \Delta \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \Delta \vec{p}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \Delta \vec{p}_n,$$

kde \vec{r}_k je polohový vektor k -tého elementu vzhledem k pólu P .

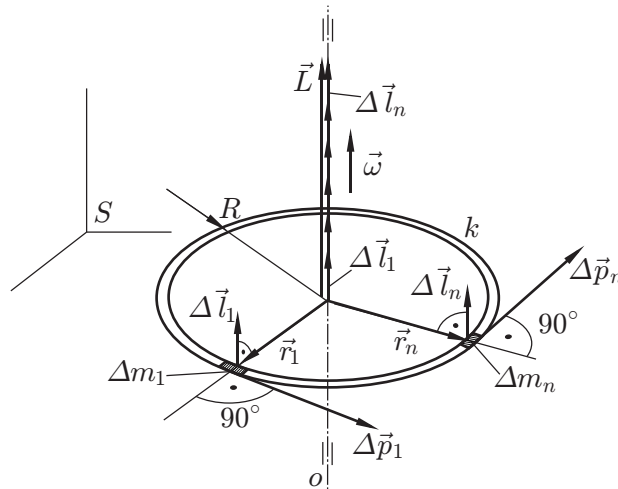
Všechny vektory $\Delta \vec{l}_k = \vec{r}_k \times \Delta \vec{p}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ mají směr osy o . Jejich velikosti jsou

$$|\Delta \vec{l}_k| = |\vec{r}_k| \cdot |\Delta \vec{p}_k| \cdot \sin 90^\circ = R \Delta m_k v_k \cdot 1 = R \Delta m_k R \omega = \Delta m_k R^2 \omega.$$

Ježto všechny vektory mají stejný směr, má jejich (vektorový) součet velikost (obr. 2.105)

$$|\vec{L}| = \left| \sum_{k=1}^n \Delta \vec{l}_k \right| = \sum_{k=1}^n |\Delta \vec{l}_k| = \sum_{k=1}^n \Delta m_k R^2 \omega = I \omega,$$

kde I je moment setrvačnosti kola vzhledem k ose o .



Obr. 2.105

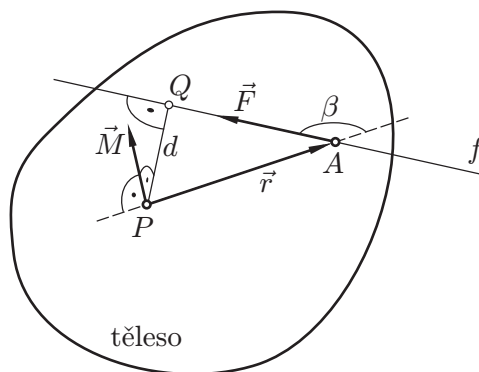
{obr1.2-104}

- c) Moment síly \vec{F} vzhledem k bodu P . Nechť na nějaký hmotný bod nebo na nějaké těleso v jeho bodě A působí síla \vec{F} (obr. 2.106). Volme (libovolně) pól P a označme $\vec{r} = \overrightarrow{PA}$. Moment síly \vec{F} vzhledem k bodu P je vektorová veličina \vec{M} definována vztahem

{1.2-163}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad \text{definice momentu síly vzhledem k bodu} \quad (2.168)$$

{ram-93}



Obr. 2.106

{obr1.2-105}

Informace:

- (a) $[M] = \text{N} \cdot \text{m} (= \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})$; užívá se $\text{N} \cdot \text{m}$;
 (b) Vektor \vec{M} se umísťuje do pólu P . Vektor \vec{M} závisí na poloze pólu.
 Má velikost:

$$|\vec{M}| (= M) = rF \sin \beta, \quad 0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ.$$

Směr:

$$M \perp \vec{r}, \vec{F}.$$

Vektory \vec{r} , \vec{F} , \vec{M} umístěné v jednom bodě tvoří pravotočivý trojhran (rovněž: pravidlo pravotočivého šroubu). Viz obr. 2.106;

- (c) Úsečka PQ , kde Q je pata kolmice spuštěné z P na nositelku síly \vec{F} , tj. přímku f v obr. 2.106, se nazývá rameno síly \vec{F} . Její délka $d = r \sin \beta$ se někdy rovněž nazývá rameno síly. Pak lze psát

$$M = Fr \sin \beta = Fd.$$

- (d) Z předchozího plyne, že posouvá-li se působíště A po přímce f , zůstává $\vec{M} = \text{konst}$;
 (e) Veličina M charakterizuje otáčivý účinek síly umístěné v bodě A , vzhledem k bodu P . Proto se nazývá otáčivý moment síly;
 (f) Působí-li v bodě A několik sil, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, (viz obr. 2.106), pak z experimentu plyne, že jejich celkový otáčivý účinek je stejný, jako otáčivý účinek jejich výslednice

$$\vec{F}_v = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Moment výslednice sil je tedy roven součtu momentů jednotlivých sil, $\vec{M}_v = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n$. Tento výsledek plyne i matematicky ze vztahu (2.65).

2.10.2.2 Druhá pohybová rovnice a druhá impulsová věta pro hmotnou soustavu

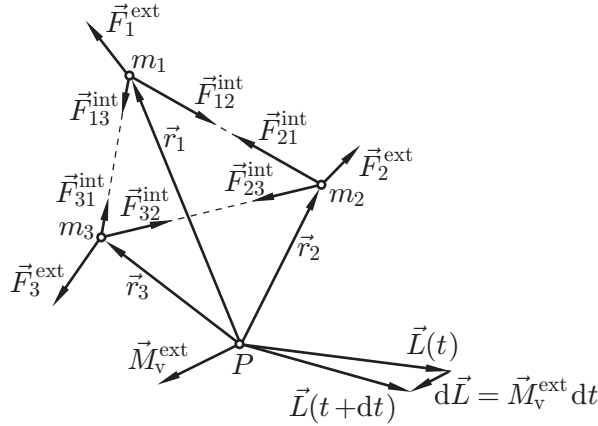
Pohybová rovnice pro hmotnou soustavu zní: Nechť se soustava pohybuje v inerciální vztažené soustavě S účinkem vnějších sil (\vec{F}^{ext}) a vnitřních sil (\vec{F}^{int}), obr. 2.107. Její celkový moment hybnosti \vec{L} vzhledem k libovolnému (ale v S pevnému) bodu P je (obecně) funkcí času a mění se tak, že platí



{1.2-164}
{ram-94}

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \vec{M}_v^{\text{ext}}, \quad \text{druhá pohybová rovnice pro hmotnou soustavu} \quad (2.169)$$

kde \vec{M}_v^{ext} je výsledný moment jednotlivých vnějších sil působících na soustavu.



Obr. 2.107

{obr1.2-106}

V obr. 2.107 jsou znázorněny vektory \vec{L} a \vec{M}_v^{ext} v čase t . V elementárním časovém intervalu $(t, t + dt)$ změní se $\vec{L}(t)$ na $\vec{L}(t + dt) = \vec{L}(t) + d\vec{L}$, kde podle vztahu (2.169) je $d\vec{L} = \vec{M}_v^{\text{ext}} dt$.

Důkaz: Považujme hmotnou soustavu za soubor hmotných elementů o hmotnostech m_1, m_2, \dots, m_n , o hybnostech $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ a o momentech hybnosti $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$. Označme $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ jejich polohové vektory vzhledem k P , dále $\vec{F}^{\text{ext}}, \vec{F}^{\text{int}}$, atd. vnější a vnitřní síly, které na ně působí, a $\vec{M}^{\text{ext}}, \vec{M}^{\text{int}}$ atd. momenty odpovídajících sil vzhledem k P . Pak platí

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_n) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{p}_n) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) + \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 \times \vec{p}_2) + \dots + \frac{d}{dt}(\vec{r}_n \times \vec{p}_n).$$

Jednotlivé členy upravíme s užitím vztahu

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}},$$

který se dokazuje ve vektorové analýze. Napišeme pouze úpravu prvního členu:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{v}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_1^{\text{int}}) = \vec{0} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{\text{int}} = \vec{M}_1^{\text{ext}} + \vec{M}_1^{\text{int}}.$$

Zde jsme užili toho, že $\vec{v}_1 \uparrow \uparrow \vec{p}_1$ a toho, že soustava S je inerciální a že platí pohybové rovnice

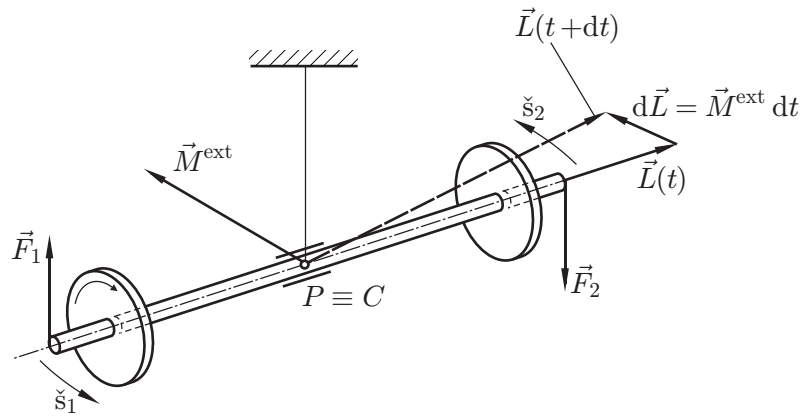
$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_1^{\text{int}} = \vec{F}_v.$$

Sečteme-li tyto členy, dostaneme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k^{\text{ext}} + \sum_{k=1}^n \vec{M}_k^{\text{int}} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k^{\text{ext}} + \vec{0} = \vec{M}_v^{\text{ext}} (= \vec{M}_v).$$

Zde jsme užili toho, že vnitřní síly splňující třetí pohybový zákon (akce a reakce), takže je lze seskupit do dvojic sestávajících ze stejně velkých opačně orientovaných sil ležících na jedné přímce. Moment každé z těchto dvojic vzhledem k libovolnému bodu je nulový. Důkaz je tím proveden.

Informace:

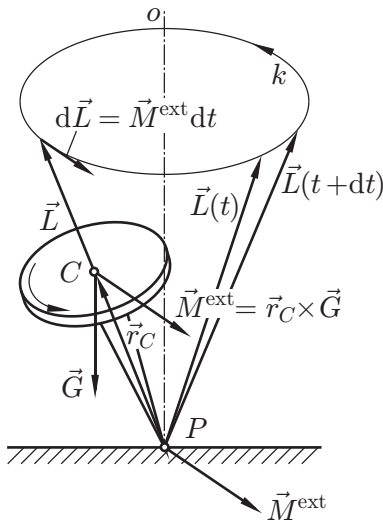


Obr. 2.108

{obr1.2-107}

1. Pohybová rovnice (2.169) má tvar analogický tvaru první pohybové rovnice (2.161). Platí i tehdy, když pohyb hmotné soustavy zkoumáme v těžištové soustavě a bod P leží v jejím počátku, tj. v těžišti hmotné soustavy. Důkaz nebudeme provádět, lze jej najít např. [1], strana 307.
2. Působí-li na rotující hmotnou soustavu, např. na tuhá tělesa, otáčivé momenty, reagují na ně hmotné soustavy způsobem, který je pro nezasvěceného pozorovatele nečekaný. Uvedeme příklady:
 - α) Na obr. 2.108 je znázorněn symetrický setrvačnick sestávající ze dvou homogenních kotoučů spojených hřídelem rotující v některém okamžiku kolem své osy souměrnosti. Hřídel je uložen pomocí ložiska zavěšeném na vlákně v místě, kde je těžiště C celé soustavy, a je vodorovný. Moment vnějších sil vzhledem k pólu $P \equiv C$ je roven nule, $\vec{M}_{v,1}^{\text{ext}} = \vec{0}$. Ze vztahu 2.169 plyne, že moment hybnosti setrvačnicku, který má směr osy symetrie, se nemění, $\vec{L} = \text{konst.}$ Setrvačnick tedy rotuje stálou úhlovou rychlostí a směr jeho osy se nemění. Začne-li na setrvačnick působit silová dvojice (\vec{F}_1, \vec{F}_2) o momentu \vec{M}_2^{ext} , vektor \vec{L} se začne souhlasně s 2.169 měnit. Jeho změna v elementárním časovém intervalu délky dt bude $d\vec{L} = \vec{M}_{v,2}^{\text{ext}} dt = \vec{M}_2^{\text{ext}} dt$. Směr vektoru $d\vec{L}$ je tedy rovnoběžný se směrem vektoru \vec{M}_2^{ext} , který leží ve vodorovné rovině a je kolmý na osu setrvačnicku. Osa setrvačnicku se začne otáčet ve směru naznačeném v obr. 2.108 šipkami \check{s}_1, \check{s}_2 , takže zůstane vodorovná. Konce hřídele se budou pohybovat kolmo na směr působících sil.
 - β) Na rotující souměrnou káču podepřenou v bodě P působí tíhové síly momentem $\vec{M}_v^{\text{ext}} = \vec{r}_C \times \vec{G}$ (viz obr. 2.109). Ježto podle vztahu (2.169) platí $d\vec{L} = \vec{M}_v^{\text{ext}} dt$, pohybuje se konec vektoru \vec{L} ve směru daném okamžitým směrem vektoru \vec{M}_v^{ext} . Osa setrvačnicku tedy opisuje kužel K a současně opisuje (jiný) kužel i vektor \vec{M}_v^{ext} . Oba kužely mají společnou osu o a vrchol P . Takový pohyb setrvačnicku se nazývá precesní. Podobný precesní pohyb koná i Země vlivem sil nehomogenního gravitačního pole Slunce a jimi způsobeného momentu. Osa Země se pohybuje (přibližně) po kuželové ploše s vrcholem v těžišti Země s periodou, která se nazývá Platonský rok, $\pi \doteq 2,6 \cdot 10^4$ roku.
3. Zákon plošné rychlosti pro pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli. Při pohybu tělesa (hmotného bodu) v centrálním silovém poli, např. při pohybu družice v gravitačním

2.10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY ČÁSTIC



Obr. 2.109

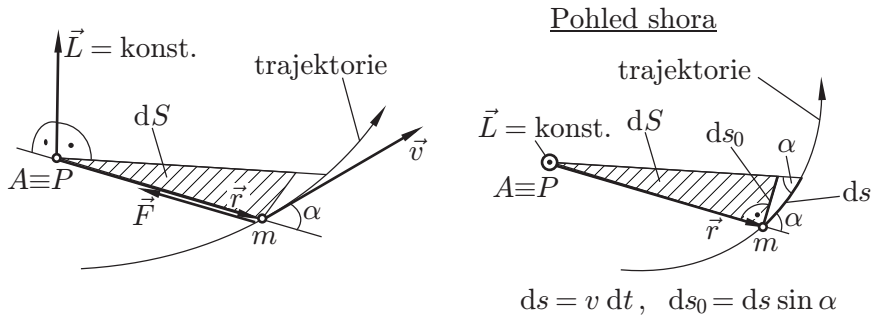
{obr1.2-108}

poli Slunce, jsou plochy, opsané průvodičem \vec{r} hmotného bodu v časových intervalech stejné délky na jedné trajektorii, stejné (viz ods. 2.7.2.3, druhý Keplerův zákon pro pohyb planet). Tento zákon nyní dokážeme.

Důkaz: Nechť hmotný bod se pohybuje v centrálním silovém poli s centrem A , jenž je v klidu v inerciální vztažné soustavě (viz obr. 2.108). Užijeme pro hmotný bod vztah (2.169), přičemž P volme v bodě A . Platí:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_v^{\text{ext}}, \quad \text{tj.} \quad \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0},$$

neboť síla \vec{F} je orientována do bodu P . Odtud plyne $(\vec{L} =) \vec{r} \times m\vec{v} = \text{konst.}$ Ježto $\vec{L} \perp \vec{r}$, \vec{v} , plyne odtud, že trajektorie je rovinná. Vypočteme velikost vektoru \vec{L} (význam užitých symbolů je zřejmý z obr. 2.110):



Obr. 2.110

{obr1.2-109}

$$|\vec{L}| = L = rmv \sin \alpha = mr \frac{ds}{dt} \sin \alpha = mr \frac{ds_0}{dt} = m 2 \frac{1}{2} r \frac{ds_0}{dt} = m 2 \frac{dS}{dt},$$

kde dS je plošný obsah obecného (v obr. 2.108 vyšrafovaného) trojúhelníka, opsaného za dobu dt průvodičem hmotného bodu. Ježto $L = \text{konst.}$, dostáváme

$$\frac{dS}{dt} = \text{konst.}$$



Druhá impulsová věta obsahuje tvrzení o změně momentu hybnosti hmotné soustavy v časovém intervalu konečné délky. Svým obsahem a formou zápisu je analogická první větě impulsové, rovnice (2.162). Zní takto: Nechť se hmotná soustava pohybuje v inerciální vztažné soustavě S účinkem vnějších sil. Označme \vec{M}_v^{ext} (obecně časově proměnný) moment hybnosti vzhledem k bodu P , který je vzhledem k S v klidu. Nechť celkový moment hybnosti soustavy vzhledem k P v čase t_1 je \vec{L}_1 a v čase $t_2 (> t_1)$ je \vec{L}_2 . Pak platí

{1.2-165}

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_v^{\text{ext}} dt. \quad \text{druhá impulsová věta pro hmotné soustavy} \quad (2.170)$$

{ram-95}

Vektorová veličina na pravé straně se nazývá impuls momentu sil v časovém intervalu $\langle t_1; t_2 \rangle$. Výsledek (2.170) se nazývá druhá impulsová věta. Plyne z rovnice (2.169) její integrací v časovém intervalu $\langle t_1; t_2 \rangle$. Zůstává v platnosti i tehdy, když pohyb hmotné soustavy zkoumáme v těžiškové soustavě a bod P leží v jejím počátku, tj. v těžišti hmotné soustavy. Impuls momentu sil se označuje \vec{L} .

2.10.2.3 Zákon zachování momentu hybnosti

Jestliže moment vnějších sil působících na hmotnou soustavu je roven nule ($\vec{M}_v^{\text{ext}} = \vec{0}$), pak z rovnice (2.169) plyne, že celkový moment hybnosti \vec{L} hmotné soustavy se nemění, tj. že platí $\vec{L} = \text{konst.}$ Podmínka $\vec{M}_v^{\text{ext}} = \vec{0}$ je splněna zejména u izolované soustavy.

Platí tedy: Pohybuje-li se izolovaná hmotná soustava v inerciální vztažné soustavě, pak její celkový moment hybnosti vzhledem k pevnému bodu P je stálý,

{1.2-166}

$$\vec{L} = \text{konst.} \quad \text{zákon zachování celkového momentu hybnosti izolované soustavy} \quad (2.171)$$

{ram-96}

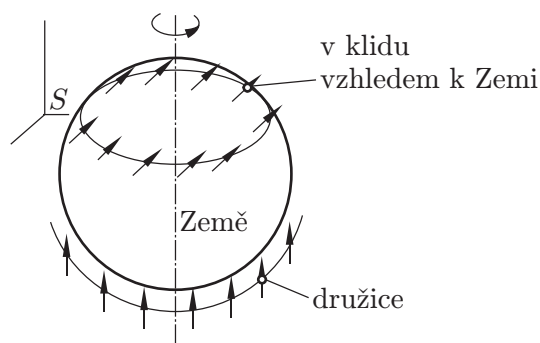
Tento výsledek zůstává v platnosti i při zkoumání pohybu hmotné soustavy v její těžiškové soustavě P umístěným v těžišti hmotné soustavy.

Výsledek vyjádřený vztahem (2.171) se nazývá zákon zachování momentu hybnosti.

Důsledky zákona zachování momentu hybnosti:

- a) Setrvačnickový (gyroskopický) kompas. Umělý horizont v letadle. Symetrický setrvačnick rotující kolem své osy symetrie vznášející se v beztížném stavu ve volně letící družici, na který nepůsobí otáčivé momenty, zachovává vzhledem k inerciální soustavě (např. heliocentrické nebo geocentrické) jednak směr svojí osy, jednak svojí úhlovou rychlost ($\{d\vec{L}/dt = \vec{M}_v^{\text{ext}}, \vec{M}_v^{\text{ext}} = \vec{0}\} \rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$) Jeho osa míří trvale do určitého směru vesmíru, tj. k některé ze stálic (obr. 2.111). Je-li setrvačnick upevněn v tzv. Cardanově závěsu, je moment vnějších sil (za předpokladu, že síly tření v ložiskách a síly odporu vzduchu jsou zanedbatelné) rovněž nulový. Osa tohoto setrvačnicku, roztočeného kolem osy jeho symetrie, je v geocentrické soustavě stálá, i když je setrvačnick umístěn např. na povrchu Země. Umístíme-li takový setrvačnick např. v letadle, lze vhodným mechanismem, jehož je setrvačnick součástí, trvale registrovat podélný i příčný sklon letadla vzhledem k vodorovné rovině (umělý horizont). Setrvačnick umístěný ve vhodném závěsu zaujímá při pohybu na povrchu

2.10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY ČÁSTIC

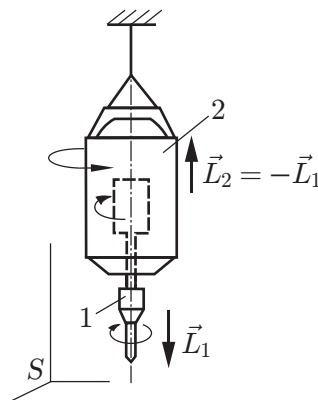


Obr. 2.111

{obr1.2-110}

Země směr místního poledníku (setrvačnickový kompas). Setrvačnicků se užívá k navigaci lodí, letadel a kosmických sond, k jejich stabilizaci i k jejich automatickému řízení. Přesná teorie setrvačnicků je složitá.

- b) Uvede-li se do chodu ruční elektrická vrtačka zavěšená podle obr. 2.112, která byla zpočátku v klidu a jejíž celkový moment hybnosti v laboratorní soustavě byl nulový, $\vec{L}_1 = \vec{0}$, zůstane $\vec{L} = \vec{0}$ i při otáčení rotoru, neboť $\vec{M}_v^{\text{ext}} = \vec{0}$. Nabude-li rotor moment hybnosti \vec{l}_2 , tak musí být tento vektor takový, aby stále platilo $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{L}_2 = \vec{0}$. Pouzdro vrtačky se tedy začne otáčet opačným směrem než rotor.



Obr. 2.112

{obr1.2-111}

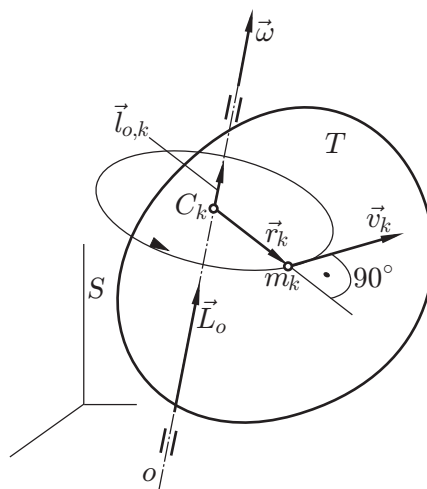
2.10.3 Pohybová rovnice tuhého tělesa otáčejícího se kolem pevné osy

aKolemPevne}

V této části se budeme zabývat zákonitostmi rotačního pohybu tuhých těles a budeme studovat příslušnou pohybovou rovnici (2.179), která vyjadřuje souvislost kinematické veličiny $\vec{\varepsilon}$ (viz vztah 2.23) s dynamickou veličinou \vec{M} (rovnice 2.168).

2.10.3.1 Definice hlavních veličin

Uvažujeme o tuhém tělese T , které koná otáčivý pohyb kolem osy o , pevné v inerciální vztažené soustavě S (obr. 2.113). Může to být např. ozubené kolo v rychlostní skříní, nebo setrvačnick, nebo fyzické kyvadlo. Pohyb tělesa je charakterizován úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ a úhlovým zrychlením $\vec{\varepsilon}$, které jsou (obecně) jistými funkcemi času. Na těleso přitom působí vnější a vnitřní síly. (Síly nejsou pro přehlednost v obr. 2.113 zakresleny.)



Obr. 2.113

{obr1.2-112}

Pohybový stav rotujícího tělesa je charakterizován veličinou celkový moment hybnosti tělesa vzhledem k ose o , který se označuje \vec{L}_o a který budeme v dalším definovat. Považujeme těleso za soustavu hmotných elementů, jež se všechny pohybují po kružnicích a jejichž vzájemné vzdálenosti se nemění (těleso je tuhé). Elementy očíslijme indexem k a označme m_k hmotnost k -tého elementu, r_k poloměr kružnice, po níž se tento element pohybuje, a \vec{v}_k jeho (obecně proměnnou) rychlost. Moment hybnosti k -tého elementu vzhledem k ose o je definován takto: Označíme \vec{r}_k polohový vektor k -tého elementu vzhledem ke středu jeho trajektorie (bod C_k v obr. 2.113) a jeho moment hybnosti $\vec{l}_{o,k}$ vzhledem k ose o definujeme vztahem

$$\vec{l}_{o,k} = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k. \quad \text{definice momentu hybnosti } k\text{-tého hmotného bodu vzhledem k ose } o \quad (2.172)$$

{ram-97}

Tato vektorová veličina, která je rovnoběžná s vektorem $\vec{\omega}$, se umísťuje do bodu C_k . Celkový moment hybnosti tělesa vzhledem k ose o se značí \vec{L}_o . Je definován součtem

$$\vec{L}_o = \sum_{k=1}^n \vec{l}_{o,k} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k. \quad \text{definice celkového momentu hybnosti hmotné soustavy vzhledem k ose } o \quad (2.173)$$

{ram-98}

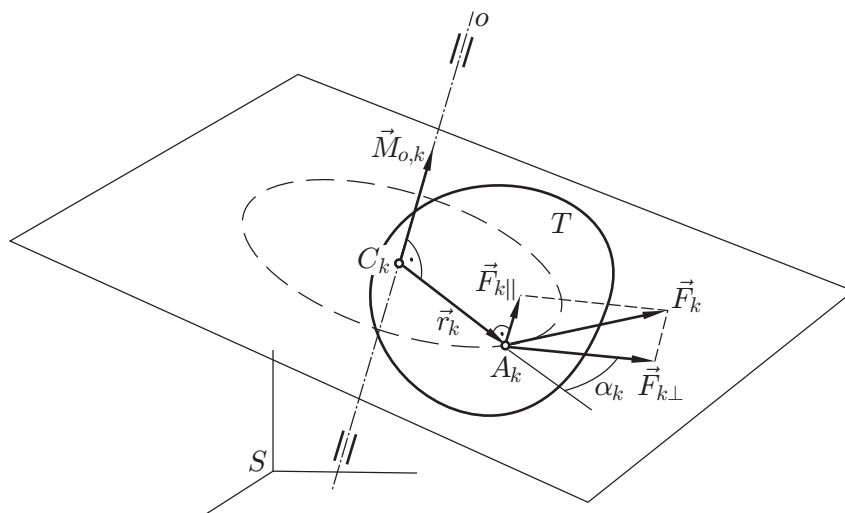
Vektor \vec{L}_o je rovnoběžný s vektorem $\vec{\omega}$ a má velikost, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} |\vec{L}_o| &= \left| \sum_{k=1}^n \vec{l}_{o,k} \right| = \sum_{k=1}^n |\vec{l}_{o,k}| = \sum_{k=1}^n r_k m_k v_k \cdot \sin 90^\circ = \sum_{k=1}^n r_k m_k r_k \omega = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n m_k r_k^2 \right) \cdot \omega = I\omega, \end{aligned}$$

kde I je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace. Rovnost mezi druhým a třetím výrazem plyne z toho, že vektory $\vec{l}_{o,k}$ mají stejný směr. Ježto platí $\vec{L}_o \uparrow \vec{\omega}$, můžeme psát

$$\vec{L}_o = I\vec{\omega}. \quad \text{vztah mezi } \vec{L}_o \text{ a } \vec{\omega} \quad (2.174)$$

{ram-99}



Obr. 2.114

{obr1.2-113}

Moment síly vzhledem k ose o , tj. \vec{M}_o , je vektorová veličina, která charakterizuje otáčivý účinek síly působící na těleso, jež se může otáčet kolem osy o . Nazývá se otáčivý moment síly vzhledem k ose o .

Moment síly \vec{F}_k působící na k -tý element tělesa T (obr. 2.114) definujeme takto: Sílu \vec{F}_k rozložíme na dvě navzájem kolmé složky $\vec{F}_{k||}$ a $\vec{F}_{k\perp}$, z nichž první je rovnoběžná s osou o a druhá leží v rovině kolmé na osu o . Z bodu C_k (viz obr. 2.113–2.114) vedeme opět polohový vektor \vec{r}_k (kolmý na osu o) a moment $\vec{M}_{o,k}$ síly \vec{F}_k vzhledem k ose o definujeme vztahem

{1.2.-170}

$$\vec{M}_{o,k} = \vec{r}_k \times \vec{F}_{k\perp}. \quad \text{moment síly } \vec{F}_k \text{ vzhledem k ose } o \quad (2.175)$$

{ram-100}

Tento vektor se umísťuje do bodu C_k . Je buď souhlasně nebo nesouhlasně rovnoběžný s vektorem $\vec{\omega}$. Zvolíme-li kladný smysl otáčení tím, že osu o orientujeme a průmět vektoru $\vec{M}_{o,k}$ do orientované osy o označíme $M_{o,k}$, pak může být buď $M_{o,k} > 0$ (síla má otáčivý účinek v kladném smyslu), anebo $M_{o,k} < 0$ (síla má otáčivý účinek v záporném smyslu), přičemž $|M_{o,k}| = r_k F_{k\perp} \sin \alpha_k$. Z obr. 2.114 je patrný smysl užitých symbolů (např. α_k je vždy kladný úhel, který svírají vektory \vec{r}_k a $\vec{F}_{k\perp}$). Pokud bude $\alpha_k = 0^\circ$, případně 180° , je $M_{o,k} = 0$ a síla \vec{F}_k nemá otáčivý účinek na k -tý element tělesa.

Výsledný moment sil působících na těleso vzhledem k ose o je definován jako součet

{1.2.-171}

$$\vec{M}_{o,v} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_{o,k}. \quad \text{výsledný moment sil působících na těleso vzhledem k ose } o \quad (2.176)$$

{ram-101}

2.10.3.2 Pohybová rovnice pro rotační pohyb tělesa

Analogií druhého pohybového zákona $m\vec{a} = \vec{F}_v$ pro hmotný bod je rotační pohyb tělesa kolem pevné osy (viz rovnice 2.179). Odvodíme ji úvahou o momentech hybnosti vzhledem k ose o



jednotlivých elementů tělesa. Tedy pro k -tý element platí

$$\{1.2-172\} \quad \frac{d\vec{l}_{o,k}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \vec{v}_k + \vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{0} + \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{r}_k \times (\vec{F}_k^{\text{int}} + \vec{F}_{k\parallel}^{\text{ext}} + \vec{F}_{k\perp}^{\text{ext}}). \quad (2.177)$$

Při úpravách jsme užili vztahu $m\vec{a}_k = \vec{F}_k$, kde \vec{F}_k je výslednice sil působících na k -tý element. Tuto sílu jsme vyjádřili jako součet výslednic vnitřních sil (\vec{F}_k^{int}) a vnějších sil (\vec{F}_k^{ext}) působících na bod k . Výslednici vnějších sil jsme dále rozložili na dvě složky: $\vec{F}_k^{\text{ext}} = \vec{F}_{k\parallel}^{\text{ext}} + \vec{F}_{k\perp}^{\text{ext}}$, viz obr. 2.114. Sečteme nyní všechny rovnice, které dostaneme z (2.177) dosazením $k = 1, 2, \dots, n$, a užijeme vztahu 2.173. Vychází

$$\{1.2-173\} \quad \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{d\vec{l}_{o,k}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\text{int}} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{k\parallel}^{\text{ext}} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{k\perp}^{\text{ext}} = \vec{0} + \vec{0} + \sum_{k=1}^n \vec{M}_{o,k}^{\text{ext}} = \vec{M}_{o,v}^{\text{ext}} \quad (2.178)$$

Při úpravách jsme použili toho, že:

1. Vnitřní síly splňují zákon akce a reakce a působí na spojnici bodů, lze je tedy uspořádat do dvojic, z nichž každá má nulový moment vzhledem k ose o ;
2. Vektor $d\vec{L}_o/dt$ leží na ose o , zatímco každý z vektorů $\vec{r}_k \times \vec{F}_{k\parallel}^{\text{ext}}$ je, pokud se sám nerovná nule, na osu o kolmý. Ježto poslední člen na pravé straně (tj. $\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{k\perp}^{\text{ext}}$) leží v ose o , musí tedy platit

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_{k\parallel}^{\text{ext}} = \vec{0}.$$

Ze vztahů (2.178) a (2.174) dostáváme

$$\{1.2-174\} \quad \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_{o,v}^{\text{ext}}, \quad I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{o,v}^{\text{ext}}, \quad I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{o,v}^{\text{ext}}, \quad \text{tj.} \quad I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \vec{M}_{o,v}^{\text{ext}} \quad \begin{array}{l} \text{pohybové rovnice} \\ \text{tělesa otáčejícího se} \\ \text{kolem pevné osy} \end{array} \quad (2.179)$$

{ram-102}

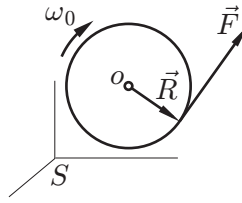
Informace:

1. Zopakujme fyzikální význam veličin ve vztahu (2.179): Skalární veličina I je moment setrvačnosti vzhledem k ose o , viz definice (2.149). Charakterizuje setrvačné vlastnosti tělesa při jeho otáčení kolem pevné osy. Úhlové zrychlení tělesa $\vec{\varepsilon}$ je kinematická veličina, která charakterizuje časovou změnu úhlové rychlosti tělesa. Vektorová veličina $\vec{M}_{o,v}^{\text{ext}}$ – výsledný moment vnějších sil vzhledem k ose o – charakterizuje otáčivý účinek sil vzhledem k ose.
⁸ Vektory $\vec{L}_o, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}, \vec{M}_{o,v}^{\text{ext}}$ leží v ose o . Pro konkrétní výpočty je užitečné rovnice (2.179) přepsat do skalárního tvaru.
2. Analogie mezi pohybovými rovnicemi pro hmotný bod a pro tuhé těleso rotující kolem pevné osy o :

$$\{1.2-177\} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_v, \quad m\vec{a} = \vec{F}_v, \quad ma_x = F_{v,x}; \quad \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_{o,v}^{\text{ext}}, \quad I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{o,v}^{\text{ext}}, \quad I\varepsilon = M_{o,v}^{\text{ext}} \quad (2.180)$$

⁸Nezaměňujte s momentem výslednice vnějších sil!

2.10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY ČÁSTIC



Obr. 2.115

{obr1.2-114}

3. Pro průměty vektorů $\vec{M}_{o,v}^{\text{ext}}, \vec{M}_k^{\text{ext}}$ do osy o může platit kterýkoliv ze vztahů $M_{o,v}^{\text{ext}} \gtrless 0, M_k^{\text{ext}} \gtrless 0$. Znaménko závisí na volbě kladného smyslu rotace a na smyslu otáčivého účinku působících sil, viz následující příklady.

{pr1.2-36}

KP 2.10-4 _____

Kotouč o poloměru R a o momentu setrvačnosti I vzhledem k ose o obr. 2.115 rotuje s úhlovou rychlostí ω_0 . V čase $t = 0$ s na něj začne působit točná síla \vec{F} podle obr. 2.115. Určete:



1. Úhlové zrychlení ε kotouče;
2. Úhlovou rychlost kotouče jako funkci času;
3. Čas, v němž se kotouč zastaví.

Řešení:

1. $\varepsilon = ?$ Smysl otáčení kotouče budeme považovat (zvolíme za) kladný, tj. osu o orientujeme za nákretnu. Veličinu ε určíme s pomocí rovnic (2.180), tj. $I\varepsilon = M_{o,v}^{\text{ext}}$, kde $M_{o,v}^{\text{ext}} = -RF$. (Pozn.: Vektor $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$ míří před nákretnu, takže jeho průmět do orientované osy je záporný). Tedy:

$$I\varepsilon = -RF \rightarrow \varepsilon = -\frac{RF}{I} \quad (= \text{konst.}; \text{ otáčivý pohyb rovnoměrně zpomalený})$$

2.

$$\omega(t) = ? \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \omega = \varepsilon t + \omega_0; \quad \omega = \omega_0 - \frac{RF}{I}t;$$

3.

$$t_1 = ? \quad \omega(t_1) = 0, \quad \text{tj.} \quad \omega_0 - \frac{RF}{I}t_1 = 0 \rightarrow t_1 = \frac{I\omega_0}{RF}.$$

{pr1.2-37}

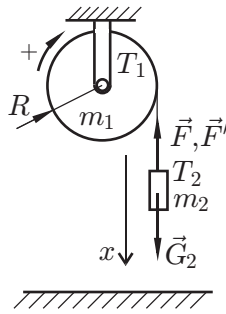
KP 2.10-5 _____

Na plné homogenní kladce T_1 o hmotnosti m_1 , poloměru R a momentu setrvačnosti $I = \frac{1}{2}m_1R^2$ je navinuto vlákno, na jehož konci je připevněno těleso T_2 o hmotnosti m_2 (viz obr. 2.116).

Řešte úkoly:

1. Kladka je zajištěna proti otáčení kolíkem K . Určete tah ve vlákne;
2. Kladka je uvolněna, tření v ložisku je zanedbatelné. Určete

2.10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY ČÁSTIC



Obr. 2.116

{obr1.2-115}

- a) zrychlení tělesa T_2 ,
- b) tah ve vlákně.

Řešení:

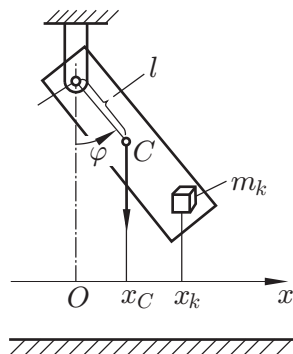
1. $F = ?$ Pohybová rovnice tělesa T_2 zní: $m_2 \vec{a} = \vec{G}_2 + \vec{F}$, kde $\vec{a} = \vec{0}$. Tedy $\vec{F} = -\vec{G}_2$, $F = m_2 g$;
2. $a'_x = ?$ Pohybová rovnice tělesa T_2 : $m_2 \vec{a}' = \vec{G}_2 + \vec{F}' \rightarrow m_2 a'_x = G_2 - F'$. Pohybová rovnice kladky: zvolíme kladný směr otáčení podle obr. 2.116, pak $I \varepsilon = M_{o,v}^{\text{ext}}$, kde $M_{o,v}^{\text{ext}} = +F'R$, $\varepsilon = \frac{a'_x}{R}$. Tedy

$$I \frac{a'_x}{R} = F'R \rightarrow I \frac{a'_x}{R} = (G_2 - m_2 a'_x) R \rightarrow a'_x = G_2 / (I/R^2 + m_2);$$

$$F' = ? \quad F' = G_2 - m_2 a'_x = \dots$$

Doplňkový úkol: Určete sílu, kterou kladka působí na hřídel v případech 1 a 2. (Výsledek: 1) $\vec{F}_v = \vec{g}(m_1 + m_2)$; 2) $\vec{F}_v = \vec{g}m_1 + (-\vec{F}') = \dots$)

{pr1.2-38} **KP 2.10-6**



Obr. 2.117

{obr1.2-116}

Fyzické kyvadlo je libovolné těleso, které se kýve kolem vodorovné osy v homogenním tíhovém poli Země (viz obr. 2.117). Řešte úkoly:



1. Rozhodněte, které veličiny musíme znát, abyste mohli určit zrychlení fyzického kyvadla;

2.10. POHYBOVÉ ROVNICE SOUSTAVY ČÁSTIC

2. Určete úhlové zrychlení fyzického kyvadla naznačeného na obr. 2.117.

Řešení:

Kyvadlo koná otáčivý pohyb (kýve se) kolem osy o . Zvolme kladný smysl otáčení podle obr. 2.117, tím orientujeme osu o před nákresem. Pohybová rovnice kyvadla zní

$$I\varepsilon = M_{o,v}^{\text{ext}},$$

kde $M_{o,v}^{\text{ext}}$ je průmět výsledného (otáčivého) momentu všech tíhových sil působících na elementy kyvadla vzhledem k ose o do této osy (orientované před nákresem). Je obr. 2.117

$$M_{o,v}^{\text{ext}} = -m_1gx_1 - m_2gx_2 - \dots - m_n g_n x_n = -g(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n) = -gmx_C,$$

kde x_C je souřadnice těžiště C . Tedy

$$I\varepsilon = -gmx_C = -gml \cdot \sin \varphi \rightarrow \varepsilon = -gml \cdot \sin \varphi / I.$$

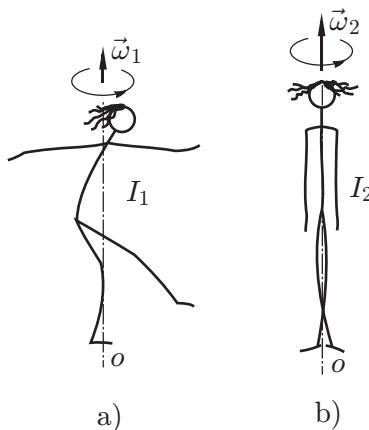
K určení ε musíme znát m, l, I, φ .

{pr1.2-39}

KP 2.10-7

Vysvětlete, jak bruslař, který koná piruetu, využívá při zvyšování a snižování své úhlové rychlosti zákon zachování momentu hybnosti.

Řešení:



Obr. 2.118

{obr1.2-117}

1. fáze pohybu – začátek piruety obr. 2.118a. Bruslař se mírně otáčí kolem osy o jako tuhé těleso. Má přitom roztaženy paže a obvykle i zvednutou nohu. Má velký moment setrvačnosti I_1 a malou úhlovou rychlost $\vec{\omega}_1$. Jeho celkový moment hybnosti vůči ose otáčení o je $\vec{L}_1 = I_1\vec{\omega}_1$.
2. fáze pohybu – roztáčení. Bruslař přitahuje ruce i nohu. Ježto moment vnějších sil je zanedbatelně malý – působí pouze moment sil odporu vzduchu a ledu – je přibližně $\vec{L} = \text{konst.} (= \vec{L}_1)$.
3. fáze pohybu – rychlé otáčení. Bruslař má přitážené ruce i nohu a otáčí se opět jako tuhé těleso. Má malý moment setrvačnosti $I_2 (< I_1)$ a moment hybnosti $\vec{L}_2 = I_2\vec{\omega}_2$, kde $\vec{\omega}_2$ je jeho výsledná úhlová rychlost. Ježto $\vec{L}_2 = \vec{L}_1$, tj. $I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2$, je $|\vec{\omega}_2| > |\vec{\omega}_1|$ – bruslař se otáčí rychle – obr. 2.118b.

Řešte příklady [KP 1.4-3](#), [KP 1.4-4](#), [KP 1.6-1](#), [KP 1.6-2](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#); [KP 2.6-28](#) až [KP 2.6-38](#).

2.11 Příklady k části 1.1

V této části jsou uvedeny další příklady. Jejich řešení vede k neformálnímu porozumění teorie a k pochopení významu obecných výsledků pro rozbor konkrétních dějů. Ježto ve výkladu teorie se zčásti opakují a upřesňují středoškolské poznatky, na něž vysokoškolská látka navazuje, jsou zde uvedena i čísla vhodných příkladů ze skript [Vybrané kapitoly z fyziky](#). Příklady jsou uspořádány po tématech.

2.11.1 Skalární a vektorové veličiny

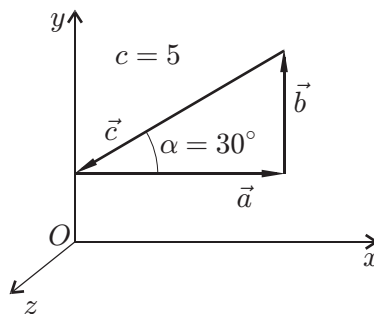
Viz také příklady [KP 1.1-10](#) až [KP 1.1-15](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#);

{pr1.1-7}

KP 1.3-5 _____

Určete následující veličiny a jejich velikosti, definované s užitím obr. 2.119, v němž vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} leží v rovině Oxy . Výsledky vhodnou formou запиšte. Jsou-li určované veličiny vektory, určete i jejich směr a zakreslete je do vhodných náčrtků:

1. a) $\vec{a} + \vec{b}$, b) $\vec{a} - \vec{b}$, c) $\vec{a} + \vec{c}$, d) $\vec{a} - \vec{c}$;
2. a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, b) $\vec{a} \cdot \vec{c}$, c) $\vec{b} \cdot \vec{c}$, d) $\vec{b} \cdot \vec{a}$;
3. a) $\vec{a} \times \vec{b}$, b) $\vec{b} \times \vec{a}$, c) $\vec{b} \times \vec{c}$, d) $\vec{a} \times \vec{c}$;
4. a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, b) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, c) $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}$;
5. a) $a \cos \alpha$, b) $\vec{a} \cos \alpha$, c) bc , d) $b\vec{c}$, e) $b + c$.



Obr. 2.119

{obr1.1-23}

2.11.2 Kinematika

2.11.2.1 Polohový vektor $\vec{r}(t)$. Rychlost $\vec{v}(t)$

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1

{pr1.2-40} **KP 2.2-4** _____

Poloha pohybujícího se bodu P v soustavě $Oxyz$ je dána (v hlavních jednotkách SI) těmito funkcemi času:

$$x(t) = 0,5t + 2, \quad y(t) = \sin 2t, \quad z = t^2 - 1.$$

Řešte úkoly:

1. Uvedené funkce $x(t), y(t), z(t)$ znázorněte (přibližně) graficky v časovém intervalu $\langle -1; 2 \rangle$ s;
 2. určete a v soustavě $Oxyz$ zakreslete polohový vektor bodu P v čase $t = 0$ s;
 3. určete tyto funkce času a) souřadnice rychlosti bodu P , b) složky rychlosti bodu P , c) rychlost \vec{v} v bodu P , její velikost a úhel, který svírá s osou Ox ;
 4. určete hodnoty funkcí, uvedených v předešlém úkolu 3, v čase $t = 0$ s. Vektory zakreslete.
-

2.11.2.2 Zrychlení \vec{a}

{pr1.2-41} **KP 2.2-5** _____

Pro bod P uvedený v předešlém příkladě **KP 2.2-4** určete:

1. Funkce času udávající a) souřadnice zrychlení, b) složky zrychlení, c) zrychlení \vec{a} , jeho velikost a úhel, který svírá s osou Ox ;
 2. Hodnotu funkcí, uvedených v předešlém bodě 1, v čase $t = 0$ s. Vektory zakreslete.
-

2.11.2.3 Rovnoměrný pohyb po křivce

{pr1.2-42} **KP 2.2-6** _____

Kotouč o poloměru $R = 60$ cm, na jehož obvodě bylo připevněno malé těleso (hmotný bod), se začal v čase $t_1 = 0$ s roztáčet z klidu se stálým úhlovým zrychlením $\varepsilon = 0,5$ rad/s². Sestrojte náčrtek a řešte úkoly:

1. Určete, jak závisí na čase a) velikost tečné složky zrychlení, b) velikost normálové složky zrychlení, c) zrychlení \vec{a} , d) velikost zrychlení $|\vec{a}|$ hmotného bodu;
 2. Určete a) polohu, b) rychlost \vec{v}_2 , c) zrychlení \vec{a}_2 hmotného bodu v čase $t_2 = 2$ s. Zakreslete.
-

{pr1.2-43} **KP 2.2-7** _____

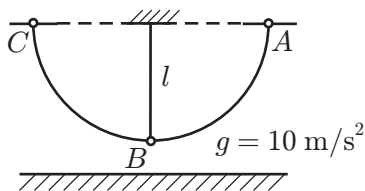
Kotouč o poloměru $R = 0,5$ m rotující s periodou $T = 2$ s se začal v čase $t_1 = 0$ s pohybovat rovnoměrně zpomalně tak, že se zastavil v čase $t_2 = 4$ s. Na jeho obvodě bylo připevněno malé těleso (hmotný bod). Sestrojte náčrtek. Určete, jak závisí na čase:

1. Úhlové zrychlení kotouče;
 2. Úhlová rychlost;
 3. Úhlová dráha;
 4. Dráhová rychlost;
 5. Zrychlení \vec{a} hmotného bodu.
 6. Určete počet otoček, které kotouč vykonal během zastavování.
-

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1

{pr1.2-44} **KP 2.2-8** —————

Malé těleso (hmotný bod) zavěšené na vlákne mající délku $l = 1,25$ m a zanedbatelnou hmotnost



{obr1.2-118}

Obr. 2.120

(tj. matematické kyvadlo) bylo vychýleno z rovnovážné polohy do bodu A obr. 2.120 a puštěno s nulovou počáteční rychlostí. Odpor vzduchu byl zanedbatelně malý, takže bodem B prošlo rychlostí o velikosti $v = \sqrt{2gl} = \dots = 5$ m/s, vystoupilo do bodu C atd. Určete jeho zrychlení $\vec{a}_A, \vec{a}_B, \vec{a}_C$ v bodech A, B, C. Zakreslete.

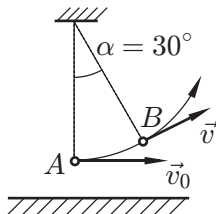
2.11.3 Pohybové zákony klasické fyziky

2.11.3.1 I., II. a III. pohybový zákon

Viz také příklady KP 1.3-1 až KP 1.3-23 v textu Vybrané kapitoly z fyziky.

{pr1.2-45} **KP 2.4-4** —————

Malé těleso (hmotný bod) o hmotnosti $m = 0,06$ kg viselo na vlákne, jež mělo délku $l = 0,8$ m




{obr1.2-119}

Obr. 2.121

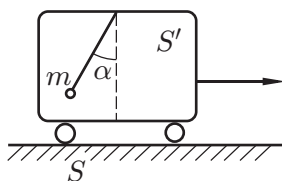
a zanedbatelnou hmotnost (matematické kyvadlo). V poloze A obr. 2.121 mu byla udělena jistá rychlost, takže se začalo pohybovat po kružnici (kyvadlo vykývlo). V poloze B, v níž bylo $\alpha = 30^\circ$, bylo vlákno napínáno silou o velikosti $T = 0,7$ N. Odpor vzduchu byl zanedbatelný. Pro polohu B určete:

1. Směr a velikost tečné složky zrychlení \vec{a}_t tělesa. Zakreslete;
2. Směr a velikost normálové složky zrychlení \vec{a}_n . Zakreslete;
3. Velikost a směr zrychlení \vec{a} . Zakreslete;
4. Velikost rychlosti \vec{v} .

{pr1.2-46} **KP 2.4-5** —————

Ve vozíku taženém se stálým zrychlením \vec{a} o velikosti $a = 2$ m/s² podle obr. 2.122 visí na vlákne o zanedbatelné hmotnosti malé těleso (hmotný bod) o hmotnosti 20 g v poloze naznačené na obr. 2.122 a je vzhledem k vozíku v klidu. Následující úlohy řešte a) v laboratorní soustavě S, b) v soustavě S' spojené s vozíkem. Úkoly:  ?

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1



Obr. 2.122

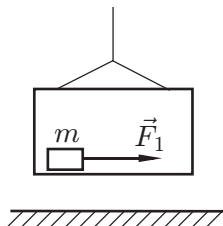
{obr1.2-120}

1. Vyjmenujte a do dvou náčrtků zakreslete přibližně všechny síly, které působí na hmotný bod;
2. Určete zrychlení hmotného bodu;
3. Určete všechny síly působící na hmotný bod.

{pr1.2-47}

KP 2.4-6

Na podlaze kabiny zdviže byla tažena stálou silou \vec{F}_1 bedna o hmotnosti $m = 40 \text{ kg}$ podle



Obr. 2.123

{obr1.2-121}

obr. 2.123 a pohybovala se přitom vzhledem ke kabině rovnoměrně. Součinitel dynamického tření byl $f_d = 0,1$. Kabina se přitom:

- I) pohybovala rovnoměrně směrem dolů,
- II) pohybovala se směrem nahoru,
- III) rozjížděla se zrychlením o velikosti $a = 2 \text{ m/s}^2$ a) směrem dolů, b) směrem nahoru.

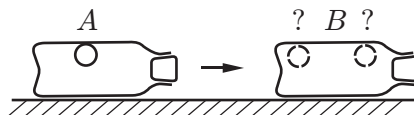
Určete:

1. Svislou složku síly, kterou působila bedna na podlahu;
2. Sílu \vec{F}_1 .

{pr1.2-48}

KP 2.4-7

V láhvi naplněné vodou byl pingpongový míček (viz obr. 2.124). Láhev byla zpočátku v klidu



Obr. 2.124

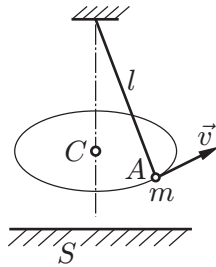
{obr1.2-122}

v poloze A, poté byla rychle přesunuta do polohy B a ponechána v klidu. Vyšetřete pohyb míčku vzhledem k láhvi při přesunu.

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1

{pr1.2-49} **KP 2.4-8** _____

Malé těleso (hmotný bod) o hmotnosti $m = 80 \text{ g}$ se pohybovalo na vlákně délky $l = 60 \text{ cm}$,



{obr1.2-123}

Obr. 2.125

jež mělo zanedbatelnou hmotnost, po kružnici o poloměru $r = 30 \text{ cm}$ podle obr. 2.125. Odpor vzduchu byl zanedbatelný. Vyšetřujte pohyb v laboratorní soustavě S a řešte úkoly:



1. Vyjmenujte a přibližně zakreslete všechny síly, které na hmotný bod při pohybu působí;
2. Určete tečnou složku výsledné síly působící na hmotný bod;
3. Rozhodněte a zdůvodněte: pohyb hmotného bodu po kružnici je/není rovnoměrný;
4. Určete výslednici sil působících na hmotný bod;
5. Určete zrychlení hmotného bodu;
6. Určete velikost rychlosti hmotného bodu. Vektory zakreslete.

2.11.4 Časový a dráhový účinek síly

2.11.4.1 Hybnost, impuls síly

Viz také příklady **KP 1.4-1** až **KP 1.4-12** v textu **Vybrané kapitoly z fyziky**.

{pr1.2-50} **KP 2.4-9** _____

Raketa o hmotnosti $m = 500 \text{ kg}$ se pohybovala v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, $t_2 = t_1 + 10 \text{ s}$, v geocentrické soustavě po přímce rovnoměrně zrychleně účinkem tažné síly motorů, jež měla velikost $F_1 = 2000 \text{ N}$. Odpor prostředí byl zanedbatelně malý. V čase t_1 měla její rychlost velikost $v_1 = 50 \text{ m/s}$. Sestrojte náčrtek a určete:

1. Hybnost rakety v čase t_1 . Zakreslete;
2. Impuls síly \vec{F}_1 v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Zakreslete;
3. Rychlost rakety v čase t_2 . Zakreslete.

{pr1.2-51} **KP 2.4-10** _____

Pravouhlejším kolenem potrubí o průřezu $S = 10 \text{ cm}^2$ proudí voda rychlostí $v = 5 \text{ m/s}$. Nakreslete náčrtek a určete:

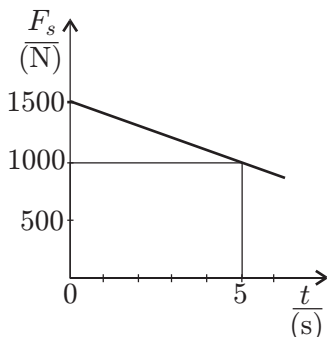
1. Hybnost vody, která do kolena vstoupí za dobu $\Delta t = 0,001 \text{ s}$;
2. Hybnost vody, která z kolena vystoupí za tutéž dobu Δt ;

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1

3. Změnu hybnosti vody v koleně za dobu Δt ;
4. Impuls síly, kterou působí koleno na vodu, v době Δt ;
5. Sílu, kterou působí voda na koleno. Zakreslete.

{pr1.2-52} **KP 2.4-11** _____

Řidič automobilu, jehož hmotnost byla $m = 500$ kg, jedoucí přímočaře nejprve rychlostí $v_1 =$



{obr1.2-124}

Obr. 2.126

10 m/s, přidával v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, kde $t_1 = 0$ s, $t_2 = 5$ s, plyn tak, že průmět výsledné síly do směru pohybu měl průběh znázorněný na obr. 2.126. Nakreslete náčrtek a určete:

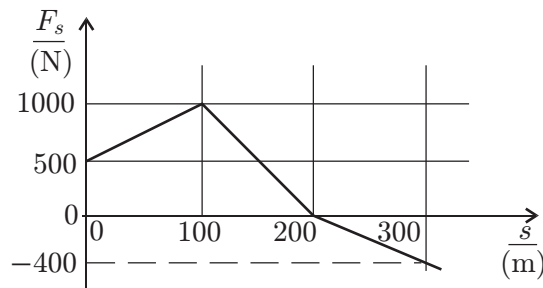
1. Impuls síly \vec{F} v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Zakreslete;
2. Hybnost automobilu v čase t_1 a v čase t_2 . Zakreslete;
3. Rychlost automobilu v čase t_2 .

2.11.4.2 Práce, kinetická energie, výkon

Viz také příklady [KP 1.4-13](#) až [KP 1.4-16](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#).

{pr1.2-53} **KP 2.4-12** _____

Průmět výsledné síly \vec{F} působící na automobil o hmotnosti $m = 800$ kg do trajektorie orien-



{obr1.2-125}

Obr. 2.127

tované ve směru pohybu měl na úseku $s_1 = 0$ m, $s_2 = 300$ m průběh znázorněný na obr. 2.127. Původní rychlost automobilu byla $v_1 = 20$ m/s. Sestrojte náčrtek a naznačte v něm směr tečné složky síly \vec{F} na jednotlivých úsecích trajektorie. Určete:

1. Práci síly \vec{F} na úseku $\langle s_1, s_2 \rangle$;

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1

2. Konečnou kinetickou energii automobilu;
3. Konečnou rychlost automobilu.

{pr1.2-54}

KP 2.4-13

Těleso o hmotnosti $m = 0,2$ kg bylo vrženo na střeše domu ve výšce $h = 15$ m šikmo vzhůru rychlostí $v_1 = 10$ m/s a dopadlo na vodorovný povrch Země rychlostí $v_2 = 15$ m/s. Nakreslete náčrtek a určete:

1. Změnu jeho kinetické energie;
2. Práci, kterou na trajektorii vykonala a) výslednice sil \vec{F}_v , působících na těleso, b) tíhová síla \vec{G} , c) síla odporu vzduchu \vec{F}_o ;
3. Rychlost, se kterou by těleso dopadlo, kdyby odpor vzduchu byl zanedbatelně malý.

{pr1.2-55}

KP 2.4-14

Bedna o hmotnosti $m = 20$ kg, která byla zpočátku v klidu, se volně sesunula po drsné nakloněné rovině, která svírala s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 30^\circ$. Trajektorie měla délku $l = 5$ m, součinitel smykového tření byl $f_d = 0,1$. Nakreslete náčrtek a určete:

1. Normálovou a tečnou složku síly, kterou na bednu působí nakloněná rovina. Uveďte působíště této síly, zakreslete ji a označte;
2. Práci, kterou na trajektorii vykonala a) tíhová síla, b) síla tření, c) výslednice sil;
3. Výslednou kinetickou energii bedny.

{pr1.2-56}

KP 2.4-15

Automobil o hmotnosti $m = 800$ kg se v čase $t = 0$ s začal rozjíždět na vodorovné vozovce z klidu se stálým zrychlením $a = 1,5$ m/s². Předpokládejte, že síly tření a odporu byly zanedbatelně malé. Určete výkon, se kterým pracoval motor v čase a) $t_1 = 10$ s, b) $t_2 = 20$ s. Znázorněte závislost výkonu motoru na čase graficky.

2.11.5 Gravitační pole

2.11.5.1 (Gravitační síla, gravitační energie)

Viz také příklad [KP 1.5-2](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#).

{pr1.2-57}

KP 2.6-4

S užitím vztahu (2.88) dokažte, že na těleso o hmotnosti m , které je ve vzdálenosti r od středu Země, působí gravitační síla o velikosti $F_g = gR_Z^2 m/r^2$ a že gravitační energie je $E_g = -gR_Z^2 m/r$.

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1

{pr1.2-58} **KP 2.6-5** _____

Volně se pohybující kosmická orbitální stanice o hmotnosti $m = 4\,000$ kg je v jistém okamžiku ve vzdálenosti $r = 10^4$ km od středu Země. Nakreslete náčrtek a určete:

1. Gravitační sílu, která na ni působí;
2. Její zrychlení (v geocentrické soustavě);
3. Gravitační sílu, kterou působí družice na Zemi;
4. Zrychlení, které by Země získala účinkem této gravitační síly;
5. Práci, kterou by vykonala síla gravitačního pole Země, kdyby a) stanice unikla do nekonečna, b) se stanice vrátila na Zemi.

Pozn.: Užijte případně výsledků předešlého příkladu **KP 2.6-4**.

{pr1.2-59} **KP 2.6-6** _____

Uvažujte o soustavě Země - Měsíc a s užitím tabulkových hodnot určete:

1. Sílu, kterou je přitahován Měsíc k Zemi;
2. Zrychlení Měsíce (v geocentrické soustavě GS);
3. Rychlost Měsíce za předpokladu, že se pohybuje v GS po kružnici;
4. Intenzitu gravitačního pole Země v oblasti Měsíce;
5. Intenzitu gravitačního pole soustavy Země - Měsíc v bodě A , jenž je středem úsečky spojující středy Země a Měsíce;
6. Gravitační potenciál pole soustavy Země - Měsíc v bodě A ;
7. Gravitační energii kosmické sondy o hmotnosti $m = 200$ kg v bodě A .

Pozn.: Země a Měsíc se ve skutečnosti pohybují (rotují) kolem společného hmotného středu.

{pr1.2-60} **KP 2.6-7** _____

Určete sílu, kterou by působilo na povrchu Měsíce jeho gravitační pole na člověka o hmotnosti $m = 80$ kg. Určete, jakou výšku by přibližně zdolal v klimatizované hale na Měsíci skokan, který na Zemi skočí do výšky 200 cm. Předpokládejte přitom, že Měsíc má hmotnost 81krát menší než Země a že jeho poloměr je $3/11$ středního poloměru Země.

{pr1.2-61} **KP 2.6-8** _____

Dva kosmonauti, každý o hmotnosti 70 kg, se volně vznášejí v kosmickém prostoru. V okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleni o 4 m, pohybují se v geocentrické soustavě stejnými rychlostmi. Určete:

1. Gravitační síly, kterými na sebe působí;
2. Jejich relativní zrychlení;
3. Změnu jejich vzdálenosti během jednoho dne.

{pr1.2-62} **KP 2.6-9** _____

Určete práci, kterou vykoná síla, kterou působí gravitační pole Země na družici o hmotnosti 2 000 kg vracející se k Zemi na úseku mezi body P_1 , P_2 , z nichž první je ve výši 8 000 km a druhý ve výši 1 000 km nad povrchem Země.

2.11.6 Mechanická energie. Pohyb hmotného bodu v gravitačním poli

2.11.6.1 (E_m v tíhovém a gravitačním poli Země)

Viz také příklady [KP 1.4-8](#) až [KP 1.4-18](#) a [KP 1.4-11](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#).

{pr1.2-63} **KP 2.6-10** _____

Kosmická sonda o hmotnosti $m = 1\,000$ kg se pohybovala se spuštěnými motory v oblasti Země tak, že v bodě P_1 ve výši 100 km nad povrchem Země měla rychlost 2 km/s a v bodě P_2 ve výšce 1 000 km rychlost 3 km/s. Považujte hmotnost sondy za konstantní a určete:

1. Energii sondy v bodě P_1 .
 2. Práci, kterou na úseku P_1P_2 vykonala gravitační síla.
-

{pr1.2-64} **KP 2.6-11** _____

Družice Země o hmotnosti 8 000 kg se pohybovala s vyřazenými motory. V bodě P_1 ve vzdálenosti 15 000 km od středu Země měla rychlost 1 km/s. Určete:

1. Mechanickou energii družice v bodě P_1 ;
 2. Rychlost družice ve vzdálenosti 10 000 km od středu Země.
-

{pr1.2-65} **KP 2.6-12** _____

Těleso o hmotnosti $m = 20$ kg padá volně k Zemi s nulovou počáteční rychlostí 1) z výšky 1 000 km, 2) z nekonečna. Zanedbejte odpor vzduchu a určete jeho: a) mechanickou energii, b) kinetickou energii, c) rychlost; vše při dopadu na povrch Země.

{pr1.2-66} **KP 2.6-13** _____

Těleso je na povrchu Země vrženo svisle vzhůru rychlostí 4 km/s. Zanedbejte odpor vzduchu a určete:

1. Rychlost, kterou bude mít ve výšce 500 km;
 2. Maximální vzdálenost od povrchu Země.
-

2.11.6.2 (Vlastnosti trajektorií v centrálním gravitačním poli)

Viz také příklady [KP 1.5-1](#), [KP 1.5-3](#) v textu [Vybrané kapitoly z fyziky](#).

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1

{pr1.2-67} **KP 2.6-14** _____

Dokažte tato tvrzení o pohybu družice Země po kruhových trajektoriích:

1. Rychlost v družice závisí na poloměru r trajektorie podle vztahu $v = C_1/\sqrt{r}$, kde $C_1 = R_Z\sqrt{g}$;
2. Oběžná doba T družice závisí na poloměru r trajektorie podle vztahu $T = C_2 \cdot \sqrt{r^3}$, kde $C_2 = 2\pi/(R_Z\sqrt{g})$.

{pr1.2-68} **KP 2.6-15** _____

S užitím výsledku předešlého příkladu **KP 2.6-14** určete:

1. a) První kosmickou rychlost, b) příslušnou dobu oběhu;
2. a) Poloměr trajektorie stacionární družice Země, b) její oběžnou rychlost.

Pozn.: Stacionární družice se pohybuje po kružnici v rovině rovníku s oběžnou dobou $T = 23$ h 56 min.

{pr1.2-69} **KP 2.6-16** _____

Družice Země o hmotnosti $m = 200$ kg se pohybuje po kruhové trajektorii s oběžnou dobou $T = 2$ h. Určete:

1. Výšku družice nad povrchem Země;
2. Rychlost družice;
3. Zrychlení družice;
4. Mechanickou energii družice.

Vektorové veličiny zakreslete do náčrtku.

{pr1.2-70} **KP 2.6-17** _____

Kosmická sonda, která nebyla opatřena motory, se ve výšce 100 km nad povrchem Země vzdalovala rychlostí 6 km/s. Rozhodněte, zda se vzdálí do nekonečna nebo zda je její pohyb finitní.

{pr1.2-71} **KP 2.6-18** _____

Těleso o hmotnosti $m = 100$ kg a) je v klidu na povrchu Země, b) pohybuje se jako stacionární družice Země. Určete maximální energii, kterou je mu nutno dodat, aby se vzdálilo do nekonečna. Odpor vzduchu zanedbejte. Pozn.: Užijte výsledku příkladu **KP 2.6-15**.

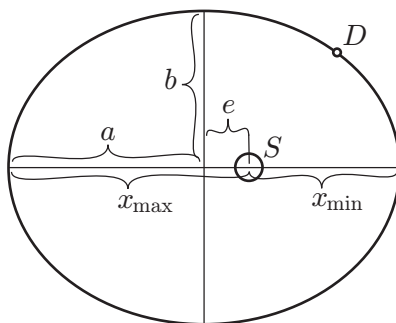
{pr1.2-72} **KP 2.6-19** _____

Určete první a druhou kosmickou rychlost Měsíce.

{pr1.2-73} **KP 2.6-20** _____

Ruská kosmická raketa, vypuštěna r. 1959, se stala družicí Slunce a pohybuje se tak, že její nejmenší vzdálenosti od Slunce je $1,46 \cdot 10^8$ km a největší vzdálenost $1,97 \cdot 10^8$ km (obr. 2.128). Určete:

1. Tvar a rozměry trajektorie této umělé družice;
2. Oběžnou dobu (srovnáním s pohybem Země - Keplerův zákon).



Obr. 2.128

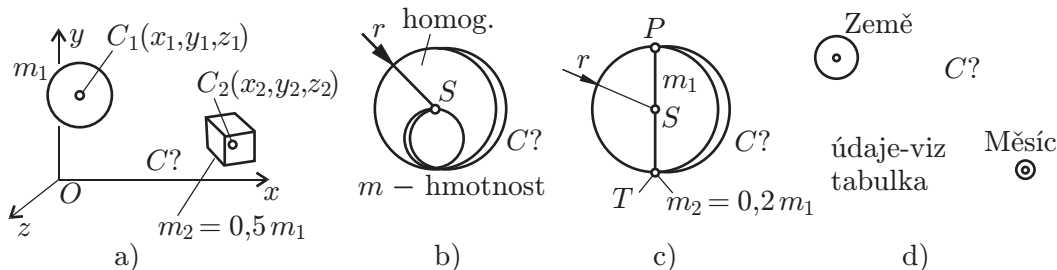
{obr1.2-126}

2.11.7 Energie hmotných soustav

2.11.7.1 (Hmotný střed)

KP 2.6-21

Určete polohu hmotného středu C soustav znázorněných v obr. 2.129. Desky jsou homogenní.



Obr. 2.129

{obr1.2-127}

Zakreslete C do náčrtků.

2.11.7.2 (Energie obecné soustavy)

Viz také příklady KP 1.4-9, KP 1.4-22, KP 1.4-23 v textu *Vybrané kapitoly z fyziky*.

KP 2.6-22

Na svisle visící pružině o zanedbatelné hmotnosti a o tuhosti $k = 100 \text{ N/m}$ bylo zavěšeno těleso o hmotnosti $m = 0,5 \text{ kg}$ a bylo puštěno s nulovou počáteční rychlostí, takže začalo kmitat. Po chvíli se vlivem odporu vzduchu ustálilo v rovnovážné poloze a zůstalo v klidu. Určete:

1. Rovnovážnou polohu;
2. Přibližnou rychlost, se kterou těleso procházelo poprvé rovnovážnou polohou;
3. Ztátu mechanické energie soustavy „pružina - těleso“ celého děje.

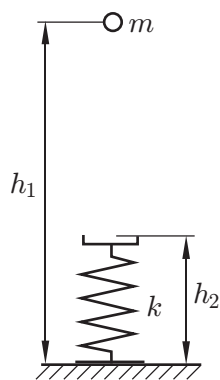
KP 2.6-23

Těleso T o hmotnosti $m = 0,60 \text{ kg}$, které je ve výšce $h_1 = 0,65 \text{ m}$ nad deskou stolu, dopadne na misku pérových vah, která je ve výšce $h_2 = 0,25 \text{ m}$ nad deskou stolu (viz obr. 2.130) a jejichž pružina má tuhost $k = 2 \cdot 10^3 \text{ N/m}$. Pokládejte hmotnosti misky a pružiny za zanedbatelně malé, zanedbejte ztrátu mechanické energie při nárazu a určete:

{pr1.2-76}

{pr1.2-75}

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1



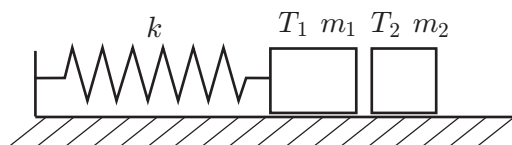
Obr. 2.130

{obr1.2-128}

1. a) tíhovou, b) kinetickou, c) elastickou, d) celkovou energii soustavy „těleso - váhy“ těsně před dopadem tělesa na misku;
2. Tytéž energie v okamžiku, kdy je pružina stlačena o $x = 40$ mm.

{pr1.2-77} **KP 2.6-24** _____

Na pružině o tuhosti $k = 120$ N/m je připevněno těleso T_1 o hmotnosti $m_1 = 1,5$ kg. K němu



Obr. 2.131

{obr1.2-129}

přiléhá volně těleso T_2 o hmotnosti $m_2 = 1,0$ kg podle obr. 2.131. Silou působící na T_2 zprava se tělesa posunou doleva a pružina se stlačí o $d = 80$ mm. Poté přestane vnější síla působit a tělesa se začnou z klidu účinkem síly pružiny pohybovat doprava. Zanedbejte hmotnost pružiny, podložku považujte za dokonale hladkou. Popište pohyb a určete:

1. energii stlačené pružiny;
2. Zrychlení těles na začátku pohybu;
3. Sílu, kterou na začátku pohybu bude působit T_2 na T_1 . Zakreslete;
4. Výslednou rychlost tělesa T_2 ;
5. Amplitudu, se kterou bude T_1 kmitat nakonec na pružině.

2.11.7.3 (ENERGIE TUHÉHO TĚLESA)

{pr1.2-78} **KP 2.6-25** _____

Pro každou z kruhových desek znázorněných v obr. 2.129b,c, určete pro hodnoty $r = 20$ cm, $m = 4$ kg, $m_1 = 1$ kg:

1. Moment setrvačnosti vzhledem k přímce p jdoucí středem S desky kolmo k rovině desky;

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1

2. Kinetickou energii, jestliže deska rotuje kolem přímky p s úhlovou rychlostí $\omega = 3 \text{ s}^{-1}$.

{pr1.2-79} **KP 2.6-26** _____

Homogenní kruhová deska o hmotnosti $m_1 = 6 \text{ kg}$ a o poloměru $r = 40 \text{ cm}$ znázorněná na obr. 2.129c (bez přidavného tělíska T) se může otáčet v homogenním poli Země kolem přímky q jdoucí bodem P kolmo na rovinu desky. Desku vychýlíme z dolní rovnovážné polohy o 90° a pustíme s nulovou počáteční rychlostí, takže se deska začne kývat. Zanedbejte síly odporu a určete:

1. Moment setrvačnosti desky vzhledem k přímce q ;
2. Rozdíl tíhových energií desky v horní poloze a v rovnovážné poloze.

{pr1.2-80} **KP 2.6-27** _____

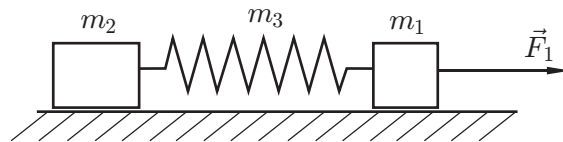
Určete kinetickou energii soustavy sestávající z kladky T_1 a tělesa T_2 znázorněné na obr. 2.116 v okamžiku, kdy těleso má rychlost v .

2.11.8 Pohybová rovnice soustavy částic

2.11.8.1 První pohybová rovnice, první impulsová věta

{pr1.2-81} **KP 2.6-28** _____

Dvě tělesa o hmotnosti $m_1 = 1,5 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, spojená pružinou o hmotnosti $m_3 = 0,5 \text{ kg}$,



Obr. 2.132

leží zpočátku v klidu na dokonale hladké vodorovné rovině. V určitém okamžiku začne na první těleso působit stálá síla o velikosti $F_1 = 10 \text{ N}$ podle obr. 2.132, takže soustava se dá do pohybu. Pružina se přitom protahuje a zkracuje, takže pohyb tělesa není pravidelný. Rozhodněte, jak se přitom pohybuje těžiště soustavy.

{pr1.2-82} **KP 2.6-29** _____

Člověk o hmotnosti $m_1 = 100 \text{ kg}$ stál na zádi pramice, jež měla hmotnost $m_2 = 200 \text{ kg}$ a délku $l = 4,8 \text{ m}$ (viz obr. 2.98a). Pramice byla v klidu na klidné vodě. Poté člověk přešel před pramice a zastavil se tam. Předpokládejte, že odpor vody byl zanedbatelně malý. Popište pohyb soustavy a určete:

1. Počáteční polohu těžiště soustavy „člověk - pramice“;
2. Pohybový stav soustavy na konci děje. Zdůvodněte;
3. Změnu polohy pramice;
4. Pohybový stav soustavy za předpokladu, že odpor vody nebyl zanedbatelný. Zdůvodněte.

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1

{pr1.2-83} **KP 2.6-30** _____

Do bedny s pískem o hmotnosti $m_1 = 4$ kg visící v klidu na závěsu délky $l = 2$ m byl ve vodorovném směru vstřelen projektil o hmotnosti $m_2 = 20$ g rychlostí $v = 250$ m/s a uvízl v ní. Popište děj a určete:

1. Hybnost soustavy „bedna + projektil“ před nárazem a těsně po něm;
2. Kinetickou energii soustavy před nárazem a těsně po něm. Vysvětlete výsledek;
3. Výšku, do které bedna při výkyvu vystoupí;
4. Maximální úhlovou výchylku závěsu.

Poznámka: Toto zařízení, dříve užívané k měření rychlosti střel, se nazývá balistické kyvadlo. Vysvětlete jeho užití.

2.11.8.2 Druhá pohybová rovnice, druhá impulsová věta

{pr1.2-84} **KP 2.6-31** _____

Na obvodě plného homogenního kotouče o hmotnosti $m_1 = 10$ kg a o poloměru $r = 50$ cm, který se otáčel kolem osy souměrnosti s úhlovou rychlostí $\omega_1 = 5$ s⁻¹, začala v čase $t_1 = 0$ s působit stálá tečná síla \vec{F}_1 o velikost $F = 20$ N ve směru otáčení a působila po dobu $\tau = 10$ s. Síly odporu a tření byly zanedbatelné. Určete:

1. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose o ;
2. Moment síly \vec{F} vzhledem k ose o . Zakreslete;
3. Úhlové zrychlení kotouče;
4. Úhlovou rychlost kotouče v čase t_2 .

{pr1.2-85} **KP 2.6-32** _____

Pro děj popsáný v příkladu **KP 2.6-31** určete:

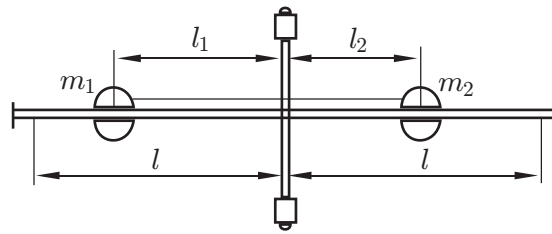
1. Moment hybnosti kotouče v čase t_1 . Zakreslete;
2. Impuls momentu síly \vec{F}_1 v časovém intervalu $\langle t_1, t_1 + \tau \rangle$. Zakreslete;
3. Moment hybnosti kotouče v čase $t_2 = \tau$. Zakreslete;
4. Úhlovou rychlost kotouče v čase t_2 .

{pr1.2-86} **KP 2.6-33** _____

Pro děj popsáný v příkladu **KP 2.6-26** určete:

1. Výsledný moment vnějších sil vzhledem k ose q na začátku pohybu desky. Zakreslete do náčrtku;
2. Úhlové zrychlení desky na začátku pohybu;
3. Moment hybnosti desky vzhledem ke q v nejnižší poloze desky. Zakreslete.

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1



Obr. 2.133

{obr1.2-131}

{pr1.2-87} **KP 2.6-34** —————

Na tuhé vodorovné tyči o zanedbatelné hmotnosti jsou navlečeny dvě malé koule o hmotnostech $m_1 = 0,1 \text{ kg}$, $m_2 = 0,15 \text{ kg}$ a připoutány vlákna délek $l_1 = 40 \text{ cm}$, $l_2 = 30 \text{ cm}$ k ose o podle obr. 2.133. Tyč se otáčí kolem osy o stálou úhlovou rychlostí $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$ (tření v ložiscích je zanedbatelné). Poté vlákna postupně přepálíme, koule se přesunou ke koncům tyče, kde jsou zarážky, takže koule jsou ve vzdálenosti $l = 60 \text{ cm}$ od osy o . Považujte koule za hmotné body, určete:

1. Výslednou úhlovou rychlost tyče;
2. Kinetickou energii soustavy na začátku a na konci otáčení. Vysvětlete.

{pr1.2-88} **KP 2.6-35** —————

Krasobruslař znázorněný v obr. 2.118 se na začátku piruety (stav(1)) otáčel s periodou $T_1 = 1 \text{ s}$ a měl moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení $I_1 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Při maximálních otáčkách v piruetě (stav(2)) se otáčel s periodou $T_2 = 0,5 \text{ s}$. Určete:

1. Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení ve stavu (2);
2. Kinetickou energii a) ve stavu (1), b) ve stavu (2);
3. Práci, kterou vykonal při přitahování paží a nohou v piruetě.

{pr1.2-89} **KP 2.6-36** —————

Dvě malé koule K_1 , K_2 (hmotné body) o hmotnostech $m_1 = 0,2 \text{ kg}$, $m_2 = 0,6 \text{ kg}$ jsou upevněny na koncích tenké tuhé tyče délky $l = 1,2 \text{ m}$ o zanedbatelné hmotnosti. Tyč rotuje s periodou $T = 0,5 \text{ s}$ kolem osy o jdoucí těžištěm soustavy kolmo na tyč. Určete:

1. Polohu těžiště soustavy;
2. Moment setrvačnosti soustavy vzhledem k ose o ;
3. Kinetickou energii soustavy;
4. Hybnost \vec{P} soustavy;
5. Sílu, kterou působí osa o na tyč (tíhové síly neuvažujte);
6. Výslednici sil, kterými působí osa na ložiska;
7. Moment hybnosti soustavy vzhledem k ose otáčení.

2.11. PŘÍKLADY K ČÁSTI 1.1

{pr1.2-90} **KP 2.6-37** _____

Tenká tuhá tyč délky $l = 1$ m o zanedbatelné hmotnosti, na jejíž koncích jsou připevněny kuličky (hmotné body) o hmotnostech $m_1 = 0,2$ kg, $m_2 = 0,3$ kg, se může otáčet kolem vodorovné osy o jdoucí jejím středem kolmo na tyč v tíhovém poli Země. Tyč držíme nejprve v klidu ve vodorovné poloze a poté uvolníme, takže se začne otáčet kolem osy o . Zanedbejte síly odporu a určete:

1. Moment setrvačnosti soustavy vzhledem k ose o ;
2. Polohu těžiště;
3. Úhlové zrychlení tyče v okamžiku a) počátečním, b) kdy tyč svírá se svislou přímkou úhel $\alpha = 60^\circ$;
4. a) Kinetickou energii; b) úhlovou rychlost tyče při průchodu rovnovážnou polohou.

{pr1.2-91} **KP 2.6-38** _____

Tenkostěnná trubka o poloměru $r = 5$ cm a o hmotnosti $m = 3$ kg se v okamžiku $t_1 = 0$ s začne valit z klidu po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 30^\circ$. V čase t_2 byla dráha, kterou trubka urazila, $l = 2$ m. Určete:

1. V jakém poměru se rozdělí kinetická energie trubky na energii postupného pohybu a na energii rotačního pohybu;
2. Práci, kterou vykonala na uvedeném úseku tíhová síla působící na trubku;
3. Kinetickou energii trubky v čase t_2 ;
4. Rychlost těžiště trubky v čase t_2 .

Řešte uvedené úkoly pro plný válec o stejných parametrech.

3. Speciální teorie relativity

{STR}



3.1 Relativistická kinematika

{Kinematika}

V této části se uvažuje o vztazích mezi fyzikálními pojmy, veličinami a zákony vyjádřenými v různých inerciálních vztažných soustavách. Relativnost kinematických veličin v klasické fyzice je vyjádřena v tzv. Galileově transformaci. Galileův princip relativity vyslovuje tvrzení o relativnosti mechanických dějů. Einstein provedl jeho zobecnění na děje elektromagnetické a na všechny fyzikální děje ve speciální teorii relativity. Jejím základem jsou dva postuláty speciální teorie relativity. Vztahy mezi kinematickými veličinami ve speciální teorii relativity jsou vyjádřeny Lorentzovou transformací. Z postulátů speciální teorie relativity (nebo z Lorentzovy transformace) vyplývají teoreticky zajímavé důsledky: relativnost současnosti, relativistické skládání rychlostí, dilatace času, kontrakce délek. Všechny tyto jevy se uplatňují pouze při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla.

Cíl: I) Zpaměti základní zákony a vztahy zvýrazněné v rámečcích, vysvětlit pojmy, veličiny a výsledky zvýrazněné v tomto textu;

II) Vyslovit, vyložit, zdůvodnit a na příkladech ilustrovat Galileův princip relativity. Napsat Galileovu transformaci a vyvodit z ní důsledky pro rychlost a zrychlení;

III) Vysvětlit klasické představy o šíření světla, vysvětlit cíl měření Michelsona a Morleye a jeho výsledek. Vyslovit a objasnit postuláty speciální teorie relativity;

IV) Lorentzovu transformaci a srovnat ji s Galileiho transformací. Vysvětlit rozdílné postavení času a prostoru v klasické fyzice a ve speciální teorii relativity;

V) Na základě postulátů speciální teorie relativity nebo na základě Lorentzovy transformace vysvětlit: relativnost současnosti, dilataci času a kontrakci délek. Na základě Lorentzovy transformace naznačit postup při odvození relativistického vztahu pro skládání rychlostí;

VI) Uvést některá experimentální ověření výsledků speciální teorie relativity.

3.1.1 Speciální teorie relativity

Speciální teorie relativity, jejímž základem je práce [11] A. Einsteina z r. 1905, je dnes již klasická a experimentálně dobře ověřená část fyziky, která pojednává o obecných zákonitostech, jimiž se řídí všechny fyzikální děje, jestliže je zkoumáme a matematicky popisujeme v inerciálních (navzájem libovolně rychle se pohybujících) vztažných soustavách. Takto formulovaný obsah speciální teorie relativity nepřináší zdánlivě mnoho nového ve srovnání s klasickou Newtonovou (předrelativistickou) mechanikou a fyzikou. Víme ovšem, že úvahy Alberta Einsteina, tvůrce speciální teorie relativity, vedly k dalekosáhlým důsledkům a k velmi podstatným změnám v názorech na čas, prostor i pohyb.

Kromě speciální teorie relativity vypracoval Einstein a po něm řada dalších fyziků zobecněnou teorii, která se zabývala studiem fyzikálních jevů v gravitačních polích s užitím libovolných

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

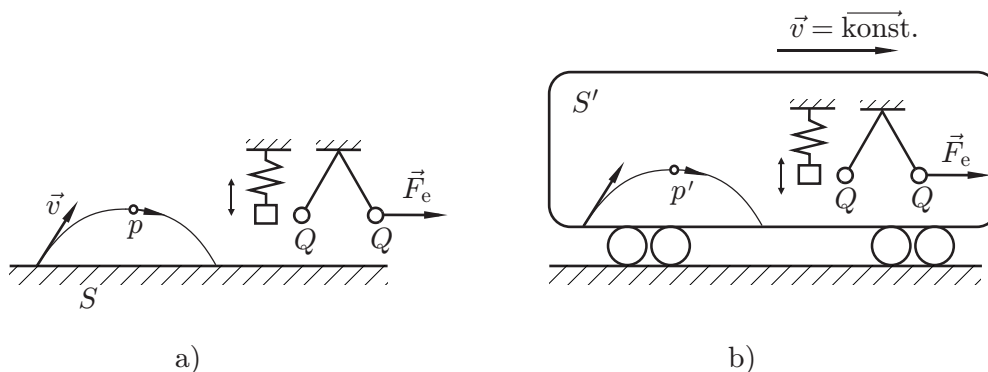
vztažných soustav, tj. i soustav zrychlených, rotujících atd. Tato teorie, která vznikla v r. 1915, se nazývá „Obecná teorie relativity“. Je pojmově i matematicky velmi náročná. Zde se budeme zabývat pouze speciální teorie relativity.

Z důvodů konvence budeme označovat předrelativistickou fyziku názvem „klasická fyzika“.

Einsteinova speciální teorie relativity spočívá v podstatě na zobecnění (v klasické fyzice známého) Galileiho (neboli mechanického) principu relativity (viz ods. 2.4.6), a to jeho zobecněním z dějů mechanických na všechny fyzikální děje, zejména na děje elektromagnetické. Einsteinova základní práce o speciální teorii relativity, publikovaná v r. 1905, se nazývá „Elektrodynamika pohybujících se prostředí“ a jejím obsahem je studium zákonitostí elektromagnetických jevů zkoumaných v různých inerciálních vztažných soustavách.

Hlavním cílem Einsteinových úvah bylo teoretické vyjádření a zdůvodnění výsledků pokusů z oblasti elektromagnetismu, které byly konány koncem předminulého století, a hledání odpovědi na otázku, zda a jak je nutno formulovat zákony elektromagnetismu (a snad i jiných oblastí fyziky), aby vystihovaly skutečný průběh dějů v různých libovolně rychle se navzájem pohybujících inerciálních vztažných soustavách.

Z tzv. Galileova (neboli mechanického) principu relativity (ods. 2.4.6 - prostudujte a promyslete jej znovu!) plyne např. tento výsledek:



{obr2.1-1}

Obr. 3.1

Vrhne-li na povrchu Země těleso počáteční rychlostí \vec{v}_0 vzhledem k soustavě S spojené s povrchem Země (tj. v laboratorní inerciální soustavě), pohybuje se po parabole p – obr. 3.1a. Vrhne-li totéž těleso ve vagonu rovnoměrně přímočaře jedoucího vlaku (který představuje jinou inerciální soustavu S' - obr. 3.1b) tak, že těleso má vzhledem k vagonu rychlost $\vec{v}'_0 = \vec{v}_0$, pak se těleso vzhledem k S' pohybuje po parabole p', která je shodná s parabolou p. Podobně i těleso zavěšené na pružině kmitá v S' zcela stejně jako shodné těleso na shodné pružině v S. Takto shodně probíhají v obou soustavách (a ve všech inerciálních soustavách) všechny mechanické děje. To je vlastní fyzikální obsah uvedeného Galileova principu relativity.

Při studiu elektromagnetických jevů v různých inerciálních vztažných soustavách vzniká otázka, zda pro ně platí podobná jednoduchá zákonitost. Např.: Platí Coulombův zákon v soustavě S i S'? Jsou síly F_e a \vec{F}'_e stejné – obr. 3.1a,b? Má Faradayův zákon elektromagnetické indukce stejný tvar v S i S'? Pracuje elektromagnetický transformátor stejně, je-li v klidu vzhledem k S nebo vzhledem k S'? Šíří se elektromagnetické vlny (což je rovněž elektromagnetický děj) stejně vzhledem k S i vzhledem k S'? Zejména poslední problém týkající se šíření elektromagnetických vln včetně světla je velmi zajímavý a důležitý jak z hlediska poznání základních obecných zákonitostí přírody, tak z hlediska praktického. Nadto lze zákonitosti šíření světla zkoumat experimentálně s dostatečnou přesností relativně snadněji než zákonitosti jiných elektromagnetických jevů.

Einstein se zabýval uvedenými otázkami. Provedl rozbor zákonů elektromagnetismu, zfor-

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

mulovaných v tzv. Maxwellově teorii elektromagnetického pole, zejména však rozbor výsledků experimentů fyziků Michelsona a Morleye, kteří měřili rozdíly v rychlosti šíření světla na Zemi v různých směrech a zjistili, že tyto rozdíly jsou nulové. Došel k závěru, že všechny zákonitosti, jimiž se řídí elektromagnetické děje ve dvou libovolných inerciálních soustavách S a S' , jsou zcela stejné a že to platí i pro libovolné fyzikální děje. Dále postuloval, že světlo (a rovněž všechny elektromagnetické vlny) se šíří ve vakuu ve všech inerciálních soustavách stejnou rychlostí nezávislou na směru šíření, rychlostí c .

Důsledkem těchto dvou nenápadných relativně jednoduchých a pro toho, kdo zná Galileův princip relativity, velmi srozumitelných tvrzení, jenž Einstein vyslovil jako postuláty speciální teorie relativity, jsou všechny zdánlivě paradoxní výsledky, jimiž speciální teorie relativity překvapuje každého, kdo je zvyklý myslet v pojmech klasické fyziky. Větší část teorie relativity představuje logické vyvozování důsledků plynoucích z uvedených dvou postulátů. V době vzniku speciální teorie relativity byla většina z ní plynoucích teoretických výsledků považována mnohými fyziky za pouhé spekulace, které mohou, ale také nemusí, odpovídat skutečnosti. Většinu z nich nebylo při tehdejšímu stavu experimentální techniky ověřit. Dnes už téměř všechny výsledky speciální teorie relativity experimentálně ověřeny jsou a běžně se s nimi počítá nejen ve fyzikálních laboratořích a ústavech, nýbrž se jich využívá i v mnoha odvětvích techniky.

Zajímavé je, že přijetí Einsteinových postulátů nevedlo ke změnám ve formulaci zákonitosti elektromagnetického pole, nýbrž že bylo nutno změnit formulaci zákonů kinematiky a mechaniky. Studium těchto zákonitostí bude obsahem dalších částí tohoto textu.

3.1.2 Relativnost v klasické mechanice

3.1.2.1 Galileiho transformace

Galileiho transformace je soustava vztahů (3.1). Je zvláštním (jednoduchým) případem vztahů (2.42) uvedených v odst. 2.4.5.

Ve vztazích (3.1) jsou x, y, z souřadnice nějakého bodu P v inerciální vztažné soustavě S obr. 3.4 a x', y', z' souřadnice téhož bodu v jiné inerciální soustavě S' , která se vzhledem k S pohybuje stálo rychlostí \vec{v} . Veličiny t a t' jsou časy měřené v obou soustavách.

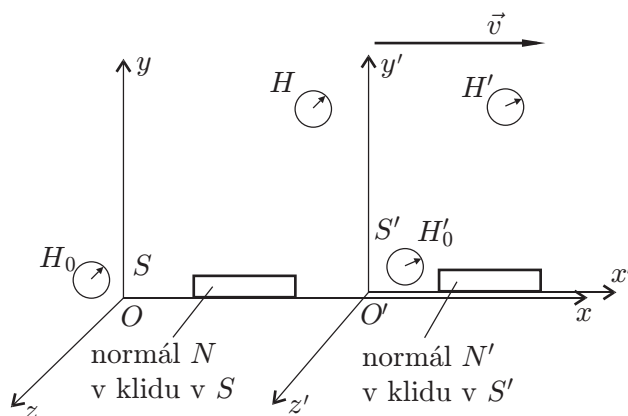
Einstein došel ve svých úvahách vedoucích ke speciální teorii relativity k závěru, že Galileiho transformace, která se v klasické mechanice považuje za správnou, je pouze limitním případem obecně platné tzv. Lorentzovy transformace (3.12), pro případ, že pro relativní rychlost " v " inerciálních soustav platí $v \ll c$.

V této části vysvětlíme fyzikální smysl Galileiho transformace tak, abychom byli připraveni i na následující relativistické úvahy.

Uvažujme o nějaké inerciální vztažné soustavě - např. o volném tělese, které nerotuje vzhledem ke stálícím, viz ods. 2.4.1. Zavedme v něm pravoúhlý pravotočivý systém souřadnic $Oxyz$ tak, že zvolíme tři navzájem kolmé orientované přímky - osy. Bodům těchto os přidáme čísla tak, že uijeme jako normálu délky (např. 1 m) tyče N zhotovené z určitého materiálu a tuto tyč přikládáme postupně na osy, tak jak se to dělá často v praxi. Dělení pak zjermníme. Tím přiřadíme každému bodu os, a poté známým způsobem i každému prostoru, trojici čísel - souřadnic x, y, z obr. 3.2. Kromě toho zavedeme v této soustavě čas t tak, že předpokládáme v souladu s Newtonem, že čas je veličina absolutní, ve všech bodech vesmíru a ve všech vztažných soustavách stejná. V uvažované soustavě jej ukazuje např. soustava stejných mechanických hodin H , rozmístěných (teoreticky) ve všech bodech prostoru. Předtím jsem je synchronizovali (tj. seřídili tak, aby ukazovaly stejně) v počátku souřadnic podle tamějších hodin H_0 , viz obr. 3.2. Hodiny H jsou vzhledem k $Oxyz$ v klidu. Vztažnou soustavu se zavedenou soustavou souřadnic $Oxyz$ a časem t označíme S .

Uvažujme nyní o jiné vztažné soustavě, která se pohybuje (pro jednoduchost) rovnoměrnou

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

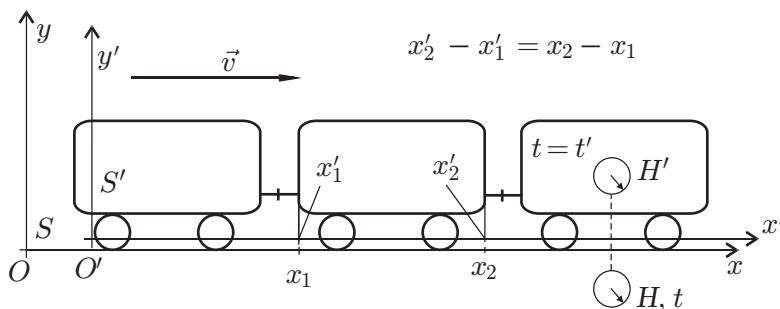


{obr2.1-2}

Obr. 3.2

translací rychlostí \vec{v} o velikosti v ve směru osy Ox . (Pozn.: veličině $|\vec{v}| = v (> 0)$ budeme pro krátkost říkat rovněž „rychlost“. V této nové vztahné soustavě obr. 3.2 zavedeme rovněž soustavu souřadnic, nyní $O'x'y'z'$, a to tak, aby v čase $t = 0$ s splývala osa $O'x'$ s osou Ox , osa $O'y'$ s osou Oy a $O'z'$ s osou Oz . Bodům na osách $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ přiřadíme čísla tak, že uijeme stejné tyče (nebo její věrné kopie) stejným způsobem jako v soustavě S . Tato tyč - normál N' - je v klidu v $O'x'y'z'$. V této vztahné soustavě zavedeme čas t' s užitím hodin H' . Tyto hodiny seřídíme takto: hodiny H'_0 umístěné v počátku O' seřídíme podle hodin H_0 v okamžiku $t = 0$ s (nastavíme na nich $t' = 0$ s) a ostatní hodiny H' nastavíme podle hodin H'_0 . Hodiny H' jsou v $O'x'y'z'$ v klidu, tuto druhou soustavou označíme S' .

Děj, ke kterému dojde v určitém čase v určitém bodě P (např. sepnutí kontaktů nebo dopad elektronu na stínítko) nazveme „událost“. Událost je v soustavě S charakterizována z hlediska prostoru a času čtyřmi veličinami x, y, z, t , kterým se říká „souřadnice události“. Z toho jsou x, y, z prostorové souřadnice a t souřadnice časová. Tatáž událost je v S' charakterizována souřadnicemi x', y', z', t' . Základní otázka, na kterou dává odpověď Galíleiho transformace, zní: Jaký je vztah mezi čtveřicemi souřadnic (x, y, z, t) , (x', y', z', t') ? Jak se určí x', y', z', t' , jsou-li dány x, y, z, t (a naopak)?



{obr2.1-3}

Obr. 3.3

Při hledání odpovědi vycházíme z každodenní zkušenosti týkající se času a délky: 1. Libovolné hodiny H' (klidné v S') ukazují stejně jako hodiny H (klidné v S , s nimiž jsou v koincidenci (tj. jsou ve stejném místě). Jedeme-li totiž ve vlaku (soustava S' v obr. 3.3), ukazují naše hodiny H' stejně jako hodiny H na nádraží, kterým právě projíždíme. Poznamenejme ihned, že máme smyslovou zkušenost pouze s pomalými pohyby a že takto neměříme čas dosti přesně. Úvahy speciální teorie relativity vedou k závěru, že hodiny H' a H neukazují stejně. 2. Délka l'

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

libovolného předmětu klidného např. v S' , např. délka vagonu, kterou naměříme v S' , je stejná jako délka l pohybujícího se vagonu, tj. jako délka, kterou naměří pozorovatel (nebo přístroj) klidný v S . Vztah $l' = l$ považujeme za samozřejmý, neboť délku předmětu považujeme za veličinu charakteristickou pro předmět samotný, nezávislou na jeho pohybu. I zde však úvahy speciální teorie relativity vedou k závěru, že vztah $l' = l$ nemá obecnou platnost.

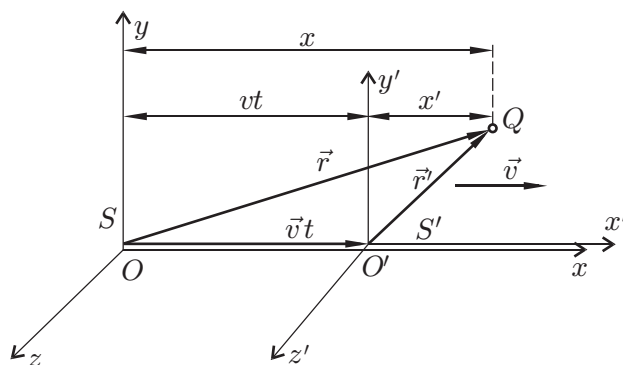
Uvedené „samozřejmé“ požadavky splňuje tzv. Galileiho transformace - soustava vztahů mezi čtveřicemi veličin (x, y, z, t) , (x', y', z', t') charakterizujících tutéž událost ve dvou uvažovaných vztažných soustavách S, S' (obr. 3.4):

$$\{2.1-1\} \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad \text{Galileiho transformace} \quad (3.1)$$

Tuto soustavu vztahů lze napsat i ve vektorovém tvaru

$$\{2.1-2\} \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \quad t' = t, \quad \text{Galileiho transformace ve vektorovém zápise} \quad (3.2)$$

srovnajte (2.42) pro $\vec{R}(t) = \vec{v}t$, viz obr. 3.4. Naše požadavky stejného času a stejné délky jsou



Obr. 3.4

skutečně splněny: 1. Platí $t' = t$, tj. hodiny H' a H ukazují stejně; 2. Platí $l' = l$. Neboť označíme-li x'_1 a x'_2 souřadnice konce a čela vagonu v S' v určitém (libovolném) čase t_0 , je $l = x_2 - x_1$. Ze vztahu (3.1) dostaneme $x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1$, tj. $l' = l$.

3.1.2.2 Důsledky Galileovy transformace

Zákon skládání rychlostí Pohybuje-li se nějaký hmotný bod vzhledem k S' , pohybuje se (obecně) i vzhledem k S . Jeho souřadnice x', y', z' jsou funkcemi času t' , jeho souřadnice x, y, z jsou funkcemi času t . Tyto funkce jsou vázány vztahy (3.1) resp. (3.2). Označíme $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt'$ rychlost hmotného bodu v S' a podobně $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ jeho rychlost v S . Pro souřadnice rychlostí dostaneme derivováním rovnic (3.1) vztahy

$$\begin{aligned} u'_{x'} &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v \frac{dt}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v = u_x - v, \\ & \text{(neboť } t' = t \rightarrow dt' = dt) \\ u'_{y'} &= u_y, \quad u'_{z'} = u_z, \text{ tj.} \\ \{2.1-3\} \quad u'_{x'} &= u_x - v, \quad u'_{y'} = u_y, \quad u'_{z'} = u_z. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Analogicky derivováním rovnice (3.2) podle t' dostaneme

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

$$\{2.1-4\} \quad \vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}, \quad \text{klasický zákon skládání rychlostí} \quad (3.4)$$

viz rovnice (2.43). Vztah (3.4) je tedy důsledkem Galileiho transformace.

Zrychlení v inerciálních soustavách Derivováním vztahu (3.4) podle t' dostaneme

$$\{2.1-5\} \quad \vec{a}' = \vec{a}, \quad \text{zrychlení hmotného bodu v inerciálních soustavách} \quad (3.5)$$

viz rovnice (2.45). Rovněž vztah (3.5) je důsledkem Galileiho transformace.

Galileiho princip relativity Galileiho princip relativity byl vysloven v odst. 2.4.6. Připomeneme jej. Uvažujme o malém tělese (hmotném bodě), na které působí jiná tělesa a zkoumejme jeho pohyb v inerciální soustavě S a v inerciální soustavě S' obr. 3.4. V soustavě S platí pohybová rovnice

$$\{2.1-6\} \quad \text{a) } m\vec{a} = \vec{F}_v, \quad \text{tj. b) } m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_v, \quad \text{tj. c) } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_v, \quad (3.6)$$

kde m , \vec{a} , \vec{F}_v , \vec{r} , \vec{p} jsou veličiny definované, měřené, resp. počítané v S . Přitom \vec{F}_v je výslednice sil působících na hmotný bod v S .

V soustavě S' je: 1. $\vec{a}' = \vec{a}$, viz rovnice (3.5); 2. O hmotnosti tělesa předpokládáme, že nezávisí na jeho pohybu, že tedy platí $m' = m$; 3. Síly charakterizující působení ostatních těles jsou závislé na vzájemné vzdálenosti těles a na jejich vzájemných rychlostech. Ty jsou, podle Galileiho transformace, stejné v S i S' . Proto o silách předpokládáme, že platí $\vec{F}_v = \vec{F}'_v$. S užitím těchto výsledků a vztahu (3.6) dostáváme

$$\{2.1-7\} \quad \text{a) } m\vec{a}' = \vec{F}'_v, \quad \text{tj. b) } m' \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = \vec{F}'_v, \quad \text{tj. c) } m \frac{d^2\vec{p}'}{dt'^2} = \vec{F}'_v. \quad (3.7)$$

Pohybové rovnice (3.6) v S a pohybové rovnice (3.7) v S' mají tedy stejný tvar. To značí: Jestliže hmotný bod o hmotnosti m , který má v S počáteční rychlost \vec{v}_0 , se pohybuje účinkem okolních těles vzhledem k S po trajektorii T , pak jiný hmotný bod o stejné hmotnosti, který má v S' počáteční rychlost $\vec{v}'_0 = \vec{v}_0$, se bude pohybovat po trajektorii T' , která má stejný tvar jako T , viz obr. 3.1.

Analogická zákonitost platí zřejmě pro mechanické pohyby všech hmotných soustav. Vyslovuje se jako Galileův (neboli mechanický) princip relativity: Rovnice vyjadřující zákony mechaniky mají stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

3.1.3 Fyzikální základy speciální teorie relativity

3.1.3.1 Invariantnost a kovariantnost

Fyzikální veličiny, kterými charakterizujeme vlastnosti těles, polí, fyzikální děje, mají v různých vztažných soustavách buď různé nebo stejné hodnoty. Např. v inerciálních soustavách (SI), pro něž platí Galileiho transformace, má délka tělesa stejnou hodnotu. Říkáme, že délka tělesa je invariantní vzhledem ke Galileově transformaci. Další invariantní veličiny (vzhledem ke Galileiho transformaci) jsou zřejmě plošný obsah, objem, zrychlení hmotného bodu, hmotnost, síla atd. Invariantní vzhledem ke Galileiho transformaci nejsou např. veličiny: rychlost, hybnost, kinetická energie atd.

Jestliže nějaký vztah (např. rovnice) mezi fyzikálními veličinami, formulovaný v inerciální soustavě S , nezmění při jeho přepsání do soustavy S' s užitím Galileiho transformace svůj tvar,

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

říkáme, že je kovariantní vzhledem ke Galíleiovi transformaci. Např. rovnice (3.6)c je kovariantní vzhledem ke Galíleiovi transformaci, neboť má v S' stejný tvar rovnic (3.6)c, (3.7)c je však stejný, tedy rovnice $d\vec{p}/dt = \vec{F}_v$ je kovariantní. Je-li nějaký fyzikální zákon vyjádřen matematicky rovnicí, která je kovariantní vzhledem k nějaké transformaci, kterou jsou vázány souřadnice a čas ve dvou vztažných soustavách, tj. má-li fyzikální zákon v obou soustavách stejný tvar, probíhají děje, jež se tímto zákonem řídí, v obou soustavách za stejných podmínek stejně.

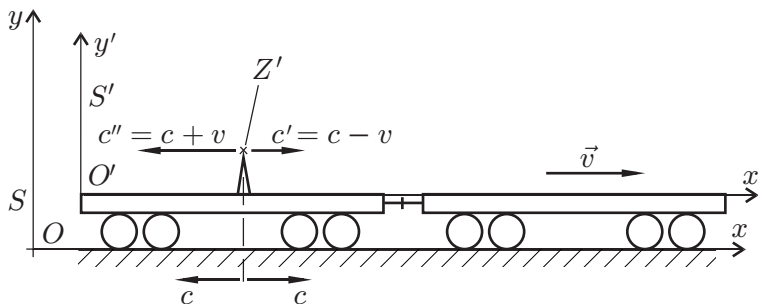
3.1.3.2 Postuláty speciální teorie relativity

Uvažujme nyní o elektromagnetických dějích. Jejich zákonitosti, jako je např. Coulombův zákon, Gaussův zákon (který hovoří, zhruba řečeno, o počtu siločar, které vystupují z kladného elektrického náboje), Faradayův zákon elektromagnetické indukce atd., jsou shrnuty v tzv. Maxwellově teorii elektromagnetického pole, (viz [10], odst. 1.5.2). Lze dokázat, že ve vztažné soustavě, v níž platí Maxwellovy rovnice (vyjadřující hlavní zákonitosti elektromagnetických dějů) se šíří elektromagnetické záření (tedy i světlo) ve vakuu všemi směry stejnou rychlostí danou vztahem

{2.1-8}

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (3.8)$$

Zde ϵ_0 je konstanta, která se nazývá permitivita vakua a μ_0 je konstanta, která se nazývá permeabilita vakua. Jejich hodnoty lze najít v tabulkové části na straně 400.



{obr2.1-5}

Obr. 3.5

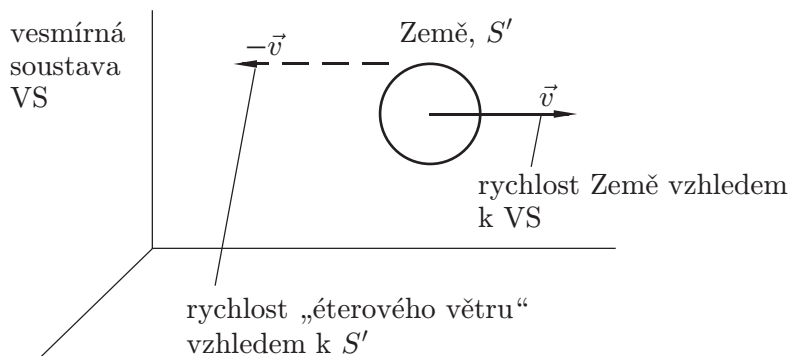
Předpokládejme, že uvedené zákony elektromagnetismu platí v určité inerciální vztažné soustavě S a uvažujme o jiné inerciální soustavě S' , která se vzhledem k S pohybuje rychlostí v podle obr. 3.5. Předpokládejme, že souřadnice (x, y, z, t) , (x', y', z', t') událostí v obou soustavách jsou vázány rovnicemi (3.1), tj. že platí Galíleiovi transformace. Pak rychlost \vec{u} libovolného objektu (tělesa nebo pole) měřená v S a jeho rychlost \vec{u}' měřená v S' , jsou vázány vztahem (3.4). Světlo by se tedy mělo v S' šířit ve směru osy $O'x'$ rychlostí $c' = c - v$ a ve směru opačném rychlostí $c'' = c + v$. Situace by měla být podobná jako při šíření zvuku ve vzduchu klidném na Zemi. V soustavě S spojené se Zemí se zvuk šíří všemi směry stejnou rychlostí, kterou označíme c , obr. 3.5. V soustavě S' spojené s vagonem jedoucím ve směru osy Ox rychlostí v se zvuk šíří rychlostí $c' = c - v$ ve směru osy $O'x'$ a rychlostí $c'' = c + v$ ve směru opačném. Kdyby tomu tak bylo, musely by mít rovnice vyjadřující zákony elektromagnetismu v soustavě S' jiný tvar než v soustavě S . Kdyby totiž měly stejný tvar, šířilo by se světlo i v soustavě S' rychlostí danou vztahem (3.8). Jinak řečeno: rovnice vyjadřující zákony elektromagnetismu nejsou kovariantní vzhledem ke Galíleiovi transformaci.

Až do vzniku speciální teorie relativity se předpokládalo, že Galíleiovi transformace je správná a že zákony elektromagnetismu formulované v rovnicích Maxwellovy teorie platí přesně jen v jedné vztažné soustavě. Tato vztažná soustava že má tedy význačné (privilegované) postavení a že je tedy v jistém smyslu „absolutní“. Přirozeně se předpokládalo, že je to soustava spojená

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

s vesmírem, se stálicemi. Přesněji vyjádřeno, je to soustava, v níž má vesmír jako celek nulovou hybnost i nulový moment hybnosti. Tuto soustavu budeme pro stručnost nazývat vesmírná soustava (VS). O elektromagnetickém vlnění se předpokládalo, že musí mít, podobně jako mechanické vlnění (např. zvuk), nějakého nositele, nějaké prostředí, kterým se toto vlnění šíří. Ježto elektromagnetické vlny se šíří i vakuem, předpokládalo se, že nositelem elektromagnetických vln je nějaké jemné prostředí s mizivou hmotností, které je v celém vesmíru, ve vakuu i v látkách a jehož funkce je to, že umožňuje šíření elektromagnetických vln. Toto prostředí se nazývalo světový éter, krátce éter. Výlučnost vesmírné soustavy spočívala v tom, že éter je v ní v klidu.

Podle těchto představ (byly považovány za jediné správné, nebyly však experimentálně potvrzeny) se mělo světlo šířit všemi směry stejnou rychlostí c danou vztahem (3.8) pouze ve vesmírné soustavě (VS). V jiné inerciální vztahné soustavě S , která se vzhledem k VS pohybuje rychlostí \vec{v} , se mělo světlo šířit různými směry různou rychlostí - např. ve směru pohybu soustavy S rychlostí $c' = c - v$, v opačném směru rychlostí c'' . Vzhledem k takové soustavě S se měl éter pohybovat rychlostí $-\vec{v}$, měl v ní „vanout éterový vítr“, právě tak, jako vzniká skutečný vítr v soustavě S' spojené s jedoucím vagonem v obr. 3.5.



{obr2.1-6}

Obr. 3.6

Rozhodnout o správnosti těchto představ mohlo jedině měření, experiment. Tato měření provedli s dostatečnou přesností r. 1887 A. Michelson a E. Morley. Za soustavu S pohybující se vzhledem k VS zvolili obr. 3.6 Zemi, která se v heliocentrické soustavě pohybuje rychlostí, jejíž velikost je asi $v = 29 \text{ km/s}$, jež je dostatečná pro to, aby bylo možno zjistit, zda světlo se šíří vzhledem k Zemi v souladu s předešlou éterovou teorií. Užili velmi citlivého přístroje - optického interferometru, dnes nazývaného „Michelsonův interferometr“. V něm se světlo vyslané z jediného zdroje rozdělilo na dva paprsky, které postupovaly ve směrech navzájem kolmých a poté se opět setkaly a sládaly (interferovaly). Rozborem výsledného interferenčního obrazce vzniklého složením obou paprsků zjistili, že světlo urazí na Zemi za stejnou dobu stejnou dráhu, ať se šíří kterýmkoliv směrem. Zjistili, že „éterový vítr“ je jejich metodou nezjistitelný.

Tento překvapující záporný výsledek jejich měření vzbudil velký rozruch, protože byl v rozporu s tehdejšími představami. Proto oba fyzici měření opakovali se zvětšenou přesností. Kromě jejich experimentů byla provedena řada dalších měření různými metodami za různých podmínek, např. ve velkých výškách atd. V posledních desítkách let byla konána měření s užitím družic a kosmických sond. Žádný z těchto pokusů nevedl ke zjištění pohybu naší Země vůči éteru. Výsledky některých pokusů bylo možno vysvětlit vhodnými předpoklady, např. že éter je látkami částečně strháván, že předměty se při pohybu vůči éteru smršňují, že světlo má konstantní rychlost pouze vzhledem ke svému zdroji atd. Žádný z těchto předpokladů však nevedl k vysvětlení všech experimentálně zjištěných zákonitostí šíření světla.

Einstein vyřešil rozpor mezi klasickými představami a výsledky experimentů originálním a přitom jednoduchým a na první pohled přirozeným způsobem. Ježto žádný pokus nevedl

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

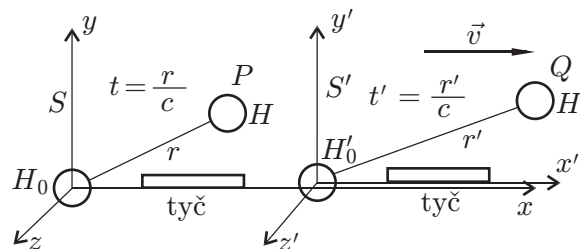
k důkazu existence světového éteru a ježto naopak hypotéza existence éteru ztěžovala výklad experimentů, došel Einstein k závěru, že éter neexistuje, že elektromagnetické pole včetně elektromagnetických vln a světla nepotřebuje ke své existenci nositele. Ježto dále výsledky pokusů lze vyložit s užitím předpokladu, že světlo se šíří v každé inerciální soustavě ve vakuu rychlostí c danou vztahem (3.8), který plyne z rovnic vyjadřujících zákonitosti elektromagnetického pole, došel Einstein k závěru, že rovnice elektromagnetického pole mají ve všech inerciálních soustavách stejný tvar. Analogický výsledek pro mechanické děje byl již znám jako tzv. Galileův princip relativity. Proto Einstein vyslovil jako fyzikální princip tvrzení, že libovolný fyzikální děj se řídí v libovolné inerciální soustavě stejnými zákonitostmi. Konečně pak vyslovil jako fyzikální princip tvrzení, že světlo se šíří ve vakuu ve všech inerciálních soustavách stejnou (na směru nezávislou) rychlostí.

Princip relativity Postulát 1: Rovnice, jimiž se jsou vyjádřeny fyzikální zákony, mají ve všech inerciálních vztažných soustavách stejný tvar.

Princip konstantní rychlosti světla Postulát 2: Světlo se šíří ve vakuu ve všech inerciálních vztažných soustavách stejnou rychlostí c .

Poznamenejme ještě, že z Einsteinových úvah a vztahů, které odvodil, vyplývá, že rychlost libovolného tělesa v inerciální soustavě je vždy menší než c .

3.1.3.3 Důsledky Einsteinových postulátů speciální teorie relativity



Obr. 3.7

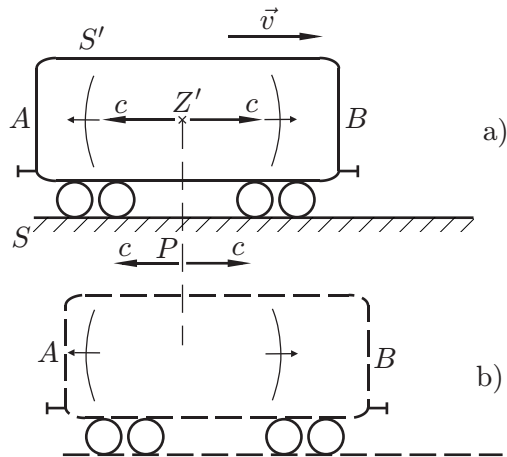
{obr2.1-7}

Zavedení vztažných soustav Budeme uvažovat, tak jako dříve, o dvou inerciálních vztažných soustavách S a S' , z nichž S' se pohybuje ve směru osy Ox rychlostí \vec{v} (obr. 3.7). Soustavu souřadnic $Oxyz$ zavedeme obdobně, jako v klasické fyzice: bodům prostoru přiřadíme trojice čísel - prostorové souřadnice s užitím určité tyče - normálu délky, která je vzhledem k S v klidu.

Čas v S budeme měřit na hodinách, které jsou rozmístěny ve všech bodech prostoru a jsou v klidu v S . Synchronizujeme je podle hodin H_0 umístěných v počátku O takto: V čase $t = 0$ vyšleme z bodu O rádiový signál a na hodinách H v obecném bodě P ve vzdálenosti r od O obr. 3.7 nastavíme při příchodu signálu čas $t = r/c$, neboť podle druhého postulátu světla, a tedy i rádiový signál, se šíří v každé inerciální soustavě rychlostí c (pozn.: respektování doby letu rádiových signálů je běžná praxe zejména při řízení družic, kosmických sond atd.).

Soustavu souřadnic $O'x'y'z'$ v S' zavedeme opět tak, aby počátky O a O' splývaly v čase $t = 0$. Přiřazení prostorových souřadnic provedeme opět s užitím stejné tyče - normálu - jako předtím v S s tím, že tyč je nyní v klidu v S' . Hodiny H'_0 umístěné v počátku O' seřídíme podle hodin H' v okamžiku $t = t' = 0$, kdy H_0 a H'_0 jsou v koncenci. Ostatní hodiny H' pevné v S' synchronizujeme s hodinami H'_0 opět užitím rádiového signálu, který se šíří i vzhledem k S' rychlostí c . Na H' nastavujeme $t' = r'/c$, obr. 3.7.

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA



{obr2.1-8}

Obr. 3.8

Relativnost současnosti Uvažujme o hypotetickém superexpressu, který jede stálou rychlostí $v = 2 \cdot 10^8$ m/s a který představuje inerciální soustavu S' (obr. 3.8). Přesně ve středu vagonu je zdroj světla Z' . Tento zdroj vyše v okamžiku, kdy právě míjí pozorovatele P pevného v pozemské soustavě S , světelný signál. Tento signál se šíří vzhledem k S' rychlostí c všemi směry, dorazí tedy na zadní stěnu A vagonu a na přední stěnu B současně. Dvě události: dopad světla na A a na B jsou v S' současné.

Pro pozorovatele P pevného v S se světlo rovněž šíří rychlostí c . Zadní stěna A vagonu se k němu přibližuje, přední stěna B se od něj vzdaluje. Signál dopadne na A v době, kdy paprsek letící k B je ještě od B vzdálen – obr. 3.8b. Dopad světla na A a B jsou tedy v S dvě události nesoučasné. Zopakujme: Dvě nesoumírné události, které jsou v S' současné, jsou v S nesoučasné. Současnost nesoumírných jevů je tedy pojem relativní.

Paradoxní skládání rychlostí Světlo se šíří vzhledem k vagonu směrem od Z' k B rychlostí $c = 3 \cdot 10^8$ m/s obr. 3.8a, vagon jede ve stejném směru rychlostí $v = 2 \cdot 10^8$ m/s. Podle vztahu (3.4) plynoucího z Galileovy transformace by mělo mít toto světlo vzhledem k S rychlost $c' = c + v = 5 \cdot 10^8$ m/s. Tento, z hlediska klasické fyziky paradoxní, výsledek ukazuje, že vztah (3.4) a tedy i Galileova transformace v speciální teorii relativity neplatí. Relativistické skládání rychlostí bude vyloženo v dalším.

Dilatace času Ukážeme, že pohybující se hodiny jdou pomaleji než hodiny, které jsou v klidu. Předpokládejme, že pozorovatel v jiném vagonu uvažovaného superexpressu ($v = 2 \cdot 10^8$ m/s) vyše ze zdroje světla Z' na podlaze vagonu světelný signál svisle směrem ke stropu, kde je umístěn detektor D' ve vzdálenosti d – obr. 3.9a. Signál dopadne na D' za dobu $\Delta t' = d/c$.

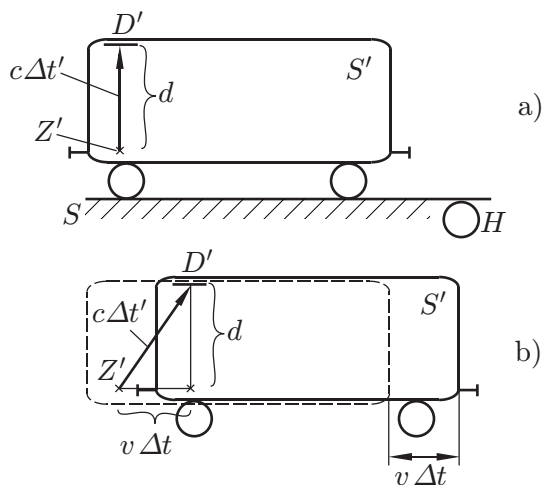
Pozorovatel klidný v S vzhledem k němuž se vagon pohybuje rychlostí v , zjistí, že signál dopadne na D' po uplynutí jisté doby Δt . Vagon urazil za tu dobu dráhu $\Delta s = v\Delta t$ obr. 3.9.

V soustavě S se paprsek musel šířit po šikmé úsečce $Z'D'$ v obr. 3.9b. Ježto světlo se šíří v S rovněž rychlostí c , letěl paprsek ze Z' do D' po dobu $\Delta t = |Z'D'|/c$. Z obr. 3.9b plyne $|Z'D'|^2 = (v\Delta t)^2 + d^2$. Dosazením dostaneme

{2.1-9}

$$c^2(\Delta t)^2 = v^2(\Delta t)^2 + c^2(\Delta t')^2 \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad \text{dilatace času} \quad (3.9)$$

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA



{obr2.1-9}

Obr. 3.9

Ježto $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$, je $\Delta t > \Delta t'$. To značí: děj, který trvá ve vagonu po dobu $\Delta t'$ trvá v soustavě, v níž se vagon pohybuje, po dobu $\Delta t > \Delta t'$, tedy déle. Kdybychom do místa D' a Z' dali rovnoběžná vodorovná zrcadla, mezi nimiž by se paprsek pohyboval vzhledem k vagonu nahoru a dolů, mohli bychom toto zařízení považovat za hodiny H' , v nichž probíhá periodický děj o periodě $T' = 2\Delta t'$. Perioda téhož děje v soustavě S , v níž se hodiny H' pohybují, by byla $T = 2\Delta t > T'$. Tedy: pohybující se hodiny H' ukazují méně a jdou tedy pomaleji než hodiny H , s nimiž jsou právě v koincidenci. Tato vlastnost času se nazývá dilatace času.

Čas měřený na hodinách, které jsou v klidu v inerciální soustavě, v níž je uvažovaný objekt v klidu, se nazývá vlastní čas.

Poznamenejme, že pro pozorovatele, který je v klidu v S' , se pohybují hodiny H rychlostí $-\vec{v}$. Srovnává jejich údaje s údaji těch hodin H' , jež jsou s H právě v koincidenci a zjistí, že platí $\Delta t < \Delta t'$. Dilatace času je tedy relativní, zjistí ji na pohybujících se hodinách jak pozorovatel klidný v S , tak pozorovatel klidný v S' .

Experimentální ověření dilatace času bylo provedeno mnohokrát. Běžně se s ní počítá ve fyzice elementárních částic, při pohybu částic v urychlovačích atd. První jev, který bylo možno vysvětlit dilatací času, byl průlet částic μ (mionů) atmosférou. Miony jsou nestabilní částice, které mají v laboratoři v klidu střední dobu života asi $\tau_0 = 2\mu\text{s}$. Kdyby nebylo dilatace času, mohly by miony, které se mohou pohybovat rychlostmi menšími než c , urazit nanejvýš dráhu $s = \tau_0 c = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} = 600 \text{ m}$. Ve skutečnosti však miony vznikají v horních vrstvách atmosféry ve výšce několika desítek tisíc metrů nad Zemí účinkem kosmického záření a mnoho z nich doletí až na povrch Země, takže urazí dráhu řádově 10^4 m . Vysvětlení: Čas τ_0 je vlastní čas. Je to doba, po kterou miony existují, měřená v hodinách na hodinách, vzhledem k nimž se miony nepohybují. V soustavě, v níž se miony pohybují (v našem případě je to soustava spojená s povrchem Země), mají miony střední dobu života τ danou vztahem (3.9), tj. $\tau = \tau_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, tj. větší než τ_0 .

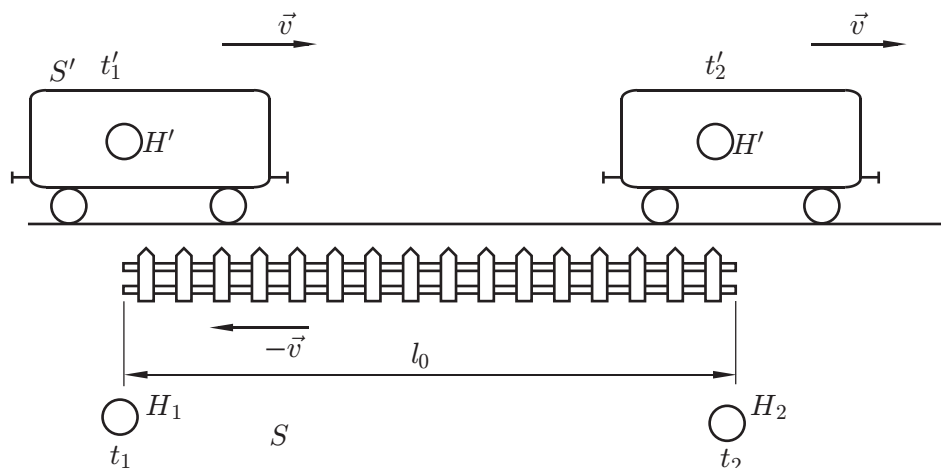
3.1.3.4 Kontrakce délek

Ukážeme, že rozměry pohybujícího se předmětu, měřené ve směru pohybu, jsou menší než rozměry předmětu klidného. Rozměry ve směru příčném ke směru pohybu zůstávají beze změny.

Uvažujme opět o jednom vagonu superexpresu, který jede rychlostí \vec{v} kolem plotu, jehož délka v soustavě S spojené s povrchem Země je l_0 (obr. 3.10). Vagon tvoří soustavu S' . Pozorovatel ve



3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA



{obr2.1-10}

Obr. 3.10

vagonu chce zjistit délku plotu, který se vzhledem k němu, tj. vzhledem k soustavě S' , pohybuje rychlostí $-\vec{v}$. Provede to takto: na svých hodinách H' zjistí časy t'_1 , t'_2 , kdy jel kolem začátku a konce plotu a délku určí ze vztahu $l' = v(t'_2 - t'_1) = v\Delta t'$. Pozorovatel P , který je v klidu v S , zjistí na hodinách H_1 , H_2 časy t_1 a t_2 , kdy vagon míjel rychlostí \vec{v} začátek a konec plotu a pro délku l_0 plotu, který je v klidu, dostaneme $l_0 = v(t_2 - t_1) = v\Delta t$. Dělením vztahů dostaneme $l'/l_0 = \Delta t'/\Delta t$. Dosadíme-li sem $\Delta t'/\Delta t$ ze vztahu (3.9), dostaneme

{2.1-10}

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{kontrakce délek} \quad (3.10)$$

To značí: Délka l' pohybujícího se předmětu (zde délka plotu pohybujícího se v S' rychlostí $-\vec{v}$) je menší než délka téhož předmětu v klidu (zde délka) plotu v soustavě S . Tento jev se nazývá kontrakce délek. Délka l_0 se nazývá klidová délka. Právě tak bylo možno dokázat, že jedoucí vagon má v S menší délku než je jeho klidová délka.

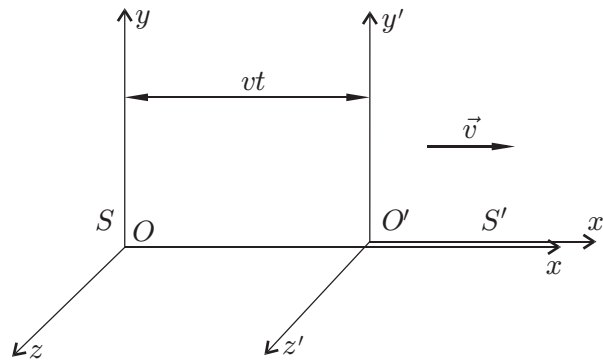
Pokud jde o rozměry předmětů ve směru kolmém ke směru jejich pohybu, získáme výsledek takto: Postavíme se vedle vagonu, v ruce máme křidu, kterou držíme ve výšce horního okraje vagonu. Nechť nyní vagon jede rychlostí \vec{v} . Jestliže se jeho výška při pohybu zmenší, křida bude výš než horní okraj vagonu a nezanechá na vagonu stopu. Z hlediska soustavy spojené s vagonem se však pohybujeme my rychlostí $-\vec{v}$, takže se zmenšíme my a křida zanechá na vagonu stopu. Avšak křida nemůže na vagonu stopu současně zanechat a současně nezanechat, výška vagonu se tedy nezmění. Rozměry předmětů ve směru příčném k pohybu se tedy nemění.

3.1.3.5 Lorentzova transformace

Transformační vztahy Uvedli jsme, že souřadnice (x, y, z, t) a (x', y', z', t') jedné události ve dvou inerciálních vztažných soustavách S, S' , z nichž S' se pohybuje rychlostí \vec{v} vzhledem k S rychlostí \vec{v} podle obr. 3.11, nemohou být vázány rovnicemi Galileovy transformace (3.1), neboť v speciální teorii relativity neplatí zákon skládání rychlostí (3.4), jenž z Galíleiho transformace vyplývá.

Ukazuje se, že Einsteinovy postuláty speciální teorie relativity jsou splněny, jestliže souřadnice (x, y, z, t) události v S a souřadnice (x', y', z', t') téže události v S' jsou vázány vztahy, které se nazývají Lorentzova transformace a které mají tvar

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA



Obr. 3.11

{obr2.1-11}

$$\{2.1-11\} \quad \text{a) } x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{b) } y = y', \quad \text{c) } z = z', \quad \text{d) } t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad \text{Lorentzova transformace} \quad (3.11)$$

To jsou rovnice, pomocí kterých získáme ze souřadnic (x', y', z', t') v soustavě S' souřadnice (x, y, z, t) téže události v S .

Jsou-li naopak dány souřadnice (x, y, z, t) nějaké události v S' získáme z nich souřadnice v S ze vztahů (3.11) záměnou $x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y', z \leftrightarrow z', t \leftrightarrow t', v \leftrightarrow -v$. Dostaneme tak z Lorentzovy transformace ve tvaru

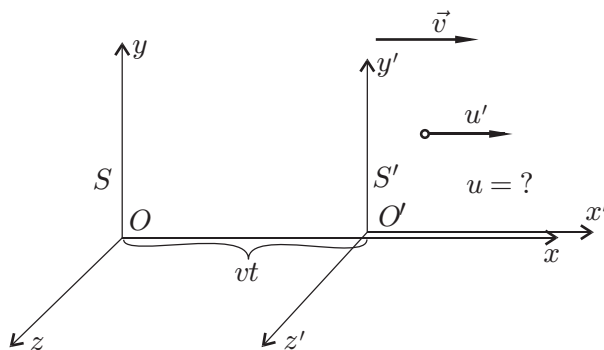
$$\{2.1-12\} \quad \text{a) } x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{b) } y' = y, \quad \text{c) } z' = z, \quad \text{d) } t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad \text{Lorentzova transformace} \quad (3.12)$$

1. Lorentzova transformace je zobecnění Galileovy transformace, kterou dostaneme z Lorentzovy transformace pro případ rychlostí v , pro něž platí $v \ll c$ (tzv. nerelativistické rychlosti). Skutečně pro $v/c \ll 1$ dostaneme ze vztahů (3.12) vztahy $x' \doteq x - vt, y' = y, z' = z, t' \doteq t$. Galileiho transformace je tedy limitním případem Lorentzovy transformace pro $v/c \rightarrow 0$
2. Ze vztahu (3.12)d plyne, že čas není absolutní. Čas t události měřený v S' závisí nejen na čase t této události v S , nýbrž i na její prostorové souřadnici. Ve speciální teorii relativity nejsou prostorové a časové souřadnice nezávislé, prostorové a časové charakteristiky dějů spolu souvisí. Z tohoto důvodu se ve speciální teorii relativity užívá kromě pojmů prostoru a času i sjednocujícího pojmu *prostorčas*.
3. Lze ukázat, že rovnice elektromagnetického pole jsou vzhledem k Lorentzově transformaci kovariantní, tj. že zákony elektromagnetismu mají ve všech inerciálních soustavách stejný tvar. Zejména pro rychlost světla ve vakuu vychází (v souhlasu se 2. postulátem speciální teorie relativity) ve všech inerciálních soustavách stejná hodnota daná vztahem (3.8). Zato zákony klasické mechaniky nejsou, jak lze ukázat, vzhledem k Lorentzově transformaci kovariantní a je nutno je modifikovat.

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

- Mají-li rovnice (3.11) popisovat děje probíhající v reálném prostoru a čase, musí být výraz $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ reálný a nenulový, tj. musí platit $v < c$. Odsud plyne, že vzájemné rychlosti inerciálních vztažných soustav musí být menší než c . Tedy i rychlost libovolného tělesa v libovolné inerciální vztažné soustavě musí být menší než c , neboť toto těleso může tvořit vztažnou soustavu.
- V předešlých úvahách jsme ukázali, že některé veličiny a pojmy, které jsou v klasické fyzice „absolutní“, jsou ve speciální teorii relativity relativní, závislé na užití vztažné soustavě. Platí to např. o rozměrech předmětů, o délkách časových intervalů a o pojmu současnosti. V příkladech 2.1-1 až 2.1-4 ukážeme, že tyto výsledky plynou přímo z Lorentzovy transformace.
- Kdyby bylo $c \rightarrow \infty$, přešla by Lorentzova transformace v Galíleiho transformaci.

Relativistické skládání rychlostí V této části odvodíme vztah (3.13), který je relativistickým zobecněním vztahu (3.14) platného v klasické fyzice.



Obr. 3.12

Uvažujme o malém tělese (hmotném bodu), který se pohybuje vzhledem k inerciální vztažné soustavě S' podél osy $O'x'$ obr. 3.12. Pro jeho souřadnice platí $y' = y = \text{konst.}$, $z' = z = \text{konst.}$. Jeho souřadnice x' je v S' funkcí času t' , tj. $x'(t')$. Jeho rychlost \vec{u}' v S' i rychlost \vec{u} v S má směr osy $O'x'$, tj. i osy Ox . Platí $u_x = u(t) = dx/dt$, $u_{x'} = u' = dx'/dt'$. Odvodíme vztah mezi u a u' . Předem uvedeme tento pomocný vztah, který budeme potřebovat

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nyní počítejme u :

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + vt')}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dx' + vdt'}{dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dx' + vdt'}{\frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v^2}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$$

{2.1-13}

$$u(t) = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \quad \text{vztah speciální teorie relativity pro skládání rychlostí} \quad (3.13)$$

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

1. Vztah (3.13) nahrazuje ve speciální teorii relativity klasický vztah $u = u' + v$, je jeho zobecněním. Vztah $u = u' + v$ je limitním případem vztahu (3.13) buď pro $vu \ll c^2$ (nerelativistické rychlosti), nebo pro $c \rightarrow \infty$.
2. Pro $u' > 0$ plyne ze vztahu (3.13), že vždy platí $u < u' + v$.
3. Pro jakékoliv hodnoty rychlostí $u' (< c)$ a $v (< c)$ dává vztah (3.13) výsledek $u < c$.

Důkaz: Označme

$$u' = (1 - p)c, \quad \text{kde } 0 < p \leq 1,$$

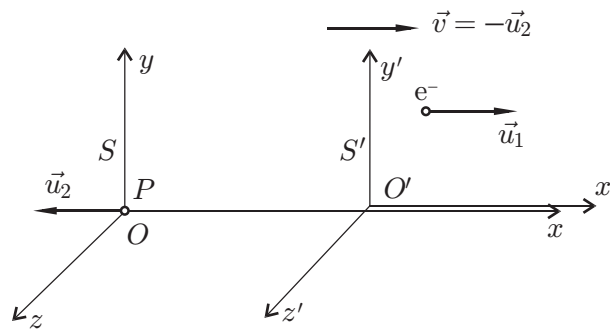
$$v = (1 - q)c, \quad \text{kde } 0 < q \leq 1$$

Dostáváme

$$u = \frac{(1 - p)c + (1 - q)c}{1 + \frac{(1 - p)c(1 - q)c}{c^2}} = \frac{1 - p + 1 - q}{1 + 1 - p - q + pq} c = \frac{2 - p - q}{(2 - p - q) + pq} c < c.$$

Zejména pro $u' \rightarrow c$ ($p \rightarrow 0$) vychází, že rovněž $u \rightarrow c$. Vztah (3.13) je tedy v soulase s druhým postulátem speciální teorie relativity.

3.1.3.6 Důsledky Lorentzovy transformace v příkladech



Obr. 3.13

{obr2.1-13}

{kpr2.1-1}

KP 3.1-1 _____

Elektron e se pohybuje v soustavě S' rychlostí $u_1 = 0,9 c$ ve směru osy $O'x'$ obr. 3.13, proton p se pohybuje v téže soustavě rychlostí $u_2 = 0,8 c$ v opačném směru. Určete relativní rychlost elektronu vzhledem k protonu.

Řešení:

S protonem spojíme vztažnou soustavu S obr. 3.13. Vzhledem k této soustavě se soustava S' pohybuje rychlostí $\vec{v} = -\vec{u}_2$ ve směru osy Ox . Relativní rychlost elektronu vzhledem k protonu je rovna rychlosti u elektronu vzhledem k soustavě S . Ze vztahu (3.13), v němž $u' = u$, $v = u_2$, dostaneme

$$u = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_2 u_1}{c^2}} = \frac{0,9c + 0,8c}{1 + 0,8 \cdot 0,9} = 0,988\,372\,c \quad (< c)$$

Podle klasické fyziky by mělo být $u = 1,7 c$.

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

{kpr2.1-2} **KP 3.1-2** —————

Dokažte, že z Lorentzovy transformace plyne relativnost současnosti.

Důkaz: Uvažujme o dvou dějích současných v S' obr. 3.13. Jejich souřadnice v S' necht' jsou (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) , $(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 = t'_1)$. Pak jejich časové souřadnice v S jsou podle (3.11)d,

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{kde } t'_2 = t'_1.$$

odečtením dostaneme

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}.$$

Je-li $x'_1 = x'_2$, je $t_2 = t_1$ a děje jsou v S současné. Je-li však $x'_2 \neq x'_1$, je $t_2 \neq t_1$, tj. děje jsou v S nesoučasné.

{kpr2.1-3} **KP 3.1-3** —————

S užitím Lorentzovy transformace dokažte platnost vztahu (3.9) pro dilataci času.

Důkaz: Uvažujme o dvou událostech, které nastaly v S' obr. 3.13 ve stejném místě v různých časech. Jejich souřadnice v S' jsou (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) , $(x'_2 = x'_1, y'_2 = y'_1, z'_2 = z'_1, t'_2)$. Jejich časové souřadnice v S jsou, podle (3.11)d,

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Odečtením dostaneme

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

což je vztah (3.9).

{kpr2.1-4} **KP 3.1-4** —————

S užitím Lorentzovy transformace dokažte platnost vztahu (3.10) pro kontrakci délek.

Důkaz: Uvažujme o tyči, která leží v klidu v soustavě S' na ose $O'x'$ (obr. 3.7) a která v ní má délku l_0 (klidová délka), prostorové souřadnice jejich konaných bodů pro všechna t' jsou $(x'_1, 0, 0)$, $(x'_2 = x'_1 + l_0, 0, 0)$. Délku tyče v soustavě S určíme tak, že určíme souřadnice $x_1, x_2 (= x_1 + l)$ jejich koncových bodů v S v libovolném, ale pevném, čase t_0 . Z Lorentzovy transformace, rovnice (3.12)a, plyne

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

odečtením dostaneme

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

což je vztah (3.10).

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

Problém — paradox Stojící vlak má stejnou délku l_0 jako tunel, jímž bude projíždět, platí $l_0 = L_0$, kde L_0 je délka tunelu. Projíždí-li vlak relativistickou rychlostí \vec{v} tunelem, tvrdí na základě svých měření.

1. Pozorovatel Z stojící na Zemi: tunel se pohybuje rychlostí $-\vec{v}$, jeho délka je menší než l_0 , tedy $l < l_0 = L_0$. To značí, že vlak je kratší než tunel. V některém okamžiku je vlak celý v tunelu schován a ještě v tunelu zbývá místo.
2. Pozorovatel V stojící ve vlaku: tunel se pohybuje rychlostí $-\vec{v}$, jeho délka L je menší L_0 , tj. $L < L_0 = l_0$. To značí, že tunel je kratší než vlak. V některém okamžiku je současně část lokomotivy i posledního vagonu vně tunelu. Pokuste se vysvětlit.

3.1.4 Relativistická dynamika

ckadynamika}

V této části jsou vysvětleny základní výsledky mechaniky hmotného bodu ve speciální teorii relativity. Při definici veličin a při formulaci základních zákonů se vychází z požadavků kovariantnosti rovnic vyjadřujících zákony mechaniky vzhledem k Lorentzově transformaci, z požadavků platnosti zákonů zachování relativistické hmotnosti, hybnosti a energie a požadavku, aby zákony speciální teorie relativity přešly pro $v/c \rightarrow 0$ v zákony klasické fyziky. Z těchto požadavků vyplývá zejména: závislost hmotnosti na rychlosti hmotného bodu, dále definice hybnosti hmotného bodu a relativistická pohybová rovnice pro hmotný bod, jež jsou sice formálně shodné s výsledky klasické fyziky, jejichž fyzikální obsah i jejich důsledky se však od klasické fyziky podstatně liší. Důležitý je relativistický vztah pro kinetickou energii. Jedním z nejdůležitějších vztahů speciální teorie relativity je vztah vyjadřující vzájemnou souvislost energie tělesa s jeho hmotností.

- Cíl:**
- I) Umět použít základní zákony a vztahy zvýrazněné v rámečcích, vysvětlit pojmy, veličiny a výsledky zde v textu uvedené;
 - II) Zpaměti relativistické vztahy pro hmotnost a hybnost hmotného bodu, vysvětlit důsledky plynoucí ze závislosti hmotnosti na rychlosti, umět znázornit závislosti hmotnosti a hybnosti na rychlosti graficky;
 - III) Vyslovit, vysvětlit a na příkladech ilustrovat zákon zachování relativistické hmotnosti a energie;
 - IV) Napsat relativistickou pohybovou rovnici pro hmotný bod a vysvětlit souvislost mezi zrychlením hmotného bodu a výslednicí sil, která na něj působí;
 - V) Napsat relativistický vztah pro kinetickou energii hmotného bodu (tělesa) a pro jeho celkovou energii, vyložit a na příkladech ilustrovat jejich význam. Znázornit grafiky závislosti rychlosti hmotného bodu na jeho kinetické energii;
 - VI) Vysvětlit vztah mezi relativistickou a klasickou mechanikou.

3.1.5 Relativistická hmotnost

Základní pohybové zákony mechaniky jsou pohybové zákony pro hmotný bod. V klasické mechanice jsou to tři pohybové zákony. První z nich - zákon setrvačnosti vyslovující tvrzení o existenci inerciální vztažné soustavy platí, samozřejmě, i ve speciální teorii relativity. Podobně je tomu

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

i s třetím pohybovým zákonem - principem akce a reakce. Pokud jde o druhý pohybový zákon, vyjádřený vztahem

$$\{2.1-14\} \quad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_v, \quad (3.14)$$

tomu tak není. Tato rovnice je kovariantní vzhledem ke Galileově transformaci, není však kovariantní vzhledem k transformaci Lorentzově. Skutečně: napíšeme-li ji např. v soustavě S pro těleso, které se pohybuje ve směru osy Ox , ve tvaru $du_x/dt = F_x$ a zavedeme-li do této rovnice veličiny, charakterizující jeho pohyb v inerciální soustavě S' , pak namísto u_x zavedeme $u'_{x'}$ vztahem

$$u'_{x'} = \frac{u_x - \frac{v}{c^2} t}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}.$$

Podobně musíme nahradit derivaci podle t derivací podle t' atd. Výsledná rovnice nebude mít tvar $m d^2 u'_{x'}/dt'^2 = F'_{x'}$, nýbrž bude mnohem složitější. To však znamená, že kdyby v jedné inerciální soustavě platila pohybová rovnice ve tvaru (3.14) tak, aby nová rovnice byla kovariantní vzhledem k Lorentzově transformaci a aby při nerelativistických rychlostech přešla v rovnice (3.14), neboť při nerelativistických rychlostech je rovnice (3.14) správná.

Relativisticky kovariantní pohybovou rovnicí hmotného bodu lze získat různými způsoby. Naznačíme zde velmi stručně myšlenkový postup, který však vede k získání vztahu vyjadřujícího závislost hmotnosti tělesa na jeho rychlosti v ve známém tvaru

$$\{2.1-15\} \quad m = \frac{m_0}{1 - \sqrt{v^2/c^2}} \cdot \text{relativistická hmotnost tělesa} \quad (3.15)$$

Zde je m_0 tzv. klidová hmotnost tělesa, tj. hmotnost tělesa ve vztažné soustavě, vzhledem k níž je v klidu. Veličina m je hmotnost téhož tělesa v soustavě, vzhledem k níž se těleso pohybuje rychlostí v . Připomeňme, že hmotnost je mírou setrvačných vlastností tělesa.

Zmíněná úvaha vedoucí ke vztahu (3.15) je takováto: Základní zákony fyziky jsou zákony zachování - zachování energie, hmotnosti, hybnosti, elektrického náboje atd. Proto při zobecňování fyzikálních zákonů, o nichž je známo, že platí za určitých omezujících podmínek, je nutno definovat nové zobecnění fyzikální veličiny tak, aby zákony zachování zůstaly v platnosti. Ve speciální teorii relativity se proto hmotnost m hmotného bodu a jeho hybnost \vec{p} definují tak, aby pro celkovou hmotnost hmotné soustavy definovanou vztahem $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ a pro celkovou hybnost hmotné soustavy definovanou vztahem $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$ platily zákony zachování: hmotnost izolované hmotné soustavy i její hybnost v určité vztažné soustavě je stálá při všech dějích, které v ní probíhají. Vyjádřeno matematicky:

$$\{2.1-16XX\} \quad \text{a) } m = \text{konst.}, \quad \text{b) } \vec{p} = \text{konst.} \quad (3.16)$$

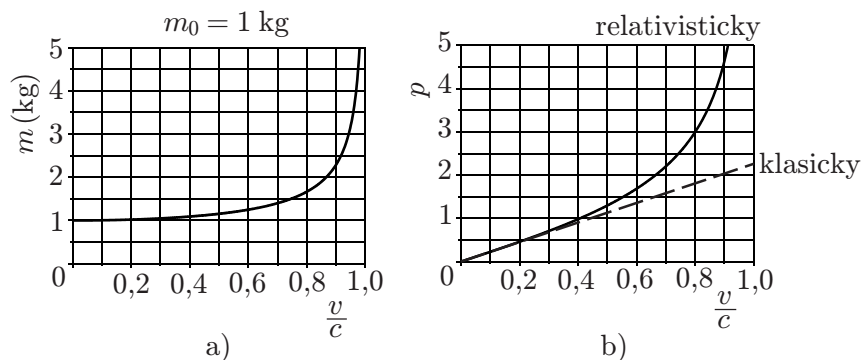
Rozborem jednoduchých mechanických dějů, např. rozborem srážky dvou pružných částic s užitím vztahů (3.16)a,b a kinematických vztahů speciální teorie relativity, které jsme odvodili v předešlé části, lze dokázat, že hmotnost částice pohybující se v určité vztažné soustavě S rychlostí \vec{v} je dána v této soustavě vztahem (3.15). Její hybnost v soustavě S je dána vztahem

$$\{2.1-17XX\} \quad \vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.17)$$

Informace: Informace ke vztahu (3.15) pro m a ke vztahu (3.17) pro \vec{p}

1. Ze vztahu (3.15) plyne, že relativistická hmotnost tělesa není veličina, která by charakterizovala jen těleso, nýbrž charakterizuje i jeho pohybový stav. Závisí na rychlosti tělesa, tj. i na volbě vztažné soustavy;

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA



Obr. 3.14

{obr2.1-14}

- Hmotnost m pohybujícího se tělesa je vždy větší než jeho klidová hmotnost m_0 , platí $m \geq m_0$. Pouze při nerelativistických rychlostech je m přibližně konstantní, $m \doteq m_0$. Přitom klidová hmotnost m_0 tělesa je totožná s jeho hmotností definovanou v klasické fyzice;
- Pro $v \rightarrow c$ je $m \rightarrow \infty$. Hmotnosti relativistických částic urychlených v urychlovačích jsou mnohonásobně větší než jejich klidové hmotnosti. Žádný objekt s nenulovou klidovou hmotností nemůže dosáhnout rychlosti světla. Závislost hmotnosti m na v a hybnosti p na v je znázorněna v obr. 3.14a,b. Např. elektron, který získal v urychlovači rychlost $v = 0,999\,999\,999\,7c$, tj. jen asi o 10 cm/s menší, než je rychlost světla, má hmotnost $m \doteq 4 \cdot 10^4 m_0$, kde m_0 je jeho klidová hmotnost;
- Vztah (3.16)a vyjadřuje, že se zachovává relativistická hmotnost soustavy. Objasní to příklad: Dvě stejné částice o klidových hmotnostech m_0 se pohybují v soustavě S proti sobě stejně velkými opačně orientovanými rychlostmi \vec{v} , \vec{v}' . Srazí se, srážka je nepružná, takže vznikne jedno těleso, které je v S v klidu. Hmotnost M tohoto tělesa (a je to jeho klidová hmotnost, tedy M_0) není rovna $2m_0$, nýbrž je dána vztahem

$$M = M_0 = m + m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (> 2m_0)$$

Tedy výsledná klidová hmotnost této soustavy na konci děje je větší, než součet klidových hmotností jejich členů! Klidová hmotnost se nezachovává;

- Relativistické zvětšování hmotnosti bylo experimentálně ověřeno již r. 1909 a od té doby bylo prokázáno nesčetkrát s velkou přesností. Vztahy (3.15) a (3.17) se běžně užívají při studiu všech dějů, kde se objekty pohybují relativistickými rychlostmi (televizní obrazovka, urychlovače atd).

3.1.6 Relativistická pohybová rovnice

V odst. 3.1 jsem uvedli, že druhý pohybový zákon klasické fyziky, rovnice (3.14), není kovariantní vzhledem k Lorentzově transformaci, proto při relativistických rychlostech neplatí. Jeho relativistické zobecnění musí být vyjádřeno rovnicí, která je kovariantní vzhledem k Lorentzově

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

transformaci a která pro nerelativistické rychlosti přejde v rovnici (3.14). Ukazuje se, že tyto požadavky splňuje rovnice

$$\{2.1-16\} \quad \text{a) } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \text{kde} \quad \text{b) } \vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (3.18)$$

tj. rovnice

$$\{2.1-17\} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \vec{F}. \quad \text{relativistická pohybová rovnice pro hmotný bod} \quad (3.19)$$

Zde \vec{p} je hybnost hmotného bodu o klidové hmotnosti m_0 pohybujícího se rychlostí \vec{u} a \vec{F} je výslednice sil, které na něj působí.

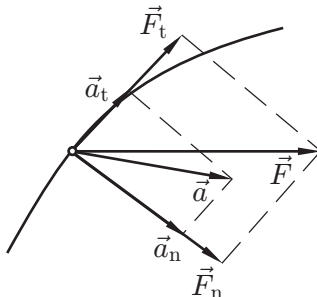
Vztahem (3.18)a je formálně shodný se vztahem $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ klasické fyziky, ve skutečnosti však se od něj velmi podstatně odlišuje tím, že hmotnost m závisí na rychlosti hmotného bodu. Ježto rychlost \vec{u} závisí (obecně) na čase, závisí i m na čase a v derivaci rovnice (3.19) se to projeví. Důsledkem jsou některé zvláštnosti zákonitostí pohybů. Navíc se ukazuje, že ve speciální teorii relativity není \vec{F} invariantní.

3.1.6.1 Síla a zrychlení mají (obecně) různý směr.

Vyplývá to ze vztahu (3.19), v němž provedeme naznačenou derivaci. Přitom \vec{u} (a rovněž u) je funkcí času.

$$\{2.1-18\} \quad \vec{F} = \frac{d}{dt} \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \vec{u} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{m_0 \frac{u}{c^2}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{du}{dt} \vec{u} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \vec{a}. \quad (3.20)$$

Ježto \vec{u} má (obecně) jiný směr než \vec{a} , nejsou \vec{a} a \vec{F} (obecně) rovnoběžné (obr. 3.15).



Obr. 3.15

3.1.6.2 Podélná a příčná hmotnost

a) Podélná hmotnost

Působí-li síla \vec{F} ve směru rychlosti \vec{u} , označíme průměty veličin \vec{F} , \vec{u} a \vec{a} do směru rychlosti \vec{u} symboly F , u , a . Z předešlého vztahu dostaneme

$$F = \frac{m_0 \frac{u}{c^2}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} au + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} a = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} a.$$

V analogii se vztahem $F = ma$ se nazývá veličina $m_0/(1 - \frac{u^2}{c^2})^{3/2}$ podélná hmotnost.

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

b) Příčná hmotnost

Působí-li síla \vec{F} kolmo na rychlost \vec{u} , lze dokázat, že platí $F = ma$, kde $m = m_0/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. Poslední veličina se proto nazývá příčná hmotnost.

3.1.6.3 Pro $u \ll c$,

tj. pro nerelativistické rychlosti, přechází vztah (3.19) v klasický vztah $m_0\vec{a} = \vec{F}$. Je to zřejmé ze vztahu (3.20), v němž položíme $u^2/c^2 = 0$.

{kpr2.1-5} **KP 3.1.4-1** —————

Na částici o klidové hmotnosti m_0 , která je nejprve v klidu, začne v lineárním urychlovači v čase $t = 0$ působit síla \vec{F} . Vyšetřete její pohyb

Řešení:

V tomto případě plyne z rovnice (3.20), že veličiny \vec{F} , \vec{a} , \vec{u} mají stejný směr, částice se bude pohybovat po přímce. Orientujme tuto přímku, kterou zvolíme za osu Ox , ve směru \vec{u} a označíme průměty veličin \vec{u} , \vec{a} , \vec{F} do Ox symboly u , a , F . Z rovnice (3.20) dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = F \rightarrow \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \int_0^t F dt = Ft.$$

Z tohoto vztahu určíme u jako funkci času

{2.1-19}

$$u = c \frac{(F/m_0 c)t}{\sqrt{1 + (F/m_0 c)t}}. \quad (3.21)$$

Diskuse: —————

Pro velmi malá t , tak malá, že platí $(F/(m_0 c)^2)t^2 \ll 1$, nabude poslední vztah tvar

$$u \doteq \frac{F}{m_0} t.$$

To je však známý vztah klasické fyziky: $u = at$, kde $a = F/m_0$. To značí: Na začátku pohybu roste rychlost lineárně s časem, částice se pohybuje rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a = F/m_0$, tak jako podle zákonů klasické fyziky. Pro velmi velká t (pro $t \rightarrow \infty$) lze zanedbat ve jmenovateli ve vztahu (3.21) jedničku, takže $u \doteq c$ ($u \rightarrow c$). To značí: Po uplynutí dostatečně velkého času se při konstantní působící síle se rychlost částice téměř nezvětšuje a blíží se k c .

Dráha: Ze vztahu (3.21), v němž položíme $u = dx/dt$, dostaneme integrací za předpokladu, že částice byla na začátku urychlování v poloze $x = 0$, vztah

{2.1-20}

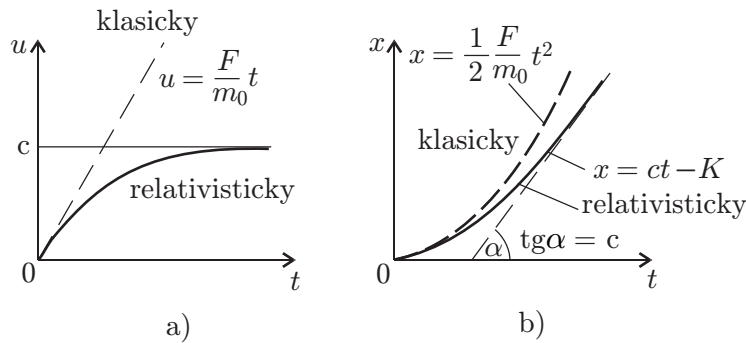
$$x = \int_0^t u(t) dt = \dots = \frac{m_0 c^2}{F} \left(\sqrt{1 + (F/m_0 c)^2 t^2} - 1 \right). \quad (3.22)$$

Pro velmi malé hodnoty času t můžeme rozvinout funkci $x(t)$ v okolí bodu $t = 0$ v Taylorovu řadu a v rozvoji se omezit na první člen. Vychází

$$x \doteq \frac{1}{2} at^2 \quad \text{kde} \quad a = \frac{F}{m_0}.$$

Pohyb je zpočátku přibližně rovnoměrně zrychlený. Pro $t \rightarrow \infty$ nabude vztah (3.22) tvar $x \doteq ct - m_0 c^2/F$. To je vztah pro rovnoměrný pohyb rychlostí c . Závislost rychlosti a dráhy na čase, dané vztahy (3.21), (3.22), jsou graficky znázorněny v obr. 3.16.

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA



Obr. 3.16

{obr2.1-16}

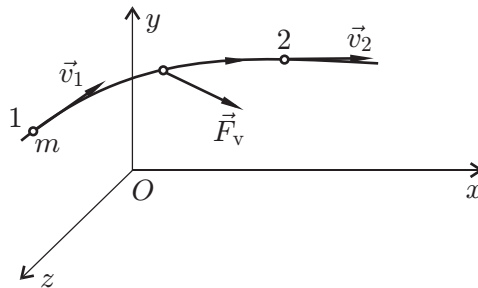
3.1.7 Relativistická energie

Jedním z nejdůležitějších výsledků teorie relativity je objevení souvislosti mezi hmotností m fyzikálního objektu (částice, tělesa, hmotné soustavy atd.) a jeho celkovou energií E , vyjádřené vztahem

{2.1-21}

$$E = mc^2. \quad \text{vztah mezi energií a hmotností} \quad (3.23)$$

Naznačíme postup, kterým se k tomuto vztahu dojde a provedeme jeho diskusi.



Obr. 3.17

{obr2.1-17}

3.1.7.1 Kinetická energie

Při definici kinetické energie částic nebo tělesa (hmotného bodu) ve speciální teorii relativity se volí stejný postup jako v klasické fyzice. V klasické fyzice je kinetická energie hmotného bodu definována v určité vztahné soustavě vztahem $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ na základě tohoto výsledku obr. 3.17: Pohybuje-li se hmotný bod z bodu 1 do bodu 2 účinkem sil o výslednici \vec{F}_v , pak práce $W_{1 \rightarrow 2}$ této výslednice na uvedeném úseku trajektorie souvisí s jeho počáteční rychlostí v_1 a konečnou rychlostí v_2 vztahem

{2.1-22}

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k,2} - E_{k,1}, \quad (3.24)$$

kde jsem zavedli kinetickou energii E_k vztahem $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ tak, aby pro $v = 0$ bylo $E_k = 0$, viz ods. 2.5.4.

Provede-li se analogicky výpočet práce síly \vec{F}_v na úseku 1,2 v obr. 3.17 pro hmotný bod

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

o klidové hmotnosti m_0 v rámci speciální teorie relativity, dojde se k výsledku

$$\{2.1-23\} \quad W_{1 \rightarrow 2} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = m_2 c^2 - m_1 c^2 = \Delta m c^2, \quad (3.25)$$

kde m_1 a m_2 jsou relativistické hmotnosti pohybujícího se hmotného bodu na začátku a na konci úseku 1,2. Kinetická energie E_k hmotného bodu se definuje opět tak, aby platil vztah

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{k,2} - E_{k,1} \quad \text{a aby pro } v = 0 \text{ měla } E_k \text{ hodnotu } E_k = 0.$$

S užitím vztahu (3.25) odsud plyne: $E_k = m c^2 + K$, kde $K = -m_0 c^2$.

Výsledek:

Hmotný bod o klidové hmotnosti m_0 pohybující se (v určité vztažné soustavě) rychlostí \vec{v} má kinetickou energii

$$\{2.1-24\} \quad E_k = m c^2 - m_0 c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \right) c^2. \quad \begin{array}{l} \text{relativistická kinetická energie} \\ \text{hmotného bodu} \end{array} \quad (3.26)$$

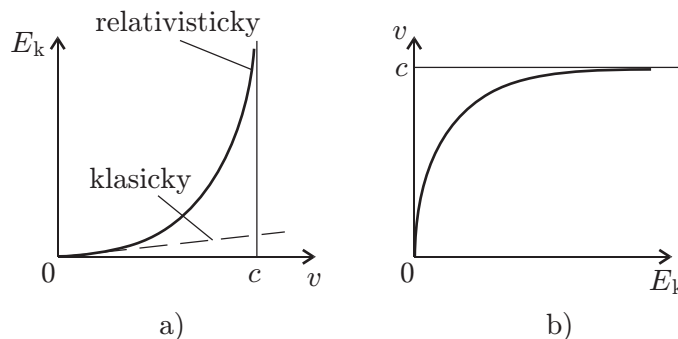
Při této definici platí

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{k,2} - E_{k,1}.$$

Všimněme si, že přírůstek kinetické energie $\Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\{2.1-25\} \quad \Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1} = (m_2 c^2 - m_0 c^2) - (m_1 c^2 - m_0 c^2) = (m_2 - m_1) c^2 = \Delta m c^2. \quad (3.27)$$

Závislost E_k na v , dána vztahem (3.26), je graficky znázorněna v obr. 3.18a (při daném m_0). V obr. 3.18b je pro názornost vynesena graficky závislost rychlostmi na kinetické energii. Z obr. 3.18b je zřejmé, že při urychlování částic nejprve jejich rychlost prudce roste, pak se vzrůst rychlosti zmírňuje a v závěru se rychlost téměř nezvětšuje a asymptoticky se blíží k c (viz příklad 2.1-5).



Obr. 3.18

Např. v lineárním urychlovači, v němž urychlované elektrony získávají celkovou kinetickou energii $20 \text{ GeV} = 2 \cdot 10^{10}$ elektronvoltů ($1 \text{ eV} \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$), nabude elektron dodáním prvních 10 GeV rychlost $0,999\,999\,999 \text{ c}$, tj. rychlost jen o $0,39 \text{ m/s}$ nižší než c . Zvýší-li se jeho kinetická energie o dalších 10 GeV vzroste jeho rychlost o pouhých $0,29 \text{ m/s}$ a přiblíží se rychlosti světla na $0,1 \text{ m/s}$.

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

Relativistická kinetická energie definována vztahem (3.26) nemá zdánlivě mnoho společného s klasickým vztahem $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Není však tomu tak, pro $v \ll c$ přechází vztah (3.26) v klasický vztah. Skutečně: rozvineme-li výraz $(1 - x^2)^{-1/2}$, kde $x = v/c$, ve vztahu (3.26) podle binomické věty (nebo vyjádříme-li jej Taylorovou řadou v okolí bodu $x = 0$), dostaneme

$$E_k = m_0c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right] = m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots - 1\right) \doteq \frac{1}{2}m_0v^2.$$

Zde jsme se nakonec omezili na první člen rozvoje. Výsledek pro $v \ll c$ platí

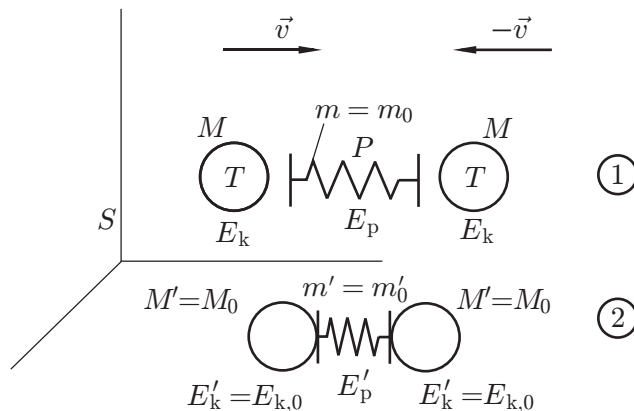
$$\{2.1-26\} \quad E_k = mc^2 - m_0c^2 \doteq \frac{1}{2}m_0v^2 \quad (3.28)$$

v soulase s klasickou fyzikou.

3.1.7.2 Obecný vztah mezi energií a hmotností

Vztah (3.27) vyjadřující úměrnost mezi $\Delta E_k \sim \Delta m$ lze zobecnit na formy energie: je-li ΔE změna jakékoli energie hmotné soustavy a Δm změna její hmotnosti, platí

$$\{2.1-27\} \quad \Delta E = \Delta mc^2. \quad (3.29)$$



Obr. 3.19

{obr2.1-19}

V dalším ukážeme, jak tento vztah vyplývá z požadavku platnosti zákona zachování (relativistické) hmotnosti a zákona zachování energie izolované soustavy pro konkrétní případ potenciální energie.

Uvažujme o izolované hmotné soustavě sestávající z pružiny P a dvou stejných těles T (obr. 3.19). V první fázi děje (stav 1) je pružina v soustavě S v klidu a tělesa se pohybují směrem k S rychlostmi \vec{v} , $-\vec{v}$ tak, že poté současně narazí na pružinu. Pružina se deformuje a ve stavu 2, kdy je maximálně deformována, je celá soustava v klidu. Označme hodnoty hmotností a energií ve stavu 1 bez čárky, ve stavu 2 s čárkou. Přitom M a E je hmotnost a energie každého z těles T ; m a E_p je hmotnost a energie pružiny P . Veličiny m_0 , m'_0 , M_0 jsou klidové hmotnosti.

3.1.8 Zákon zachování energie: $E' = E$, tj.

$$E'_P + 2E'_T = E_P + 2E_T + 2(E_{0T} + E_{kT})$$

neboli

$$\{2.1-28\} \quad E'_P + 2E_{0T} = E_P + 2E_{0T} + 2(M - M_0)c^2. \quad (3.30)$$

Zde jsme vyjádřili E_T ve tvaru $E_T = T_{0T} + E_{kT}$, kde E_{kT} je kinetická energie tělesa T a E_{0T} nějaká (neznámá) konstanta. Dále jsme užili vztahu $E'_T = E_{0T}$.

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

3.1.9 Zákon zachování hmotnosti: $m'_{vsl} = m_{vsl}$ tj.

$$\{2.1-29\} \quad m'_0 + 2M_0 = m_0 + 2M. \quad (3.31)$$

Odtud ihned plyne: ježto hmotnost M tělesa T v pohybu je větší než jeho klidová hmotnost M_0 , je $m'_0 > m_0$, tj. deformovaná pružina má větší hmotnost než pružina nedeformovaná, takže $\Delta m = m'_0 - m_0 > 0$.

Vypočteme-li ze vztahu (3.30) veličinu $\Delta E_P = E'_P - E_P$, dostaneme s užitím vztahu (3.31) vynásobeného c výsledek

$$\Delta E_P = 2(M - M_0)c^2 = (m'_0 - m_0)c^2,$$

tj.

$$\{2.1-30\} \quad \Delta E_P = \Delta mc^2. \quad (3.32)$$

To je vztah zcela analogický vztahu (3.27). Poznamenejme, že zatímco se při zvětšení kinetické energie tělesa zvětšila jeho relativistická hmotnost m , přičemž jeho klidová hmotnost se nezměnila, pak při zvětšení elastické energie pružiny se zvětšila její klidová hmotnost.

Analogickou úvahu lze zřejmě provést pro jakýkoliv druh energie, takže platí obecný vztah (3.29).

Vztah (3.29) byl ověřen mnohokrát experimentálně a běžně se jej užívá zejména v atomové a kvantové fyzice, jaderné energetice atd. Ohřejme-li např. těleso, zvětší se tím nepatrně jeho hmotnost, právě tak jako se zvětšuje hmotnost pružiny hodinek při jejich natahování. Změny hmotnosti v těchto případech jsou ovšem zanedbatelně malé, platí pro ně $\Delta m = \Delta E/c^2$, kde $c^2 \doteq 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2$. V jaderné fyzice však dochází často k velkým změnám energie a příslušné změny hmotnosti se projevují velmi zřetelně. Např. při vzniku atomových jader syntézou elementárních částic se uvolňují relativně značná množství energie. Hmotnost soustavy částic, z nichž vzniká jádro, se zmenšuje. Proto klidová hmotnost atomového jádra je vždy menší než součet klidových hmotností protonů a neutronů v jádře obsažených. Rozdíl obou hmotností se nazývá hmotnostní schodek.

Úvahami do jisté míry analogickými těm, které jsme uvedli, lze dojít k závěru, že celková energie hmotné soustavy m je dána vztahem

$$\{2.1-31\} \quad E = mc^2. \quad \text{relativistická energie} \quad (3.33)$$

Tento vztah je analogický vztahu (3.29). Je-li hmotná soustava v klidu a má-li klidovou hmotnost m_0 , je její energie dána vztahem

$$\{2.1-32\} \quad E_0 = m_0c^2. \quad \text{klidová energie} \quad (3.34)$$

Tato energie se nazývá klidová energie hmotné soustavy. S užitím vztahů (3.33) a (3.34) lze napsat vztah (3.26) pro kinetickou energii hmotného bodu ve tvaru

$$E_k = E - E_0 \rightarrow E = E_k + m_0c^2.$$

Ze vztahu (3.33) plyne, že v látkách je koncentrováno obrovské množství energie. V jaderných elektrárnách se jí zužitkovává jen nepatrná část.

3.1.10 Příklady k části 3

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

{pr2.1-1} **KP 3.1.4-2** _____

Mimozemský kosmický cestovatel prolétá sluneční soustavou rychlostí $v = 0,99 c$. Předpokládejte, že průměr sluneční soustavy je roven průměru trajektorie planety Pluta a určete:

1. Dobu průletu naměřenou přístroji pevnými ve sluneční soustavě;
 2. Dobu průletu, kterou naměří cestovatel svými přístroji;
 3. Průměr sluneční soustavy, kterou naměří cestovatel.
-

{pr2.1-2} **KP 3.1.4-3** _____

Kosmický cestovatel prolétá poblíž Země a vrátí se po dvou hodinách letu měřených na Zemi. Jeho hodiny však ukazují, že uplynula pouze hodina. Určete velikost jeho rychlosti v geocentrické soustavě za předpokladu, že byla během letu přibližně stálá.

{pr2.1-3} **KP 3.1.4-4** _____

Elektron byl urychlen v televizní obrazovce tak, že při dopadu se pohyboval rychlostí $v = c/3 = 10^8$ m/s. Délka jeho trajektorie měřená v laboratorní soustavě byla $l = 30$ cm. Pro okamžik dopadu elektronu na obrazovku určete jeho:

1. Hmotnost;
 2. Hybnost;
 3. Energii a) celkovou, b) klidovou, c) kinetickou;
 4. Napětí na televizní obrazovce (pozn.: urychlující napětí se číselně rovná práci vykonané silami urychlujícího pole působícími na elektron, vyjádřené v elektronvoltech);
 5. Délku trajektorie měřenou v soustavě s elektronem v okamžiku dopadu.
-

{pr2.1-4} **KP 3.1.4-5** _____

Určete celkovou energii:

1. Klidné částice o hmotnosti rovné atomové jednotce hmotnosti u ;
 2. Klidného elektronu. Vyjádřete v eV.
-

{pr2.1-5} **KP 3.1.4-6** _____

Elektron byl urychlen v televizní obrazovce elektrickým polem o napětí $U = 1,5 \cdot 10^4$ V, takže získal kinetickou energii $E_k = 1,5 \cdot 10^4$ eV. Pro okamžik dopadu elektronu na obrazovku určete jeho:

1. Celkovou energii;
 2. Hmotnost;
 3. Rychlost;
 4. Rychlost za předpokladu, že by platily zákony klasické fyziky.
-

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

{pr2.1-6} **KP 3.1.4-7** _____

Určete maximální napětí, jímž je možno urychlit elektron tak, aby jeho rychlost nepřesáhla hodnotu $0,1 c$.

{pr2.1-7} **KP 3.1.4-8** _____

Pro elektron dopadající na antikatodu v rentgenové trubici pracující na napětí 80 kV určete:

1. Celkovou energii;
 2. Hmotnost;
 3. Rychlost;
 4. Relativní zkrácení elektronu v podélném směru.
-

{pr2.1-8} **KP 3.1.4-9** _____

Sluneční záření dopadá do horních vrstev atmosféry s intenzitou $I = 1,37 \text{ kW/m}^2$. Určete:

1. Výkon, se kterým vyzařuje Slunce;
 2. Rychlost, se kterou se vyzařováním zmenšuje hmotnost Slunce;
 3. Úbytek hmotnosti Slunce vlivem vyzařování za 24 hodin. Určete objem vody o stejné hmotnosti.
-

{pr2.1-9} **KP 3.1.4-10** _____

Určete:

1. Hmotnostní schodek a
2. Vazebnou energii částic: a) deuteronu, b) částice α .

Pozn.: Deuteron je jádro deuteria, obsahuje 1 proton 1 neutron; částice α je jádro hélia, obsahuje dva protony a dva neutrony). Potřebné hodnoty najdete v tabulce na straně 400 tohoto textu.

{pr2.1-10} **KP 3.1.4-11** _____

Dokažte, že pro superrelativistickou částici, která se pohybuje rychlostí téměř rovnou rychlosti světla, platí

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} \doteq \sqrt{2} \sqrt{(c - v)/c}.$$

{pr2.1-11} **KP 3.1.4-12** _____

S užitím výsledku příkladu **KP 3.1.4-11** řešte příklad: Fiktivní kosmická loď se pohybuje ve směru Země-Měsíc rychlostí, která je jen o 3 m/s menší než rychlost světla c . Určete:

1. Dobu letu $Z \rightarrow M$ zjištěnou přístroji pevnými v geocentrické soustavě;
 2. Dobu letu naměřenou v lodi;
 3. Vzdálenost Země-Měsíc naměřenou v lodi.
-

3.1. RELATIVISTICKÁ KINEMATIKA

{pr2.1-12} **KP 3.1.4-13** _____

Dva elektrony se pohybují v laboratorní soustavě rychlostmi $v_1 = 0,5 c$, $v_2 = 0,6 c$ v jedné přímce v opačných směrech. Určete jejich relativní rychlost.

{pr2.1-13} **KP 3.1.4-14** _____

Elektron a proton se pohybují v laboratorní soustavě po přímce ve stejném směru, první z nich rychlostí $v_1 = 0,9 c$, druhý rychlostí $v_2 = 0,95 c$. Určete jejich relativní rychlost.

{pr2.1-14} **KP 3.1.4-15** _____

Z transformačních rovnic (3.11) odvoďte rovnice (3.12).

{pr2.1-15} **KP 3.1.4-16** _____

Kosmická loď K_1 letící od Země k Jupiteru míjí Mars rychlostí $v_1 = 0,4 c$. Posádka zpozorujeme před sebou jinou kosmickou loď K_2 , pohybující se směrem k Jupiteru rychlostí $v_2 = 0,8 c$ vzhledem ke K_1 a má za sebou další kosmickou loď K_3 , která se vzhledem k ní pohybuje rychlostí $v_3 = 0,8 c$ směrem k Zemi. Určete, jakou rychlost lodí K_1 , K_2 , K_3 zaregistrují přístroje na Marsu.

{pr2.1-16} **KP 3.1.4-17** _____

Určete maximální napětí, kterým může být urychlen původně klidový proton, má-li jeho rychlost přesáhnout $0,1 c$.

{pr2.1-17} **KP 3.1.4-18** _____

Kladně nabitě klidné piony mají hmotnost $m_0 = 273 m_e$ a střední dobu života $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8}$ s. V urychlovači získají rychlost $v = 0,8 c$. Určete:

1. Střední dobu jejich života v laboratorní soustavě;
 2. Střední dráhu, kterou urazí v laboratoři, než se rozpadnou (dobu pohybu v urychlovači zanedbejte);
 3. Střední vzdálenost urychlovače od místa rozpadu pionů měřenou v jejich klidové vztažené soustavě;
 4. Hmotnost pionů v laboratorní soustavě;
 5. Kinetickou energii pionů v laboratorní soustavě.
-

{pr2.1-18} **KP 3.1.4-19** _____

(Science fiction). Učitel zadal studentům hodinovou kontrolní práci, nasedl do kosmické lodi a vzdaloval se (k velkému potěšení studentů) rychlostí $v = 0,97 c$. Po hodině letu, naměřené na jeho hodinkách, zaslal studentům rádiovou depeši, aby práci ukončili, jakmile jim depeše přijde. Ti to učinili. Jak dlouho pracovali na kontrolní práci?

4. Základy molekulárně kinetické teorie

4.1 Molekulová stavba látek

V této části jsou stručně vyloženy základní pojmy, názvosloví a veličiny molekulové stavby látek: hmotnost molekuly, relativní molekulová hmotnost, látkové množství a jeho jednotka, Avogadrova konstanta a její význam.

Cíl: I) Vyložit základní pojmy a vztahy zvýrazněné v rámečcích a definovat veličiny odpovídající veličiny.

II) Samostatně řešit jednoduché příklady v tomto textu a příklady podobného typu, řešení zdůvodnit.

Molekulová fyzika představuje obor fyziky vycházející z molekulárně kinetických představ. Zabývá se stavbou a vlastnostmi látek. V souhlase s těmito představami libovolná látka (tuhá, kapalná nebo plynná) se skládá z velkého počtu velmi malých částic - molekul. Molekuly každé látky se nacházejí v neuspořádaném, chaotickém pohybu všemi směry, kde žádný směr pohybu nemá přednost. Intenzita pohybu závisí na teplotě látky a rozměrech částic.

Bezprostředním důkazem existence chaotického pohybu molekul je brownovský pohyb. Tento jev spočívá v tom, že velmi malé částice (viditelné jen mikroskopem) rozptýlené v kapalině, vždy se nachází ve stavu neustálého neuspořádaného pohybu, který nezávisí na vnějších příčinách, ale je projevem vnitřního pohybu látek. Brownovské částice uskutečňují pohyb vlivem nárazu molekul na pozorované částice.

Molekulárně kinetická teorie vysvětluje fyzikální jevy na základě pohybu molekul, tj. vysvětluje tepelné vlastnosti látek z hlediska jejich molekulové struktury a využívá zákonů statistické fyziky. Zde budeme aplikovat kinetickou teorii látek jen na plyny, protože interakce mezi molekulami v plynech jsou mnohem menší než v kapalinách a pevných látkách a matematické vyjádření je snazší.

Termodynamika pojednává jen o makroskopických veličinách, které jsou přímo pozorovatelné a měřitelné, jako teplota, tlak a objem. Její základní zákony, vyjádřené pomocí těchto veličin, neříkají nic o složení látky z atomů a molekul. Všechny termodynamické proměnné veličiny dovedeme vyjádřit jako určitý průměr vlastností atomů a molekul. Počet atomů a molekul je obvykle v makroskopickém systému tak veliký, že takové průměry jsou přesně definované hodnoty.

Molekuly a atomy jsou velmi složité útvary, skládající se z jader a obalů osazených elektrony. Tyto základní částice se navíc neřídí zákony klasické mechaniky. O skutečném tvaru molekul víme velmi málo a velikost nemůžeme přesně měřit. Ze zkušenosti víme, že molekuly jsou útvary dosti stabilní. Existuje veličina, která je pro molekulu charakteristická, a tou je hmotnost molekuly.

V kinetické teorii látek zavádíme jednak hmotnost molekuly m , jednak relativní molekulovou hmotnost M_r . Hmotnost molekuly vyjadřujeme v kg. Relativní molekulová hmotnost M_r je bezrozměrná veličina, udávající, kolikrát je hmotnost molekuly větší než klidová hmotnost jedné dvanáctiny atomu uhlíku ^{12}C (kterou značíme symbolem m_u)

$$m_u = (1,660\,44 \pm 0,000\,08) \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

4.2. IDEÁLNÍ PLYN

Hmotnost molekuly lze pak vyjádřit vztahem

$$\{3.1-1\} \quad m = M_r m_u . \quad (4.1)$$

Mějme určité množství látky o hmotnosti M_1 , její relativní molekulová hmotnost nechť je $M_{r,1}$. Počet N_1 molekul látky o hmotnosti M_1 lze určit ze vztahu

$$M_1 = N_1 m_1 = N_1 M_{r,1} m_u ,$$

kde m_1 je hmotnost molekuly. Analogický vztah můžeme psát pro druhou látku o hmotnosti M_2

$$M_2 = N_2 m_2 = N_2 M_{r,2} m_u .$$

Pro poměr hmotností obou látek dostáváme

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1 M_{r,1}}{N_2 M_{r,2}} .$$

Obsahují-li obě množství látek stejná počet molekul ($N_1 = N_2$), pak hmotnosti dvou látek jsou ve stejném poměru jako jejich relativní molekulové hmotnosti

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{M_{r,1}}{M_{r,2}} .$$

Představa, že se látka skládá z molekul, umožňuje posuzovat množství látky podle počtu molekul. Zavádí se proto veličina látkové množství, které je určeno počtem molekul v jistém objemu látky. Jednotkou látkového množství je mol, což je takové množství soustavy, které obsahuje stejný počet elementárních jedinců, kolik je atomů ve 0,012 kg nuklidu uhlíku ^{12}C . Pro látkové množství užíváme obvykle jednotky násobné kilomol (kmol). Kilomoly látek všech skupenství obsahují stejný počet molekul. Můžeme určit hmotnost kilomolu libovolné látky, zvolíme-li za množství druhé látky jeden kilomol nuklidu ^{12}C . Pak hmotnost kilomolu libovolné látky je číselně rovná její relativní molekulové hmotnosti. Značíme ji M_m a nazýváme molová hmotnost; její jednotkou je $\text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$.

Počet molekul v jednom kilomolu libovolné látky udává Avogadrova konstanta N_A , jejíž hodnota je

$$N_A = (6,022\,52 \pm 0,000\,28) \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1} .$$

Známe-li molovou hmotnost M_m látky, vypočteme hmotnost jedné molekuly

$$\{3.1-2\} \quad m = \frac{M_m}{N_A} . \quad (4.2)$$

{pr3.1-1} **KP 4.1-1** _____

Určete lineární rozměr molekul vody, jestliže jeden mol vody zaujímá objem $V_m = 18 \text{ cm}^3$.

Řešení:

K přibližnému určení rozměrů molekul musí být splněn předpoklad, že molekuly v látce jsou rozloženy blízko vedle sebe. U kapalin tento předpoklad je splněn. Nejprve vypočteme, jaký objem přísluší jedné molekule

$$V_0 = \frac{V_m}{N_A} = \frac{18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 30 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3 .$$

Lineární rozměr molekuly bude

$$a = \sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3} \doteq 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 3,1 \text{ \AA} .$$

4.2 Ideální plyn

IdealniPlyn}

Tato část obsahuje definici ideálního plynu z hlediska makroskopického a mikroskopického. Je zde vyložena význam proměnných veličin (charakterizující ideální plyn) a uvedena rovnice vyjadřující jednoduchý vztah mezi nimi.



Cíl: I) Definovat ideální plyn z hlediska makroskopického a mikroskopického.

II) Použít stavovou rovnici k řešení problémů.

4.2.1 Makroskopický popis

opickyPopis}

Plyn, který vykazuje jistý jednoduchý vztah mezi termodynamickými proměnnými veličinami p , V a T , se nazývá ideální plyn. Je-li nějaký plyn o celkové hmotnosti M v teplotní rovnováze, můžeme měřit jeho tlak, teplotu a objem. Pro plyny o malé hustotě se dá experimentálně ukázat, že

1. pro dané množství plynu je tlak za konstantní teploty nepřímo úměrný objemu (Boylův-Mariottův zákon),
2. pro dané množství plynu je objem při konstantním tlaku přímoúměrný teplotě (Gay-Lussacův zákon).

Tyto dva experimentální výsledky zapíšeme ve tvaru

{3.1-3}

$$\frac{pV}{T} = \text{konst.} \quad (\text{pro stálé množství plynu}) \quad (4.3)$$

{ram-103}

Objem zaujímaný plynem (reálným nebo ideálním) při daném tlaku a teplotě je úměrný jeho množství. Tedy konstanta v (4.3) musí být úměrná množství plynu. Vyjádříme-li množství plynu látkovým množstvím n_m (tj. v kilomolech), napíšeme uvedenou konstantu ve tvaru

$$\text{konst.} = n_m R,$$

kde n_m je látkové množství (počet (kilo)molů) a R musí být určeno experimentálně pro každý plyn. Jestliže experimenty provádíme při dostatečně malé hustotě plynů, má R konstantní hodnotu pro všechny plyny

$$R = (8,3143 \pm 0,0012) \cdot 10^3 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

a nazývá se univerzální plynová konstanta. Rovnici (4.3) píšeme ve tvaru

{3.1-4}

$$pV = n_m RT \quad \text{stavová rovnice pro ideální plyn} \quad (4.4)$$

{ram-104}

a ideální plyn definujeme jako takový, který splňuje tento vztah za všech podmínek. Tato rovnice se nazývá stavová rovnice pro ideální plyn.

4.2.2 Mikroskopická definice

ckaDefinice}

Rovněž z mikroskopického hlediska musí ideální plyn splňovat zákony uvedené pro tento plyn v makroskopickém popisu.

4.3. TLAK IDEÁLNÍHO PLYNU

1. Plyn se skládá z velkého počtu částic zvaných molekuly. Každá molekula se sestává z jednoho atomu nebo skupiny atomů. Všechny molekuly stejného plynu jsou stejné.
2. Pohyb molekul je dokonale chaotický, přičemž jsou zachovány Newtonovy pohybové zákony. Molekuly se pohybují různými rychlostmi ve všech směrech. Směr a rychlost pohybu kterékoliv molekuly se může náhle měnit při srážce se stěnou nebo jinou molekulou.
3. Objem molekul je zanedbatelný proti objemu, který zaujímá plyn.
4. Vzájemné působení molekul je zanedbatelné s výjimkou krátkých okamžiků vzájemných srážek. Molekuly se proto mezi srážkami pohybují rovnoměrně přímočaře.
5. Molekuly se chovají jako pružné koule, takže srážky molekul se stěnou i mezi sebou trvají zanedbatelně krátce. Kinetická energie molekul zůstává zachována.
6. Koncentrace částic n (tj. počet molekul N v objemové jednotce $n = \frac{N}{V}$) je ve všech místech stejná ($n = \text{konst.}$).

Úpravou jednotlivých předpokladů lze vystihnout i vlastnosti reálného plynu. Podle definice se mohou jednotlivé ideální plyny lišit jen hmotností molekul.

{pr3.1-2} **KP 4.2-1** _____

Napište stavovou rovnici ideálního plynu ve tvarech obsahujících a) objem, b) kilomolový objem, c) měrný objem plynu, d) koncentraci částic.

Řešení:

a) Stavová rovnice obsahující objem je $pV = n_m RT$, kde $n_m = M/M_r = \frac{Nm}{N_A m} = \frac{N}{N_A}$ je počet molů, (N celkový počet částic a N_A je Avogadrova konstanta).

b) Zavedeme-li kilomolový objem $v_k = V/n_m$ do předchozí rovnice, dostaneme

$$\{pV = n_m RT, v_k = V/n_m\} \rightarrow pv_k n_m = n_m RT \rightarrow pv_k = RT.$$

c) Podobně zavedením měrného objemu $v = \frac{V}{M}$ dostaneme rovnici ve tvaru

$$\{pV = n_m RT, v = V/M\} \rightarrow pvM = n_m RT \rightarrow pv = \frac{n_m RT}{M} \rightarrow pv = \frac{n_m RT}{n_m M_m} \rightarrow pv = M_m RT.$$

d)

$$\{pV = n_m RT, n_m = N/N_A\} \rightarrow p = \frac{NRT}{VN_A} \rightarrow p = \frac{nRT}{N_A} \rightarrow p = nkT,$$

kde $k = R/N_A$ je plynová konstanta vztážená na jednu molekulu – tzv. Boltzmannova konstanta ($1,380\,54 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$) a n představuje koncentraci částic.

4.3 Tlak ideálního plynu

{TlakPlynu}

V této části je naznačen výklad tlaku plynu z pohledu statistické fyziky. V odst. 4.3.1 je vyložena hustota toku molekul na stěnu nádoby a její matematická formulace a v odst. 4.3.2 je proveden kinetický výklad tlaku plynu. Výklad veličiny střední kvadratická rychlost molekul je proveden v odst. 4.3.3.



Cíl:

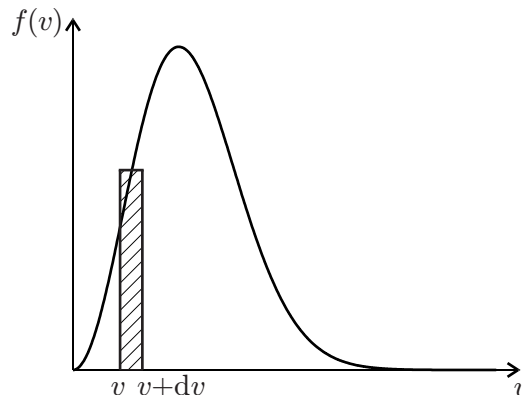
4.3. TLAK IDEÁLNÍHO PLYNU

- I) Vyložit a matematicky formulovat hustotu toku molekul na stěnu nádoby.
- II) Vyložit a odvodit vztah pro tlak plynu a střední kvadratickou rychlost molekul.
- III) Samostatně řešit příklady uvedené v tomto textu.

4.3.1 Hustota toku molekul na stěnu nádoby

HustotaToku}

Molekuly plynu při svém pohybu narážejí na stěny nádoby, což se navenek projevuje jako tlak. Na jeho určení potřebujeme vědět, kolik molekul dopadá na stěnu nádoby za jednotku času. Zvolíme si na stěně nekonečně malý plošný element dS a zjistíme, kolik molekul plynu na něj dopadne za čas dt . Mezi dopadajícími molekulami budou molekuly s různými rychlostmi \vec{v} , tedy nejen o různých velikostích, ale i směrů. Rozdělení absolutních hodnot rychlostí je spojitě a lze jej charakterizovat hustotou pravděpodobnosti výskytu určité rychlosti $f(v)$, která, je-li plyn v ustáleném stavu, nezávisí na čase. Funkce $f(v)$ nezávisí ani na směru pohybu molekul, protože rozdělení jejich rychlostí je izotropní (ani jeden směr není upřednostněný). To souhlasí s předpokladem o chaotickém pohybu molekul. Výraz $f(v)dv$ udává pravděpodobnost, že velikost rychlosti molekuly leží v intervalu $(v, v + dv)$. Průběh funkce $f(v)$ (jak víme ze statistické fyziky) za určitých předpokladů můžeme znázornit křivkou na obr. 4.1. Ohraničená plocha o šířce dv představuje pravděpodobnost, že rychlost molekuly leží v intervalu $(v, v + dv)$. Potom ke každé rychlosti z tohoto intervalu můžeme přiřadit stejnou pravděpodobnost P_i , přičemž všechny rychlosti zaokrouhlíme na hodnotu v_i . Chyba, které se přitom dopustíme, nepřesáhne hodnotu $\frac{\Delta v}{2}$ a zjemňováním dělení ji můžeme zmenšit na předem stanovenou hodnotu. Místo funkce $f(v)$ budeme dále používat posloupnost rychlostí v_i s přiřazenými pravděpodobnostmi jejich výskytu P_i



{obr3.1-1}

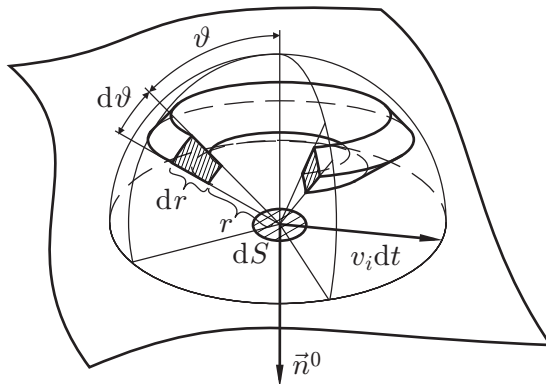
Obr. 4.1

Okolo plošky dS opíšeme polokouli s poloměrem $v_i dt$. Potom všechny molekuly s rychlostí v_i , které dopadnou během časového intervalu dt na plošku dS , leží uvnitř polokoule. Předpokládáme, že tyto molekuly se za čas dt nesrazí, tzn., že se nezmění ani velikost rychlosti, ani směr pohybu. Protože srážky mezi molekulami můžeme zanedbat, pak tuto skutečnost musíme zahrnout do výpočtů. Lze to provést dvěma způsoby:

1. Zvolíme čas dt tak malý, že srážky na vzdálenosti $v_i dt$ se neprojeví.
2. Využijeme stacionárnost rozdělení rychlostí: počet molekul, které po dobu srážek změní rychlost nebo směr (případně oboje) nahradíme stejným počtem molekul, které v průběhu jiných srážek opět získají požadovanou rychlost a směr.

4.3. TLAK IDEÁLNÍHO PLYNU

Oba dva způsoby poskytují stejné výsledky. V dalších úvahách budeme nejprve sledovat molekuly, které mají rychlosti v_i . Tyto mohou dopadat na plošku dS pod různými úhly ϑ , který svírá směr pohybu molekuly s normálou \vec{n}^0 k plošce dS (jednotkový vektor normály \vec{n}^0 směřuje ven z nádoby). Vybereme jen ty molekuly, které svírají s normálou úhel $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ a které dopadají ze vzdálenosti r až $r + dr$, přičemž $0 < r \leq v_i dt$. Jejich počet je určený jednak počtem molekul s rychlostí v_i v elementu objemu ve tvaru prstence (viz obr. 4.2), jehož poloměr je $r \sin \vartheta$, výška dr a šířka $rd\vartheta$, a jednak pravděpodobností, že molekuly se budou pohybovat směrem k plošce dS . Počet molekul $dN(dV)$ o rychlostech v_i v prstenci vypočítáme, když objem prstence dV vynásobíme jejich koncentrací n_i :



Obr. 4.2

{obr3.1-2}

$$\{3.1-5\} \quad dN(dV) = n_i dV = n_i (2\pi r \sin \vartheta) (rd\vartheta) dr = n_i 2\pi r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta. \quad (4.5)$$

Na základě předpokladu, že všechny směry pohybu molekul jsou rovnocenné, bude do stejných prostorových úhlů (libovolně orientovaných) dopadat za jednotku času stejný počet molekul. Potom pravděpodobnost $P_i(\vartheta)$ dopadu molekuly o rychlosti v_i na plošku dS pod úhlem ϑ je rovna poměru prostorového úhlu, pod kterým vidíme plošku ze vzdálenosti r , k plnému prostorovému úhlu 4π . Z prstencového elementu vidíme plošku pod úhlem ϑ , takže její zdánlivá velikost se rovná průmětu dS do tohoto směru, tj. $\cos \vartheta dS$. Poměr prostorových úhlů je pak dán

$$\{3.1-6\} \quad \frac{dS \cos \vartheta}{r^2} : \frac{4\pi}{1^2} = \frac{dS \cos \vartheta}{4\pi r^2} = P_i(\vartheta). \quad (4.6)$$

Hledaný počet molekul $dN(v_i)$ s rychlostí v_i , které dopadnou pod úhlem ϑ až $\vartheta + d\vartheta$ na dS za čas dt z prstencového elementu, dostaneme vynásobením počtu molekul v prstenci a pravděpodobností dopadu

$$dN(v_i) = dN(dV) P_i(\vartheta) = n_i (2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta dr) \frac{dS \cos \vartheta}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} n_i \sin \vartheta \cos \vartheta dr d\vartheta dS.$$

Integrací podle r od 0 až po $v_i dt$ dostaneme počet částic s rychlostí v_i , které dopadnou za čas dt na dS pod úhlem ϑ až $\vartheta + d\vartheta$

$$d\bar{N}(v_i) = \frac{1}{2} n_i \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta dS \int_0^{v_i dt} dr = \frac{1}{2} n_i v_i \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta dS dt.$$

Podělíme-li tuto rovnici $dt dS$, dostaneme počet částic dopadajících na jednotku plochy za jednotku času pod úhlem ϑ až $\vartheta + d\vartheta$ s rychlostí v_i . Tento počet nazýváme hustota toku částic

4.3. TLAK IDEÁLNÍHO PLYNU

a značíme jej

$$\{3.1-7\} \quad dh_i(\vartheta) = \frac{d\bar{N}(v_i)}{dt dS} = \frac{1}{2} n_i v_i \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta. \quad (4.7)$$

Integrací podle ϑ v mezích od 0 do $\pi/2$ (tj. zajímáme se jen o „horní“ poloprostor nad plochou dS - viz obr. 4.5) dostaneme hustotu toku všech molekul, které dopadají za jednotku času na jednotkovou plochu (např. stěny nádoby) s rychlostí v_i

$$\{3.1-8\} \quad h_i = \int_0^{\pi/2} dh_i(\vartheta) = \frac{1}{2} n_i v_i \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4} n_i v_i, \quad (4.8)$$

kde n_i je koncentrace částic (tj. jejich počet v objemové jednotce) s rychlostmi v_i . Při výpočtu tohoto integrálu jsme s úspěchem využili substituce¹.

Když sečteme všechny hustoty toků, kterými přispívají všechny molekuly s různými velikostmi rychlostí v_i , dostaneme celkovou hustotu toku všech molekul na jednotkovou stěnu nádoby

$$\{3.1-9\} \quad h = \sum_{i=1}^l h_i = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^l n_i v_i = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^l n_i \frac{n}{n} v_i = \frac{1}{4} n \sum_{i=1}^l \frac{n_i}{n} v_i = \frac{1}{4} n \sum_{i=1}^l v_i P_i = \frac{1}{4} n \bar{v}, \quad \begin{array}{l} \text{hustotu toku} \\ \text{molekul na jednot-} \\ \text{kovou plochu} \end{array} \quad (4.9)$$

kde $n = n_i/P_i$ je koncentrace všech molekul bez ohledu na jejich rychlost a $\bar{v} = \sum v_i P_i$ je střední rychlost; je to střední hodnota velikosti vektoru rychlosti \vec{v} a je mírou mikroskopického pohybu molekul.

4.3.2 Kinetický výklad tlaku plynu

Při každém nárazu na stěnu si molekuly plynu vyměňují s molekulami stěny energii a impuls. Nárazy se projevují jako silové působení. Střední hodnotu nárazů velkého počtu molekul můžeme interpretovat jako tlak plynu na stěnu nádoby. Budeme uvažovat, že máme plyn o N molekulách uzavřený v nádobě libovolného tvaru. Pro zjednodušení výpočtů zvolíme případ tzv. ideálně hladké stěny, tj. bez molekulové struktury.

Molekula po dobu nárazu na ideálně hladkou stěnu změní svoji hybnost o $\Delta\vec{p}$. Podle první impulsové věty je změna hybnosti molekuly rovna impulsu síly, který odevzdala stěně. Podle zákona zachování hybnosti musí být součet hybností dvou srážejících se těles před a po srážce stejný. Stěna je stále v klidu, a proto se její hybnost po dobu srážky nemění. Impuls síly, kterou působí molekula na stěnu po přepočtu na jednotku plochy, představuje příspěvek k celkovému tlaku na stěnu nádoby. Součtem příspěvků od jednotlivých molekul přes všechny možné směry a velikosti rychlostí dostaneme výsledný tlak plynu na stěnu. Označíme-li \vec{v} rychlost, kterou molekula dopadá na stěnu, a \vec{v}' její rychlost po odrazu od stěny, zákon zachování hybnosti se dá napsat ve tvaru

$$\{3.1-10\} \quad m\vec{v} = m\vec{v}' + \Delta\vec{p}, \quad (4.10)$$

kde m je hmotnost zmiňované molekuly.

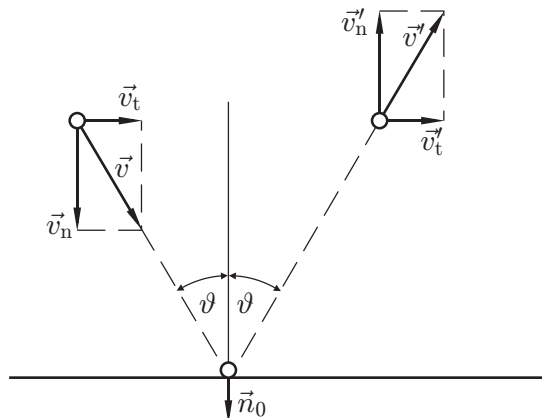
Mezi rychlostmi \vec{v} a \vec{v}' existuje určitá souvislost. Po dobu dokonale pružného nárazu molekuly nepohyblivá stěna nepřebírá žádnou energii a tedy kinetická energie před a po nárazu je stejná.

$$\{3.1-11\} \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v'^2. \quad (4.11)$$

¹Např. $\{x = \sin \vartheta \rightarrow dx = \cos \vartheta d\vartheta\} \rightarrow \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = x dx$.

4.3. TLAK IDEÁLNÍHO PLYNU

Vektor rychlosti \vec{v} si můžeme rozložit na dvě složky - normálovou \vec{v}_n a tangenciální (tečnou) \vec{v}_t (viz obr. 4.3). Podobný rozklad provedeme pro rychlost \vec{v}' . Protože stěna je dokonale hladká, tak po dobu srážky molekula na povrchu stěny sklouzne bez přibrzdění, proto tangenciální složky zůstanou stejné $\vec{v}_t = \vec{v}'_t$. Uvážíme-li, že platí $v^2 = v_n^2 + v_t^2$ a $v'^2 = v_n'^2 + v_t'^2$, z rovnice (4.11) dostaneme výsledek $v_n^2 = v_n'^2 \rightarrow |v_n| = -|v_n'|$ nebo $|\vec{v}_n| = |\vec{v}'_n|$. Poslední rovnice má dvě řešení $\vec{v}_n = \vec{v}'_n$ a $\vec{v}_n = -\vec{v}'_n$. Fyzikálně možný je jen druhý případ, kdy normálová složka rychlosti po odrazu změni svoje znaménko, čemuž přísluší zrcadlový odraz molekuly od dokonalé stěny.



Obr. 4.3

{obr3.1-3}

Na základě výše odvozených zákonitostí můžeme odevzdanou hybnost $\Delta\vec{p}$ (neboli sílu, kterou působí molekula na stěnu) z rovnice (4.10) vyjádřit následovně

$$\Delta\vec{p} = m(\vec{v} - \vec{v}') = m(\vec{v}_n + \vec{v}_t - \vec{v}'_n - \vec{v}'_t) = m(\vec{v}_n - \vec{v}'_n) = 2m\vec{v}_n.$$

Označíme-li \vec{n}^0 jednotkový vektor ve směru normály ke stěně a ϑ úhel dopadu molekuly na stěnu (obr. 4.3), dostaneme

$$\{\Delta\vec{p}\} \quad \Delta\vec{p} = 2mv_n\vec{n}^0 = 2m\vec{n}^0 v \cos \vartheta. \quad (4.12)$$

Podle (4.7) dopadne pod úhlem ϑ až $\vartheta + d\vartheta$ na jednotkovou plochu dS za jednotku času celkem $dh_i(\vartheta)$ molekul o rychlosti v_i . Tyto molekuly odevzdají tomuto plošnému elementu stěny velikosti dS za jednotku času celkovou hybnost $\Delta\vec{p}_i dh_i(\vartheta) dS$. To můžeme interpretovat v souladu s druhým Newtonovým zákonem jako sílu, která působí na plošný element dS . Použitím 4.12 a (4.7) dostaneme pro silový příspěvek od molekul s rychlostí v_i , dopadajících pod úhlem $\vartheta + d\vartheta$ na elementární plochu dS , hodnotu

$$d\vec{F}_i = \Delta\vec{p}_i dh_i(\vartheta) dS = 2m\vec{n}^0 v_i \cos \vartheta \frac{1}{2} n_i v_i \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta dS = mn_i v_i^2 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \vec{n}^0 dS d\vartheta,$$

kde n_i je koncentrace molekul s rychlostmi v_i . Z výše uvedeného vztahu vidíme, že silový přírůstek $d\vec{F}_i$ působí vždy kolmo na plošný element dS , nezávisle na úhlu ϑ a rychlosti v_i . Pak jednotlivé silové příspěvky můžeme sčítat jen algebraicky. Vydělíme-li absolutní velikost silového příspěvku plochou dS , dostaneme výraz závislý jen na parametrech plynu, který představuje částečný (parciální) příspěvek dp_i k tlaku, jenž pochází od molekul s rychlostí v_i a dopadajících na jednotkovou plochu (např. stěny nádoby, uzavírající plyn) pod úhlem ϑ až $\vartheta + d\vartheta$

$$\{3.1-12\} \quad dp_i = \frac{|d\vec{F}_i|}{dS} = mn_i v_i^2 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta. \quad (4.13)$$

Výsledný parciální tlak od molekul s rychlostmi v_i dostaneme integrací² podle úhlu ϑ od 0

²Např. substitucí $\{x = \cos \vartheta \rightarrow dx = -\sin \vartheta d\vartheta\} \rightarrow \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = -x^2 dx$.

4.3. TLAK IDEÁLNÍHO PLYNU

až po $\pi/2$

$$p_i = \int_0^{\pi/2} dp_i = mn_i v_i^2 \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{3} mn_i v_i^2.$$

Sečteme-li příspěvky p_i přes všechny možné rychlosti (tj. provedeme-li $\sum_{i=0}^l$) a označíme-li pravděpodobnost výskytu molekul s rychlostmi v_i jako $P_i = n_i/n$ (kde n je celková koncentrace, tj. počet molekul v objemové jednotce a n_i je koncentrace těch molekul, které mají rychlost v_i), dostaneme vztah pro tlak ideálního plynu na stěnu

$$\{3.1-13\} \quad p = \frac{1}{3} m \sum_{i=1}^l n_i v_i^2 = \frac{1}{3} m \sum_{i=1}^l (nP_i) v_i^2 = \frac{1}{3} mn \sum_{i=1}^l v_i^2 P_i = \frac{1}{3} mn \bar{v}_k^2, \quad \text{tlak ideálního plynu} \quad (4.14)$$

kde m je hmotnost jedné molekuly, n je koncentrace molekul a výraz $\bar{v}_k^2 = \sum_{i=1}^l v_i^2 P_i$ se nazývá střední kvadratická rychlost.

Zavedeme-li výraz

$$\text{Nova3.1.-13} \quad \bar{w}_k = \frac{1}{2} m \bar{v}_k^2, \quad (4.15)$$

tzv. střední kinetickou energii jedné molekuly - pak rovnice (4.14) nabude tvar

$$\{3.1-14\} \quad p = \frac{2}{3} n \bar{w}_k \quad (4.16)$$

a dává nám do souvislosti tlak ideálního plynu se střední kinetickou energií molekuly.

Rovnice (4.14) a (4.16) jsou odvozené pro dokonale hladkou stěnu, platí však i pro libovolnou reálnou stěnu s molekulovou strukturou. Důkaz v rámci molekulové fyziky by byl velmi složitý.

{pr3.1-3} KP 4.3-1 _____

Nádoba ve tvaru krychle o hraně $a = 0,1 \text{ m}$ je naplněná O_2 o teplotě $T = 300 \text{ K}$ a tlaku $p = 10^5 \text{ Pa}$. Vypočtete:

- počet N molekul v nádobě;
- střední kvadratickou rychlost molekuly \bar{v}_k , střední kvadratickou hodnotu její hybnosti \bar{p} a impuls síly I' , kterým působí molekula na stěnu při kolmém dopadu;
- střední počet nárazů jedné molekuly za sekundu (tj. frekvenci nárazů) na jednu stěnu;
- střední sílu \bar{F}_1 a střední tlak \bar{p}_1 na stěnu nádoby od jedné molekuly;
- počet molekul N' , které při kolmém dopadu na stěnu vyvinou tlak 10^5 Pa .

Řešení:

- Počet molekul N v nádobě je roven součinu Avogardova čísla N_A (počet částic v jednom kilomolu) a látkového množství (tj. počtem kilomolů) n_m v kilomolech. Ze stavové rovnice (4.4) plyne

$$n_m = \frac{pV}{RT}$$

pak

$$N = n_m N_A = \frac{pV N_A}{RT} = \frac{6,02 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1} \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{8314 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}} = 2,41 \cdot 10^{22} \text{ částic.}$$

4.3. TLAK IDEÁLNÍHO PLYNU

- b) K výpočtu střední kvadratické rychlosti \bar{v}_k uijeme vztahu (4.14), ve kterém p je tlak, n koncentrace a m hmotnost jedné molekuly

$$\bar{v}_k = \sqrt{\frac{3p}{nm}} = \sqrt{\frac{3pV}{Nm}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{2,41 \cdot 10^{22} \cdot 32 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 484 \text{ m s}^{-1}.$$

Střední kvadratická hodnota hybnosti molekuly

$$\bar{p} = m\bar{v}_k = 32 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 484 \text{ m s}^{-1} = 2,57 \cdot 10^{-23} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Impuls I' síly, kterým působí molekula při kolmém nárazu na stěnu

$$I' = 2m\bar{v}_k = 2 \cdot 32 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 484 \text{ m s}^{-1} = 5,14 \cdot 10^{-23} \text{ kg m s}^{-1}.$$

- c) Střední doba \bar{t} mezi dvěma nárazy jedné molekuly na tutéž stěnu je

$$\bar{t} = \frac{2a}{\bar{v}_k}$$

a frekvence nárazů na stěnu

$$f = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{\bar{v}_k}{2a} = \frac{484 \text{ m s}^{-1}}{2 \cdot 0,1 \text{ m}} = 2420 \text{ s}^{-1}.$$

- d) Střední síla \bar{F}_1 jedné molekuly je

$$\bar{F}_1 = \frac{I'}{\bar{t}} = I'f = 5,14 \cdot 10^{-23} \text{ kg m s}^{-1} \cdot 2420 \text{ s}^{-1} = 1,24 \cdot 10^{-19} \text{ N}.$$

Jediná molekula přispívá celkovému tlaku příspěvkem

$$\bar{p}_1 = \frac{\bar{F}}{S} = \frac{1,24 \cdot 10^{-19} \text{ N}}{0,1^2 \text{ m}^2} = 1,24 \cdot 10^{-17} \text{ Pa}.$$

- e) Tlak $p = 10^5 \text{ Pa}$ v nádobě tedy vyvine počet molekul

$$N' = \frac{p}{p_1} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{1,24 \cdot 10^{-17} \text{ Pa}} = 8,06 \cdot 10^{21}.$$

4.3.3 Střední kvadratická rychlost molekul

Kvadraticka}

Střední kvadratickou rychlost můžeme určit také tak, že najdeme rychlost, kterou by se musely pohybovat všechny molekuly plynu, aby se jejich celková kinetická energie rovnala skutečné energii plynu. Kinetická energie všech molekul s rychlostí \bar{v}_k je

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \bar{v}_k^2 \sum_{i=1}^N m_i = \frac{1}{2} N m \bar{v}_k^2,$$

kde m_i značí hmotnost i -té molekuly, a protože hmotnosti všech molekul jsou stejné ($m_i = m$), je celková hmotnost N molekul $\sum_{i=1}^N m_i = Nm$ úhrnnou hmotností plynu.



4.4. TEPLOTA A JEJÍ KINETICKÁ INTERPRETACE

Rychlost \bar{v}_k je tedy určena podmínkou

$$\frac{1}{2}Nm\bar{v}_k^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^N v_i^2,$$

tedy

{StrKvadr}
{ram-105}

$$\bar{v}_k = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{N}}. \quad \text{střední kvadratická rychlost} \quad (4.17)$$

Můžeme ji vypočítat z (4.14) $\bar{v}_k = \sqrt{\frac{3p}{nm}}$, a protože³ $nm = \rho$ (kde n je koncentrace částic, m je hmotnost jedné molekuly a ρ je hustota plynu), můžeme psát

$$\bar{v}_k = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}.$$

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi makroskopickou veličinou tlakem p a mikroskopickou veličinou \bar{v}_k .

4.4 Teplota a její kinetická interpretace

ickáenergie}

Při kinetické interpretaci teploty je třeba najít souvislost mezi celkovou kinetickou energií molekul systému a teplotou plynu. Vyjdeme ze vztahu (4.14), který upravíme tak, že jej vynásobíme objemem plynu V , a za současné rovnosti $n = N/V$ dostaneme

{3.1-15}

$$p = \frac{1}{3}nm\bar{v}_k^2 \rightarrow pV = \frac{1}{3}nV m\bar{v}_k^2 = \frac{1}{3}Nm\bar{v}_k^2 = \text{konst.}, \quad (4.18)$$

kde $N = nV$ je celkový počet molekul.

Tím je odvozen experimentální Boyleův-Mariottův zákon. Tento vztah můžeme dále upravit na tvar

$$pV = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} Nm \bar{v}_k^2 \right).$$

Zavedeme-li vztah $Nm = (n_m N_A)(M_m/N_A) = n_m M_m$, kde n_m je látkové množství v kilomolech a M_m je molární hmotnost, pak

{3.1-16}

$$pV = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} n_m M_m \bar{v}_k^2 \right). \quad (4.19)$$

Srovnáním se stavovou rovnicí ideálního plynu $pV = n_m RT$ obdržíme

{3.1-17}

$$\frac{1}{2} M_m \bar{v}_k^2 = \frac{3}{2} RT. \quad (4.20)$$

Celková kinetická energie neuspořádaného pohybu molekul jednoho kilomolu ideálního plynu je úměrná teplotě. Tuto rovnici můžeme považovat za definici teploty plynu v kinetické teorii plynu nebo v mikroskopickém pohledu.

Teplotu plynu vztahujeme k celkové kinetické energii molekul vzhledem k těžišti celého systému. Kinetická energie molekul, která by byla počítána i s rychlostí pohybu těžiště celého

³Platí totiž $nm = \frac{Nm}{V} = \frac{M}{V} = \rho$.

4.4. TEPLOTA A JEJÍ KINETICKÁ INTERPRETACE

systému, se na teplotu nevztahuje. Jedná se jen o kinetickou energii postupného pohybu molekul v jejich dokonalé neuspořádanosti v souřadné soustavě klidné vzhledem k těžišti. Takto byla počítána i střední kvadratická rychlost \bar{v}_k .

Vydělíme-li obě strany rovnice (4.20) Avogardovou konstantou N_A , obdržíme

$$\frac{1}{2} \frac{M_m}{N_A} \bar{v}_k^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T,$$

kde

$$\frac{M_m}{N_A} = m$$

je hmotnost molekuly a

$$\frac{R}{N_A} = k$$

je Boltzmannova konstanta. Pak můžeme psát

$$\{3.1-18\} \quad \frac{1}{2} m \bar{v}_k^2 = \frac{3}{2} k T. \quad \text{střední hodnota kinetické energie postupného pohybu molekul} \quad (4.21)$$

{ram-106}

Boltzmannova konstanta $k = (1,380\,54 \pm 0,000\,18) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ má význam plynové konstanty vztažené na jednu molekulu. Střední hodnota kinetické energie postupného pohybu molekul závisí jen na absolutní teplotě a je jí přímo úměrná. Nezávisí na druhu plynu (hmotnosti molekul). Z rovnice (4.21) plyne, že při stejné teplotě T poměr středních kvadratických rychlostí dvou molekul je roven druhé odmocnině poměru převrácených hodnot hmotností molekul

$$\frac{\bar{v}_{k,1}}{\bar{v}_{k,2}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Tento vztah ukazuje, že molekuly lehčího plynu se pohybují rychleji než těžšího plynu. Lehčí plyn difunduje do nádoby s porézními stěnami rychleji, než plyn těžší.

{pr3.1-4} **KP 4.4-1** —————

Nádoba obsahující určité množství jednoatomového plynu se pohybuje rychlostí v . Nádoba se náhle zastaví. Jak se změní střední kvadratická rychlost molekul plynu a teplota plynu?

Řešení:

Celková kinetická energie neuspořádaného pohybu molekul plynu vůči těžišťové soustavě (pohybující) nádoby je

{Nova4.19}

$$E_k = \frac{1}{2} n_m M_m \bar{v}_{k1}^2 = \frac{3}{2} n_m R T_1, \quad (4.22)$$

kde \bar{v}_{k1} je střední kvadratická rychlost a T_1 je teplota plynu v nádobě před zastavením. Celková kinetická energie uspořádaného pohybu (tj. vůči soustavě, v níž se nádoba s plynem pohybuje) je

$$\frac{1}{2} n_m M_m v^2.$$

U jednoatomových plynů všechna dodaná energie zvyšuje kinetickou energii neuspořádaného pohybu. Po zastavení nádoby bude mít plyn teplotu T_2 , protože neuspořádaný pohyb molekul se bude dít s jinou \bar{v}_{k2}^2 , pro kterou bude platit

{Nova4.20}

$$\frac{1}{2} n_m M_m \bar{v}_{k2}^2 = \frac{1}{2} n_m M_m \bar{v}_{k1}^2 + \frac{1}{2} n_m M_m v^2 \rightarrow \bar{v}_{k2} = \sqrt{\bar{v}_{k1}^2 + v^2}. \quad (4.23)$$

4.5. VNITŘNÍ ENERGIE A TEPELNÁ KAPACITA IDEÁLNÍHO PLYNU

Předchozí rovnici 4.23 můžeme psát rovněž ve tvaru

$$\frac{3}{2}n_mRT_2 = \frac{3}{2}n_mRT_1 + \frac{1}{2}n_mM_m v^2,$$

odkud pro přírůstek teploty jednoatomového plynu po zastavení nádoby dostaneme

$$\{Nova4.21\} \quad \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{M_m}{3R} v^2. \quad (4.24)$$

Na straně 211 bude uveden výsledek obdobného příkladu, kdy se bude v nádobě nacházet dvouatomový plyn. Dospějeme tam k výsledku (4.35), který bude možná v této chvíli překvapivý, a sice, že teplota dvouatomového plynu (při stejném zastavení láhve) nevzroste o stejný díl.

4.5 Vnitřní energie a tepelná kapacita ideálního plynu

trniEnergie}

V odst. 4.5.1 je proveden výklad veličiny vnitřní energie ideálního plynu. Zavedení veličiny tepelné kapacity, její souvislost s látkovým množstvím a závislost na podmínkách, při kterých probíhá ohřev látky, je vyšetřováno v odst. 4.5.2. Zákon rovnoměrného rozdělení energie je vysloven a diskutován v odst. 4.5.3.



Cíl: I) Vyložit základní zákony a pojmy zvýrazněné v rámečcích, veličiny a výsledky zde v textu uvedené.

II) Samostatně řešit příklady v tomto textu a řešení zdůvodnit.

4.5.1 Vnitřní energie ideálního plynu

ieIdealniho}

Experimenty ukazují, že vnitřní energie ideálního plynu závisí na teplotě

$$\{3.1-19\} \quad U = KT; \quad (4.25)$$

kde K je koeficient úměrnosti, který zůstává konstantní v širokém intervalu teplot. Jeho význam si osvětlíme v dalším textu.

Z definice ideálního plynu vyplývá, že v něm neexistuje vnitřní potenciální energie. Tedy vnitřní energie plynu odpovídá jen kinetické energii postupného, dokonale neuspořádaného pohybu molekul.

Střední kinetická energie postupného pohybu 1 molekuly ideálního plynu hmotnosti m je rovna (viz (4.15)) $\bar{w}_k = \frac{1}{2}m\bar{v}_k^2$. Tedy střední kinetická energie postupného pohybu molekul jednoho kilomolu ideálního plynu je

$$\{Nova3.1-20\} \quad N_A \bar{w}_k = \frac{1}{2}N_A m \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2}M_m \bar{v}_k^2. \quad (4.26)$$

Z rovnice (4.20) plyne, že

$$\{3.1-20\} \quad \frac{1}{2}M_m \bar{v}_k^2 = \frac{3}{2}N_A kT = \frac{3}{2}RT = U. \quad (4.27)$$

Veličina U se nazývá vnitřní energie ideálního plynu. Tento výsledek platí jen za předpokladu, že molekuly jsou koule, tj. jen pro plyny, které mají jednoatomové molekuly. Pro teplo molekuly nejsou možné energie kmitavého pohybu a rotační energie jsou zanedbatelné. Pouze v tomto případě se vnitřní energie plynu U rovná kinetické energii postupného, neuspořádaného pohybu. Z kinetické teorie vyplývá tvrzení, že vnitřní energie ideálního plynu závisí pouze na teplotě plynu a je jí úměrná. Nezávisí ani na tlaku, ani na objemu plynu.

4.5.2 Tepelná kapacita ideálního plynu

{lnaKapacita}



Z předchozích úvah můžeme definovat pojem tepelné kapacity ideálního plynu. Tepelná kapacita libovolné látky je množství tepla, které dodáme látce, aby se její teplota zvýšila o jeden kelvin.

Jestliže množství tepla δQ dodané látce podělíme změnou jeho teploty dT , pak tepelná kapacita bude určena vztahem

$$\{3.1-21\} \quad C = \frac{\delta Q}{dT} \quad \text{tepelná kapacita} \quad (4.28)$$

{ram-107}

Tato veličina se měří v JK^{-1} .

Uvažujeme-li jednotkové množství látky jednoho molu, pak tepelná kapacita $c_m = C/n_m$ se nazývá molová tepelná kapacita. Měří se v $\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$.

Tepelná kapacita jednotkové hmotnosti látky se nazývá měrnou tepelnou kapacitou c . Měří se v $\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$. Mezi molovou c_m a měrnou kapacitou c stejné látky platí vztah

{Nova3.1-21}

$$c = \frac{c_m}{M_m} = \frac{\frac{C}{n_m}}{\frac{M}{n_m}} = \frac{C}{M}, \quad (4.29)$$

kde M_m je molová hmotnost látky a C je tepelná kapacita látky. Pro molové tepelné kapacity plynů jsou důležité dvě varianty – pokud ohřívání probíhá při konstantním objemu c_V nebo při konstantním tlaku c_p . V této kapitole se budeme zabývat molovou tepelnou kapacitou při konstantním objemu.

Probíhá-li ohřívání (např. jednoho molu) látky při stálém objemu, látka nekoná práci a všechno teplo se spotřebuje na přírůstek vnitřní energie

$$\delta Q = dU.$$

Potom můžeme psát

$$\{3.1-22\} \quad c_V = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} = \frac{d}{dT} \left(\frac{3}{2} RT \right) = \frac{3}{2} R. \quad (4.30)$$

Molární teplo c_V plynu je tedy nezávislé na teplotě a pro všechny⁴ ideální plyny je stejné. Tento výsledek je v dobrém souladu s hodnotou molové tepelné kapacity jen pro plyn s jednoatomovými molekulami. Pro dvou a víceatomové molekuly musíme změnit model ideálního plynu.

Použijeme-li rovnici (4.25) pro jeden mol a zdiferencujeme ji podle T a srovnáme s (4.30) dostaneme, že $c_V = K$. Pak výraz pro vnitřní energii jednoho molu ideálního plynu můžeme napsat ve tvaru

{Nova3.1-22}

$$U = c_V T. \quad \text{vnitřní energie jednoho molu ideálního plynu} \quad (4.31)$$

{ram-108}

Vnitřní energie plynu o celkové hmotnosti M bude rovna vnitřní energii jednoho molu vynášené látkovým množstvím obsažených v hmotnosti M

{Nova3.1-23}

$$n_m U = n_m c_V T = \frac{M}{M_m} c_V T. \quad (4.32)$$

⁴Jednoatomové ideální plyny.

4.5.3 Ekvipartiční teorém

{ticniTeorem}

V modelu plynu pro jednoatomové molekuly vidíme jednoznačně, že průměrná kinetická energie molekul postupného neuspořádaného pohybu určuje teplotu plynu. Pokud bychom si zobrazovali molekuly jako částice s vnitřní strukturou, pak bychom ke zvýšení teploty víceatomového plynu (tedy k „navýšení“ jeho neuspořádaného translačního pohybu jednotlivých molekul) museli dodat více tepla, neboť takové molekuly mohou měnit (a mění) ještě svoji energii rotačního pohybu a energii kmitavého pohybu. Tyto energie přispívají k celkové vnitřní energii plynu.

Nalezneme celkovou vnitřní energii ideálního plynu složeného z molekul s vnitřní strukturou. Energie se bude sestávat z kinetické energie postupného pohybu (její „složky“ mají tvar $\frac{1}{2}mv_x^2$, $\frac{1}{2}mv_y^2$, $\frac{1}{2}mv_z^2$), z kinetické energie rotačního pohybu (se „složkami“ $\frac{1}{2}I\omega_x^2$, $\frac{1}{2}I\omega_y^2$, $\frac{1}{2}I\omega_z^2$), a z kinetické energie kmitavého pohybu atomů v molekule (ve tvaru $\frac{1}{2}m_r v^2 + \frac{1}{2}kx^2$), kde první člen je kinetická energie těžiště molekuly, druhý člen pak potenciální energie kmitavého pohybu atomů kolem těžiště). Uvedené výrazy mají různý původ, ale všechny mají tentýž matematický tvar. Ze statistické fyziky se dá dokázat, že je-li počet částic veliký a platí-li Newtonova mechanika, pak všechny tyto výrazy mají stejnou průměrnou hodnotu, jež závisí na teplotě. Maxwellem byla vyslovena věta:

{ram-109}

Celková energie plynu závisí jen na teplotě a je rovnoměrně rozdělena na každý možný způsob, kterým molekuly mohou absorbovat energii.

Tato věta se nazývá rovnoměrné rozdělení energie nebo krátce ekvipartiční teorém.

Každý nezávislý způsob absorbování energie molekulou se nazývá stupeň volnosti.

Kinetická energie postupného neuspořádaného pohybu molekul jednoho kilomolu ideálního jednoatomového plynu je $U = \frac{3}{2}RT$. Tato energie je součtem tří „složek“ $\frac{1}{2}m\bar{v}_x^2$, $\frac{1}{2}m\bar{v}_y^2$, $\frac{1}{2}m\bar{v}_z^2$. Věta o rovnoměrném rozdělení energie požaduje, aby každá část měla stejnou energii (tj. $\frac{1}{2}RT$) na stupeň volnosti. Vnitřní energie jednoho kilomolu ideálního plynu pro i stupňů volnosti je pak dána vztahem

{3.1-23}

$$U = i \frac{1}{2} RT. \quad \begin{array}{l} \text{vnitřní energie jednoho molu} \\ \text{ideálního plynu pro } i \text{ stupňů volnosti} \end{array} \quad (4.33)$$

Molová tepelná kapacita při stálém objemu pro i stupňů volnosti je

{3.1-24}

$$c_V = \frac{dU}{dT} = i \frac{1}{2} R. \quad \begin{array}{l} \text{molová tepelná kapacita jednoho molu} \\ \text{ideálního plynu při stálém objemu pro } i \text{ stupňů volnosti} \end{array} \quad (4.34)$$

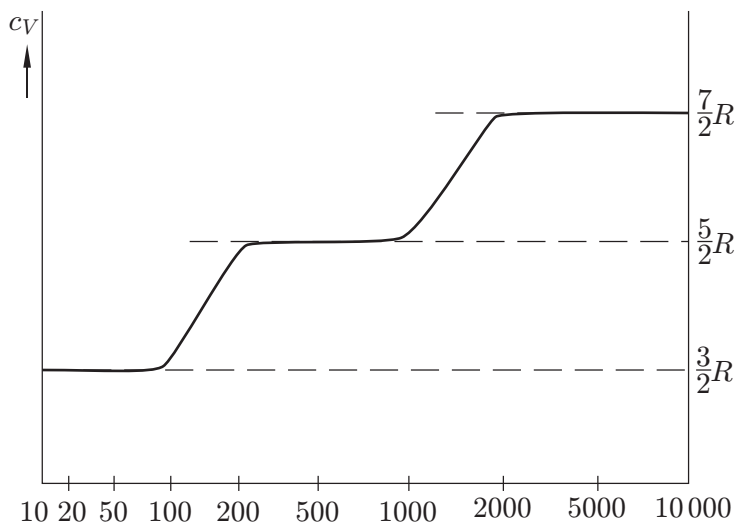
Poznámka: Tepelná kapacita teoreticky nemá záviset na teplotě. Ve skutečnosti (jak ukazují obr. 4.4) na teplotě závisí. Je zde uvedena závislost molové tepelné kapacity vodíku na teplotě. Jiné plyny vykazují podobné závislosti, ale při různých teplotách.

Diskuse: _____

1. Jednoatomové plyny konají postupný pohyb a mají $i = 3$ stupně volnosti, takže vnitřní energie jednoho kilomolu plynu je podle (4.33), $U = \frac{3}{2}RT$. Z rovnice (4.34) plyne hodnota pro molovou tepelnou kapacitu $c_V = \frac{3}{2}R$. Teoretická hodnota souhlasí s experimentální.

2. Pro plyny s dvouatomovými molekulami je nutné připojit další platné stupně volnosti v souvislosti s energií rotačního pohybu. Model dvouatomové molekuly představuje dvě koule spojené

4.5. VNITŘNÍ ENERGIE A TEPELNÁ KAPACITA IDEÁLNÍHO PLYNU



{obr3.1-4}

Obr. 4.4

pevnou tyčkou. Ke třem stupňům volnosti postupného pohybu přistoupí dva stupně volnosti spojené s výrazy $\frac{1}{2}I\omega_y^2$ a $\frac{1}{2}I\omega_z^2$, když energie vzhledem k ose rotace, která je spojnici obou atomů, je zanedbatelná⁵. Pak vnitřní energie dvouatomové molekuly 1 kilomolu plynu pro $i = 5$ stupňů volnosti je $U = \frac{5}{2}RT$ a molová tepelná kapacita je $c_V = \frac{5}{2}R$.

3. Pro plyny se třemi a víceatomovými molekulami je počet stupňů volnosti $i = 6$. Tedy člen $\frac{1}{2}I\omega_x^2$ nelze zanedbat a platí $U = 3RT$ a $c_V = 3R$.

4. U dvou a více atomových molekul připustíme-li možnost vzniku kmitů atomů (v modelu molekuly nahradíme pevnou tyčkou a pružinou), přistoupí další stupně volnosti. Tento experimentální model sice zlepší výsledky, ale liší se od modelu zavedeného pro kinetickou teorii.

{pr3.1-5}

KP 4.5-1

V příkladu KP 4.4-1 byla řešena úloha změna teploty u jednoatomového plynu. Zde budeme řešit stejný problém pro dvouatomový plyn za normálních teplot, jehož molekula má pět stupňů volnosti.

Řešení:

Většina úvah provedených v příkladu (3.1-4) zůstává v platnosti. Je třeba si uvědomit, že celková kinetická energie uspořádaného pohybu $\frac{1}{2}n_m M_m v^2$ se po zastavení nádoby rozdělí rovnoměrně na všech pět stupňů volnosti. Na zvýšení energie neuspořádaného pohybu připadnou jen 3/5 této energie.

Platí tedy

$$\frac{1}{2}n_m M_m \bar{v}_{k2}^2 = \frac{1}{2}n_m M_m \bar{v}_{k1}^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}n_m M_m v^2\right),$$

$$\bar{v}_{k2} = \sqrt{\bar{v}_{k1}^2 + \frac{3}{5}v^2}.$$

Podobně pro přírůstek teploty dostaneme

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{M_m}{5R}v^2. \quad (4.35)$$

{Nova3.1-24}

⁵Rozměry molekuly vzhledem k této ose rotace jsou zpravidla velmi malé, proto moment setrvačnosti, ve kterém vystupuje kvadrát vzdálenosti od osy, je opravdu hodně malý ve srovnání s ostatními členy.

4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU

Výsledná teplota dvouatomového plynu vzroste při náhlém zastavení nádoby méně (tj. ΔT bude menší), než u jednoatomového plynu (srovnejme s výsledkem 4.24).

4.6 Statistické zákonitosti ideálního plynu

V odst. 4.6.1 a 4.6.2 je provedena aplikace předchozích výsledků pro rozdělení energie v ideálním plynu na základě statistických zákonitostí (rozdělení rychlostí molekul a rozdělení počtu částic s výškou). Obraz o chování molekul s možností vzájemných srážek a jejich pohybu po určité dráze je vyšetřován v odst. 4.6.3.

Cíl: I) Popsat, nakreslit náčrtky a výsledky zdůvodnit.

II) Vysvětlit rozdíl mezi veličinami v_p , \bar{v} , \bar{v}_k .

III) Odvodit vztah pro střední volnou dráhu molekul.

IV) Samostatně řešit příklady uvedené v tomto textu.

4.6.1 Maxwellův zákon rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu

V předchozích kapitolách se uvažovalo spojitě rozdělení energie v ideálním plynu. Pro zjednodušení problému zanedbáme působení gravitačních, případně ostatních vnějších sil. Pak energie molekul je dána jejich kinetickou energií $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Předpokládáme, že pohyb molekul se řídí zákony klasické mechaniky, takže spektrum energie je spojitě.

Ustavičnými srážkami se rychlost molekul neustále nepravidelně mění. Skutečné okamžité rychlosti molekul se nedají zjistit, a proto nelze ani určit počet molekul, které mají zcela určitou rychlost. Lze však předpokládat, že za rovnovážného stavu bude mít z celkového počtu N molekul plynu jejich část ΔN rychlost, jejichž velikost leží v intervalu $(v, v + \Delta v)$.

Počet ΔN závisí jak na celkovém počtu molekul N , tak na velikosti intervalu Δv a na rychlosti v . Při velkém počtu molekul zavedeme poměrný počet molekul $\Delta N/N$, který připadá na interval δv jednotkové velikosti („kolem“ rychlosti v). Pak veličina

$$\frac{\Delta N}{N} \cdot \frac{1}{\Delta v}$$

nebude již závislá na celkovém počtu molekul N , závisí však ještě na velikosti intervalu Δv . (Pozor, tento interval již roven jedné být nemusí.) Zmenšujeme-li Δv bez omezení k nule, pak existuje limita

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N} \cdot \frac{1}{\Delta v} = \frac{dN}{N} \cdot \frac{1}{dv} = f(v),$$

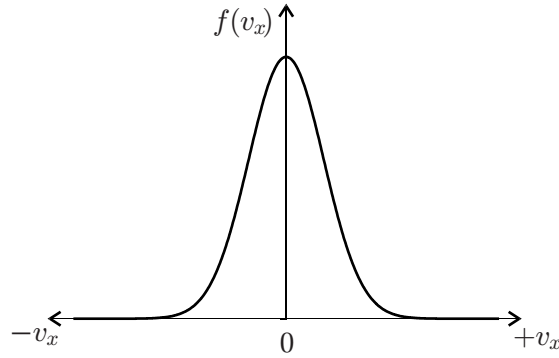
která již na velikosti Δv nezávisí. Funkce $f(v)$ se nazývá funkce rozdělení rychlosti molekul.

Nejdříve budeme muset hledat počet dN molekul, jejichž složky rychlostí leží mezi v_x a $v_x + dv_x$. Maxwell odvodil z počtu pravděpodobnosti pro jednu složku v_x pravděpodobnostní rozdělení

$$\frac{dN}{N} \sim \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) dv_x,$$

kde m je hmotnost molekuly, k Boltzmannova konstanta a T absolutní teplota. Obr. 4.5 ukazuje závislost rozdělovací funkce $f(v_x)$ na složce rychlosti v_x . Křivka je symetrická k $v_x = 0$, tj. pro molekuly s rychlostmi ve stejných rychlostních intervalech platí, že počet molekul, které se pohybují vpravo a vlevo, je stejný. Nejčastěji je složka rychlosti rovna nule, ale mohou v plynu existovat i molekuly s větší rychlostí, ovšem s menší pravděpodobností výskytu.

4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU



{obr3.1-5}

Obr. 4.5

Zkoumejme nyní počet molekul, jejichž x -ová složka rychlosti \vec{v} , tj. v_x leží v intervalu $(v_x, v_x + dv_x)$, složka v_y v intervalu $(v_y, v_y + dv_y)$ a v_z v intervalu $(v_z, v_z + dv_z)$. Odchytky dv_x, dv_y, dv_z složek v_x, v_y, v_z určují jak interval, v němž leží velikost rychlosti v , tak i interval pro směr rychlosti. Takto vymezený prostor se nazývá rychlostní prostor. Zavedeme-li souřadný systém, v němž nanese na osy hodnoty v_x, v_y, v_z (obr. 4.6), pak výrok, že složky rychlosti molekul leží v intervalu $(v_x, v_x + dv_x)$ a zároveň $(v_y, v_y + dv_y)$ a zároveň $(v_z, v_z + dv_z)$ znamená, že se jedná o všechny molekuly s rychlostmi, které se zobrazují jako vektory s koncovými body ležícími uvnitř objemu $dv_x dv_y dv_z$. Počet molekul z tohoto intervalu je tedy

$$\frac{dN}{N} \sim \exp \left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right] dv_x dv_y dv_z,$$

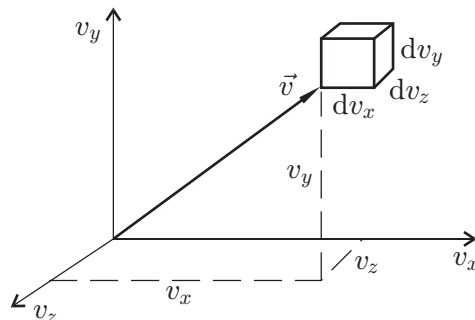
což není nic jiného, než součin jednotlivých členů

$$\frac{dN}{N} \sim \exp \left[-\frac{m(v_x^2)}{2kT} \right] dv_x, \quad \frac{dN}{N} \sim \exp \left[-\frac{m(v_y^2)}{2kT} \right] dv_y, \quad \frac{dN}{N} \sim \exp \left[-\frac{m(v_z^2)}{2kT} \right] dv_z,$$

a protože pro složky v_x, v_y, v_z platí $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, je

{3.1-25}

$$\frac{dN}{N} \sim \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv_x dv_y dv_z. \quad (4.36)$$

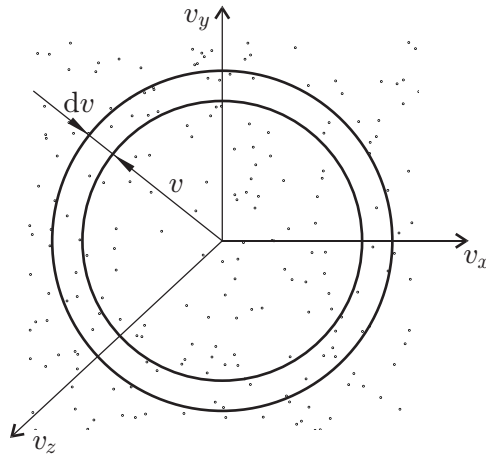


{obr3.1-6}

Obr. 4.6

Omezíme-li vektor rychlosti molekuly jen touto podmínkou, tj. aby jeho velikost ležela v daném intervalu $(v, v + dv)$, pak takové rychlosti se zobrazí v obr. 4.7 jako vektory všech možných směrů a takových délek, že jejich koncové body jsou uvnitř kulové vrstvy o poloměru v a tloušťky

4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU



{obr3.1-7}

Obr. 4.7

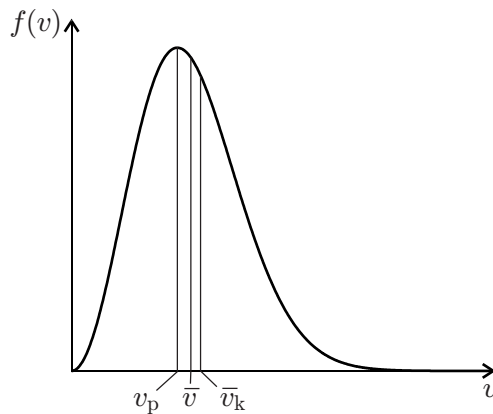
dv . Nahradíme-li element $dv_x dv_y dv_z$ objemem kulové vrstvy $4\pi v^2 dv$, pak z (4.36) obdržíme žádaný vztah pro dN/N . Přesná závislost⁶ zní

$$\{3.1-26\} \quad \frac{dN}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{mv^2}{2kT} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] \cdot \sqrt{\frac{m}{2kT}} \cdot dv = 4\pi v^2 \frac{m}{2\pi kT} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot dv \quad (4.37)$$

neboli

{MaxwRozd}

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2. \quad \text{Maxwellovo rozdělení rychlostí} \quad (4.38)$$



{obr3.1-8}

Obr. 4.8

Na obr. 4.8 je znázorněno toto tzv. Maxwellovo rozdělení rychlostí molekul. Pro rychlost $v = 0$ a $v \rightarrow \infty$ má funkce rozdělení rychlostí molekul $f(v)$ nulovou hodnotu. Maximum leží pro nejpravděpodobnější rychlosti v_p , které dostaneme z podmínky⁷

$$\frac{d}{dv} (f(v)) = 0, \quad \text{tj.} \quad \exp\left(-\frac{mv_p^2}{2kT}\right) \left(2 - \frac{mv_p^2}{kT}\right) v_p = 0.$$

⁶Ve které je již započteno to, že počet částic je konstantní a roven N (tzv. normovací podmínka).

⁷Derivace součinu.



4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU

Dalším řešením obdržíme

$$2 - \frac{mv_p^2}{kT} = 0 \rightarrow mv_p^2 = 2kT \quad (4.39)$$

a tak pro nejpravděpodobnější rychlost dostáváme

{3.1-27}
$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \text{ . nejpravděpodobnější rychlost} \quad (4.40)$$

{ram-110}

Pomocí Maxwellova zákona určíme také průměrnou rychlost \bar{v} molekul použitím vztahu ze statistické fyziky pro výpočet střední hodnoty veličiny

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv .$$

Integrací metodou per – partes obdržíme výsledek

{3.1-28}
$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \text{ . střední (průměrná) velikost rychlosti} \quad (4.41)$$

{ram-111}

K určení střední kvadratické rychlosti \bar{v}_k musíme nejprve vypočítat veličinu \bar{v}^2 podle vztahu statistické fyziky

$$\begin{aligned} \bar{v}^2 &= \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^4 dv = \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi \frac{3}{8\pi^2} \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{5/2} = \frac{3kT}{m} \end{aligned}$$

a pak určíme

{3.1-29}
$$\bar{v}_k = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \text{ . střední kvadratická rychlosti} \quad (4.42)$$

{ram-112}

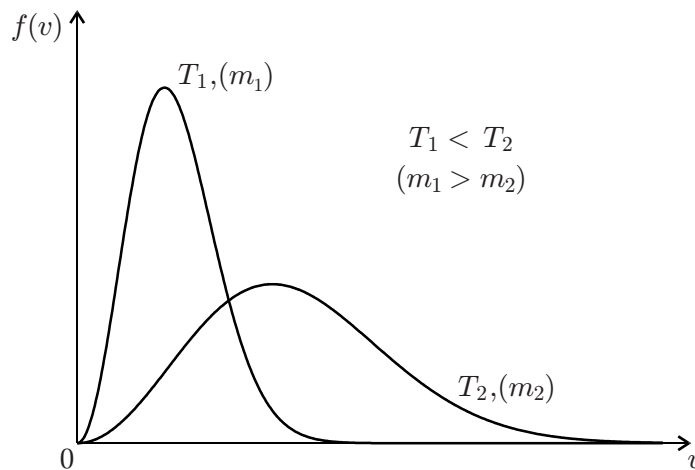
Dosadíme-li vztah (4.40) do (4.37), najdeme maximální hodnotu funkce $f(v)_{\max}$

{3.1-30}
$$f(v)_{\max} = f(v_p) = \left(\frac{4}{e}\right) \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \sim \sqrt{\frac{m}{T}} . \quad (4.43)$$

Z rovnic (4.40) a (4.43) vyplývá, že při zvýšení teploty (nebo zmenšením hmotnosti molekuly) se maximum křivky posouvá k vyšším rychlostem, současně se však křivka stává plošší a širší, ale plocha pod křivkou se nemění. Znamená to, že při vyšší teplotě stává se nejpravděpodobnější rychlost méně „ostrou“ a hodnota rozdělovací funkce rychlosti klesá. Na obr. 4.9 jsou znázorněny dvě křivky rozdělení, které můžeme vyložit buď jako vztahující se k různým teplotám T_1 a T_2 (při stejné hmotnosti) nebo jako vztahující se k různým hmotnostem m_1 a m_2 (při stejné teplotě).

Zavedeme-li místo rychlosti kinetickou energii, vztah (4.37) nabude jinou formu. Diferencováním $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ obdržíme $dE_k = mvdv$ a po dosazení do (4.37) pak platí

{3.1-31}
$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{E_k}}{(kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right) dE_k . \quad (4.44)$$



{obr3.1-9}

Obr. 4.9

Tato rovnice vyjadřuje, kolik je těch molekul, jejichž energie náleží do daného intervalu kinetických energií.

{pr3.1-6} **KP 4.6-1** _____

Vypočítejte střední rychlost \bar{v} molekul O_2 a vodíku H_2 při laboratorní teplotě $T = 300 \text{ K}$, je-li molová hmotnost O_2 $M_m = 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$.

Řešení:

Vyjdeme ze vztahu pro střední rychlost molekul $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$. Provedeme úpravu $\frac{k}{m} = \frac{R}{M_m}$ a dosadíme do předchozího vztahu. Tak dostaneme

$$\bar{v}_{\text{O}_2} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{3,14 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}} \doteq 500 \text{ m s}^{-1}.$$

Molekuly H_2 mají hmotnost 16 krát menší, než molekuly O_2 . V důsledku toho bude jejich rychlost při stejné teplotě 4 krát větší

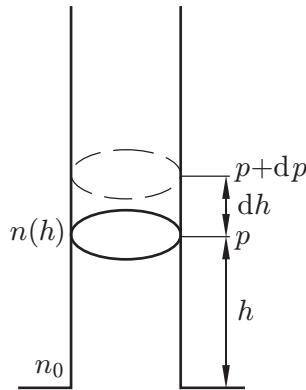
$$\bar{v}_{\text{H}_2} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,314 \text{ J kmol}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}} = 2000 \text{ m s}^{-1}.$$

4.6.2 Rozdělení počtu částic s výškou – Boltzmannovo rozdělení

eleniCastic}

Boltzmann zobecnil Maxwellův zákon rozdělení rychlosti (4.37) na případ, že se molekuly pohybují v tíhovém, eventuálně v jiném silovém poli. V rovnici (4.37) můžeme místo $\frac{1}{2}mv^2$ psát E_k . Boltzmann nahradil tuto kinetickou energii celkovou energií molekuly $E = E_k + E_p$, kde E_p je energie potenciální. Protože potenciální energie je obecně závislá na souřadnicích polohy, může se jednat jen o molekuly, jejichž rychlosti jsou v intervalu $(v_x, v_x + dv_x)$, $(v_y, v_y + dv_y)$, $(v_z, v_z + dv_z)$ a jejichž souřadnice leží současně v intervalu $(x, x + dx)$, $(y, y + dy)$, $(z, z + dz)$. Dostaneme tak Boltzmannův zákon

$$\{3.1-32\} \quad \frac{dN}{N} \sim \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dv_x dv_y dv_z dx dy dz. \quad \text{Boltzmannův zákon rozdělení energií} \quad (4.45)$$



Obr. 4.10

Tento zákon užijeme k odvození rozložení molekul (jejich počtu) v závislosti na výšce v tíhovém poli. Uvažujme o svislém sloupci plynu o stálé teplotě - obr. 4.10. Rychlost molekul i jejich rozložení podle rychlostí je podle Maxwellova zákona všude stejná. Rozložení molekul podle energií se řídí zákonem Boltzmannovým, kde celkovou energii píšeme $W = E_k + mgh$, kde mgh je potenciální energie molekuly ve výšce h . Uvažujeme-li jen množství plynu v objemové jednotce, pak volíme $dx dy dz = 1$. Počet molekul v jednotkovém objemu (tj. koncentraci částic) ve výšce $h = 0$ označíme n_0 , ve výšce h pak n_h . Rozdělení počtu molekul podle Boltzmannova zákona je

$$dn \sim n_0 \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right) \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) dv_x dv_y dv_z.$$

Podle Maxwellova zákona v libovolné výšce je

$$dn \sim n_0 \exp\left(-\frac{E_k}{kT}\right) dv_x dv_y dv_z.$$

Srovnáním obou vztahů, které musí být totožné, plyne, že počet molekul v objemové jednotce (koncentrace) ve výšce h je dán vztahem

$$\{3.1-33\} \quad n_h = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right). \quad (4.46)$$

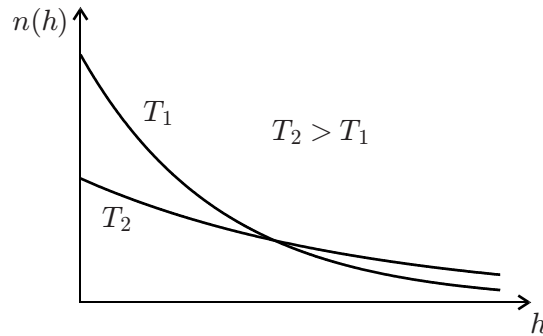
Z této rovnice vyplývá, že snížením teploty počet částic ve výškách různých od nuly ubývá a blíží se k nule při $T = 0$ (obr. 4.11). Při teplotě absolutní nuly by se všechny molekuly nacházely na povrchu Země. Při vysokých teplotách naproti tomu počet částic s výškou ubývá málo a jak se ukazuje, molekuly jsou rozloženy s výškou rovnoměrně.

Diskuse: _____

Tento fakt má prosté fyzikální objasnění. Každé skutečné rozdělení molekul s výškou se řídí působením dvou tendencí:

1. přitahování molekul k Zemi (charakterizované silou mg) – snaží se je rozložit na povrchu Země,
2. tepelný pohyb (charakterizovaný veličinou kT) – snaží se rozptýlit molekuly rovnoměrně ve všech výškách.

4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU



Obr. 4.11

Čím větší m a menší T , tím více převládá první tendence. Naopak při vysokých T převládá tepelný pohyb a hustota molekul pomalu ubývá s výškou.

Atmosférický tlak v libovolné výšce h je podmíněn tíhou výše položených vrstev plynu. Tlak ve výšce h je p a tlak ve výšce $h + dh$ je $p + dp$. Jestliže $dh > 0$, pak $dp < 0$ a tedy tlak bude s výškou ubývat. Rozdíl tlaků p a $p + dp$ je roven tíze plynu uzavřeno v objemu válce s plochou základny rovné jedné a výškou dh (obr. 4.10)

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

kde ρ je hustota plynu ve výšce h . Odsud

$$\{3.1-34\} \quad dp = -\rho g dh. \quad (4.47)$$

Za podmínek blízkých normálním (teplota 0°C , tlak 10^5 Pa), se vzduch málo liší ve svém chování ideálního plynu. Potom hustotu vzduchu můžeme vypočítat z rovnice $\rho = \frac{\bar{M}_m p}{RT}$. Dosazením do (4.47) dostaneme

$$\{3.1-35\} \quad dp = -\frac{\bar{M}_m p g}{RT} dh. \quad (4.48)$$

\bar{M}_m představuje číselnou hodnotu rovnou střední molekulové hmotnosti vzduchu (≈ 29). Provedeme v rovnici separaci proměnných

$$\{3.1-36\} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\bar{M}_m g}{RT} dh. \quad (4.49)$$

Teplota T je ale funkcí h . Je-li tvar této funkce $T(h)$ znám, rovnice (4.49) můžeme zintegrovat a najít závislost p na h . V případě konstantní teploty, tj. pro izotermickou atmosféru $T(h) = T$ konst., integrace vede ke vztahu

$$\ln p = \frac{\bar{M}_m g h}{RT} + \ln C,$$

kde C je konstanta, která závisí na počátečních podmínkách. Odlogaritmováním dostaneme

$$p = C \exp\left(-\frac{\bar{M}_m g h}{RT}\right).$$

Položíme-li $h = 0$, dostaneme, že $C = p_0$, kde p_0 je tlak ve výšce $h = 0$. Dosazením dostaneme rovnici, která vyjadřuje závislost tlaku na výšce (za podmínky $T(h) = T$ konst.)

$$\{3.1-37\} \quad p = p_0 \exp\left(-\frac{\bar{M}_m g h}{RT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{m g h}{kT}\right). \quad (4.50)$$

4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU

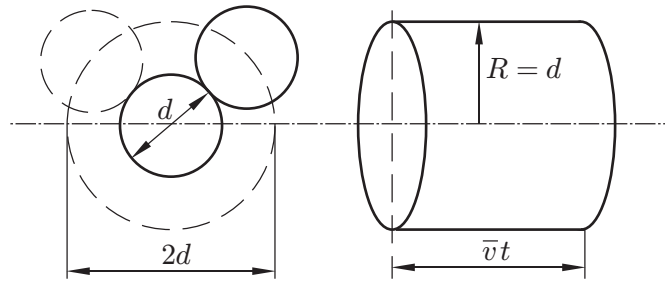
Tato rovnice se nazývá barometrická a užívá se k výpočtu atmosférického tlaku v různých výškách (za stálé teploty $T(h) = T$).

4.6.3 Střední volná dráha molekul

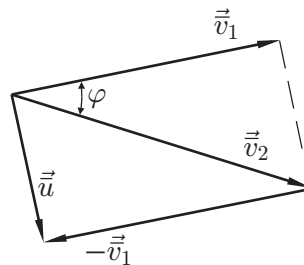
Správný obraz o chování molekul plynu si můžeme vytvořit jen tehdy, uvažujeme-li konečnou velikost molekul.

Vzájemné srážky molekul (především jejich počet) silně ovlivňují chování plynu. Množství vzájemných srážek charakterizujeme počtem srážek jedné molekuly s ostatními za jednotku času a nazýváme srážkovou frekvencí. O velikost srážkové frekvence rozhoduje charakter silového působení mezi molekulami. Působení při přibližování molekul postupně narůstá, ale není možno určit začátek a konec srážky. V případě ideálního plynu se problém zjednoduší, protože molekuly můžeme považovat za tvrdé kuličky s průměrem d . Délka dráhy molekuly mezi dvěma srážkami se nazývá volnou dráhou molekuly a označujeme ji λ . Při velkém počtu srážek určujeme její střední hodnotu $\bar{\lambda}$ a nazýváme ji střední volnou dráhou molekuly.

Předpokládejme, že všechny molekuly jsou v klidu a jen jedna z nich se pohybuje střední rychlostí \bar{v} . Za jednotku času narazí tato molekula na všechny molekuly, jejichž středy leží uvnitř prostoru, který je tvořen válcem o poloměru $R = d$ a výšce, která se rovná dráze, kterou molekula urazí rychlostí \bar{v} za jednotku času (obr. 4.12).



Obr. 4.12



Obr. 4.13

Počet nárazů za jednotku času na povrch molekuly, což je hustota toku molekul $z' = \pi d^2 \bar{v} n$, kde n je počet molekul v objemové jednotce (koncentrace). Střední volná dráha $\bar{\lambda}'$, kterou molekula urazí mezi dvěma srážkami⁸, je

$$\bar{\lambda}' = \frac{\bar{v}}{z'} = \frac{1}{\pi d^2 n}.$$

Protože se však pohybují všechny molekuly, je třeba střední rychlost \bar{v} molekuly, vztaženou ke stěnám nádoby, nahradit střední relativní rychlostí $\bar{u} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$ vzhledem k ostatním molekulu-

⁸Srážky pohybující se molekuly s jinými „nepohyblivými“ molekulami.

4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU

lám, tj. určíme střední relativní rychlost dvou molekul. (Tyto molekuly se vůči stěnám nádoby pohybují středními rychlostmi \vec{v}_1 a \vec{v}_2 .) Velikost rychlosti \bar{u}^2 vypočteme dle obr. 4.13 ze vztahu

$$\bar{u}^2 = \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 - 2\bar{v}_1\bar{v}_2 \cos \varphi,$$

přičemž \vec{v}_1 a \vec{v}_2 mají stejnou velikost, ale mohou mít všechny možné směry. Tedy $\cos \varphi$ má stejně často hodnoty kladné i záporné a jeho střední hodnota je tak rovna nule. Pak $\bar{u}^2 = 2\bar{v}^2$. Pohybují-li se tedy všechny molekuly rychlostí \bar{v} , pak skutečný počet srážek za jednotku času bude $z = \pi d^2 \bar{u} n = \pi \sqrt{2} d^2 \bar{v} n = \sqrt{2} z'$ a střední volná dráha⁹ molekul bude

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{z} = \frac{\bar{\lambda}'}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

{StrVolDrah}

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} d^2 n}. \quad \text{střední volná dráha} \quad (4.51)$$

Podle (4.14) je tlak plynu úměrný hustotě molekul ($p = nkT$), takže střední volná dráha molekul je nepřímo úměrná tlaku plynu

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} d^2 n} = \frac{kT}{\pi \sqrt{2} d^2 p} \sim \frac{1}{p}.$$

Tento vztah představuje relaci mezi mikroskopickou veličinou $\bar{\lambda}$ a makroskopickou veličinou p .

4.6.4 Příklady z molekulárně kinetické teorie

{pr3.1-7}

KP 4.6-2 _____

Láhev obsahuje 4 kg kyslíku O₂.

1. Jaké je látkové množství v kilomolech?
2. Kolik molekul obsahuje láhev?

{pr3.1-8}

KP 4.6-3 _____

Jedna láhev obsahuje kyslík O₂, druhá vodík H₂.

1. Jsou-li hmotnosti plynů v obou láhvích stejné, jaký je poměr jejich látkových množství?
2. Obsahují-li láhve stejná množství plynu, jaký je poměr hmotností plynů?

{pr3.1-9}

KP 4.6-4 _____

Dokažte, že součin číselných hodnot Avogardovy konstanty a atomové jednotky je roven jedné. Jaký rozměr má tento součin?

{pr3.1-10}

KP 4.6-5 _____

Stanovte objem kilomolu ideálního plynu při tlaku 10⁵ N m⁻² a teplotě 0 °C.

⁹Srážky pohybující se molekuly s jinými pohybujícími se molekulami.

4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU

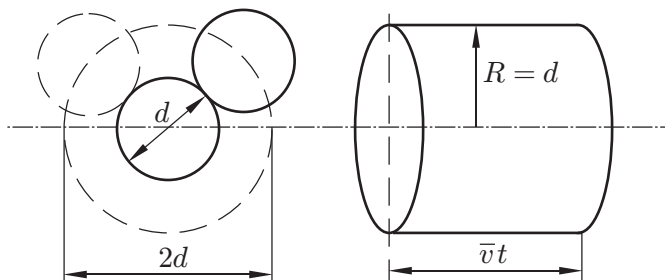
{pr3.1-11} **KP 4.6-6** _____

Ideální plyn má objem $4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, tlak $2 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$ a teplotu 300 K. Plyn nejdříve expanduje za konstantního tlaku na dvojnásobek původního objemu, potom je stlačen izotermicky na původní objem a nakonec ochlazen za konstantního objemu na původní tlak.

1. Znázorněte děj v $p - V$ diagramu.
2. Vypočítejte teplotu během izotermické komprese.
3. Vypočítejte maximální tlak.

{pr3.1-12} **KP 4.6-7** _____

V úzké trubici délky $l = 70 \text{ cm}$ postavené zataveným koncem dolů je sloupec vzduchu uzavřený



Obr. 4.14

prik.3.1-12}

shora sloupцем rtuť o výšce $h = 20 \text{ cm}$. Rtuť dosahuje k hornímu okraji trubice. Trubicu opatrně obrátíme a část rtuť vyteče.

1. Jak vysoký sloupec rtuť zůstane v kapiláře, je-li barometrický tlak $1,013 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$.
2. Při jakém barometrickém tlaku vyteče rtuť z kapiláry úplně?

{pr3.1-13} **KP 4.6-8** _____

Láhev o objemu 2l (opatřena kohoutem) obsahuje kyslík O_2 teploty 300 K a atmosférického tlaku 10^5 N m^{-2} . Soustavu zahřejeme na teplotu 400 K při otevřeném kohoutu. Kohout pak zavřeme a láhev ochladíme na původní teplotu.

1. Jaký je konečný tlak kyslíku O_2 v láhvi?
2. Kolik gramů kyslíku O_2 unikne z láhve?

{pr3.1-14} **KP 4.6-9** _____

Předpokládejme, že molekuly ideálního plynu jsou rovnoměrně rozloženy v prostoru tak, že jsou umístěny ve středech shodných krychlí. Teplota plynu je 273 K, tlak 10^5 N m^{-2} .

1. Vypočítejte délku hrany krychle a srovnejte ji s průměrem molekuly $3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.
2. Proveďte tentýž výpočet pro vodu. Jeden kilomol vody má objem 18 litrů.

4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU

{pr3.1-15} **KP 4.6-10** _____

Jaký tlak na stěnu vyvíjí molekuly vodíku H_2 , dopadne-li za sekundu 10^{23} molekul na 2 cm^2 plochy stěny? Úhel dopadu molekul je 45° , rychlost molekul 10^3 m s^{-1} a hmotnost molekuly vodíku H_2 je $3,32 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$.

{pr3.1-16} **KP 4.6-11** _____

Kyslík O_2 teploty 273 K a tlaku 10^5 N m^{-2} je uzavřen v krychlové nádobě o straně $0,1\text{ m}$. Za jak dlouho projde typická molekula nádobou od stěny ke stěně?

{pr3.1-17} **KP 4.6-12** _____

Je dána skupina částic (N_i je počet částic, jež mají rychlost v_i).

N_i	2	4	6	8	2
$v_i(\text{ cms}^{-1})$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

1. Vypočítejte střední rychlost \bar{v} .
2. Vypočítejte střední kvadratickou rychlost \bar{v}_k .
3. Mezi pěti rychlostmi nalezněte nejpravděpodobnější rychlost v_p .

{pr3.1-18} **KP 4.6-13** _____

Vypočítejte střední kvadratickou rychlost atomu argonu Ar při pokojové teplotě $20\text{ }^\circ\text{C}$. Při jaké teplotě bude mít střední kvadratická rychlost poloviční (dvojnásobnou) hodnotu?

{pr3.1-19} **KP 4.6-14** _____

Střední kvadratická rychlost molekul kyslíku O_2 při $0\text{ }^\circ\text{C}$ je rovna 460 m s^{-1} , molová hmotnost kyslíku je 32 kg kmol^{-1} , argonu Ar 40 kg kmol^{-1} a hélia He 4 kg kmol^{-1} . Lze z těchto údajů vypočítat střední kvadratickou rychlost hélia a argonu při $40\text{ }^\circ\text{C}$ bez použití jiných údajů nebo obecných konstant?

{pr3.1-20} **KP 4.6-15** _____

1. Jaká je vnitřní energie v jednom kilomolu hélia He za teploty 300 K ?
2. Jaký je přírůstek vnitřní energie jednoho kilomolu při zvýšení teploty o 1 K ?
3. Srovnajte tento přírůstek s teplem potřebným ke zvýšení teploty jednoho kilomolu o 1 K při stálém objemu.

{pr3.1-21} **KP 4.6-16** _____

Molová tepelná kapacita argonu Ar při konstantním objemu je $c_V = 315\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$. Vypočtěte z něho relativní molekulovou hmotnost argonu a hmotnost molekuly argonu.

{pr3.1-22} **KP 4.6-17** _____

Vypočítejte přírůstek střední hodnoty translační kinetické energie molekuly argonu (kyslíku), jestliže při zachování objemu dodáme 352 J tepla do $0,2\text{ kg}$ plynu.

4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU

{pr3.1-23} **KP 4.6-18** _____

Vypočítejte střední kvadratickou rychlost \bar{v}_k , střední rychlost \bar{v} a nejpravděpodobnější rychlost v_p molekul dusíku N_2 při teplotě 273 K ($M_m = 28 \text{ kg kmol}^{-1}$).

{pr3.1-24} **KP 4.6-19** _____

Uvažte, jakým postupem lze z Maxwellovy křivky pro rozdělení rychlostí při teplotě T_1 sestrojít graf rozdělení rychlostí při jiné teplotě T_2 .

{pr3.1-25} **KP 4.6-20** _____

V jaké výšce je hustota vzduchu rovna jedné polovině hustoty u hladiny moře? Teplota vzduchu je $0 \text{ }^\circ\text{C}$, za hmotnost kilomolu dosadíte 29 kg kmol^{-1} .

{pr3.1-26} **KP 4.6-21** _____

Dopravní letoun letí ve výšce 8 300 m. Kompresory udržují v kabině stálý tlak odpovídající výšce 2 700 m. Vypočítejte rozdíl tlaků uvnitř a vně kabiny. Teplota vzduchu je $0 \text{ }^\circ\text{C}$, hmotnost kilomolu vzduchu je 29 kg kmol^{-1} a tlak vzduchu v nulové výšce je 10^5 N m^{-2} .

{pr3.1-27} **KP 4.6-22** _____

V elektronce jsou zbytky dusíku N_2 o tlaku $1,33 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$ a teploty $60 \text{ }^\circ\text{C}$. Vypočítejte:

1. Počet molekul v 1 m^3 .
 2. Střední volnou dráhu molekul. Průměr molekuly dusíku je $3,78 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.
-

{pr3.1-28} **KP 4.6-23** _____

Při teplotě $20 \text{ }^\circ\text{C}$ a tlaku 10^4 Pa je střední volná dráha molekul argonu Ar $9,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

1. Jaká je střední volná dráha molekul argonu při $20 \text{ }^\circ\text{C}$ a $2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$?
 2. Jaká je střední volná dráha při $-40 \text{ }^\circ\text{C}$ a 10^4 Pa ?
-

{pr3.1-29} **KP 4.6-24** _____

Střední volná dráha molekul vodíku H_2 za normálních podmínek ($1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $0 \text{ }^\circ\text{C}$) je $1,28 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

1. Vypočítejte průměr vodíkové molekuly.
 2. Jaká je střední volná dráha při tlaku $1,33 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$ a $0 \text{ }^\circ\text{C}$?
-

{pr3.1-30} **KP 4.6-25** _____

Plyn zaujímá při teplotě $0 \text{ }^\circ\text{C}$ určitý objem V_0 . Vypočítejte, za jaké teploty zaujme plyn $2/3$ původního objemu při konstantním tlaku.

{pr3.1-31} **KP 4.6-26** _____

Při jaké teplotě má plyn při nezměněném objemu n -krát větší tlak než při $0 \text{ }^\circ\text{C}$?

4.6. STATISTICKÉ ZÁKONITOSTI IDEÁLNÍHO PLYNU

{pr3.1-32} **KP 4.6-27** _____

Láhev obsahuje při teplotě 27°C a tlaku $4 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-2}$ stlačený plyn. Jak se mění tlak plynu, vypustíme-li polovinu jeho množství a poklesne-li při tom jeho teplota o 15°C ?

{pr3.1-33} **KP 4.6-28** _____

Příkon elektrického vařiče je 250 W . Vařič uvede do varu $1,5 \text{ kg H}_2\text{O}$ 15°C teplé za 1 hodinu. Jaká je účinnost vařiče?

{pr3.1-34} **KP 4.6-29** _____

Láhev obsahuje 1 kg kyslíku o tlaku 10 at a teplotě 47°C . Uzávěr láhve dobře netěsní, takže O_2 uniká. Po určité době byl opět změřen tlak a teplota kyslíku a bylo zjištěno, že tlak klesl na $5/8$ své původní hodnoty a teplota na 27°C .

1. Jaký je objem v láhvi?
 2. Kolik gramů O_2 zůstalo v láhvi?
-

5. Termodynamika

5.1 Základní pojmy termodynamiky

Tato část je úvodní kapitolou. V odst. 5.1.1 je uvedeno, co je předmětem zkoumání termodynamiky. Definice teploty a její měření a definice teplotní stupnice je provedeno v odst. 5.1.2. Dále jsou zde vyloženy základní pojmy termodynamiky jako teplo a práce (odst. 5.1.3).

Cíl: I) Umět z paměti veličiny a definice uvedené v rámečcích v této části.

II) Samostatně řešit příklady uvedené v textu (odst. 5.1.3), řešení zdůvodnit a nakreslit náčrtky.

Z dosavadních poznatků plyne, že neuspořádaný pohyb molekul se řídí jistými zákonitostmi. Tak např. z Maxwellova zákona o rozdělení rychlostí molekul plyne, že mezi rychlostmi, jež mají náhodné rozdělení, existuje nejpravděpodobnější rychlost taková, že rychlosti, které se od ní více odlišují, existují jen zřídka. Nebo to, že průměrná kinetická energie translačního pohybu připadající na jeden stupeň volnosti má zcela určitou hodnotu, ačkoliv jednotlivé molekuly mohou mít kinetické energie obecně různé. Střední hodnota těchto kinetických energií určuje pak teplotu látky. Makroskopické veličiny p , V a T charakterizující stav látky mají určitou hodnotu jen proto, že jsou to střední hodnoty velkého počtu jednotlivých elementárních dějů. Při studiu jevů v malých oblastech, kde je počet molekul malý, se musí objevovat odchylky od stanovených středních hodnot. Takové odchylky se skutečně pozorují a nazývají se fluktuace.

5.1.1 Předmět termodynamika

Obor fyziky, který se zabývá obecnými zákonitostmi, jimiž se řídí přeměna celkové energie makroskopických systémů v její různé formy, se nazývá termodynamika. Nepřihlíží-li se k vnitřní struktuře vyšetřovaných objektů, tj. nerozebírají-li se děje mikroskopicky, nazývá se termodynamika fenomenologická. Spočívá na několika experimentálně ověřených principech – termodynamických větách.

Rozvoj molekulové a statistické fyziky umožnil přesnější formulaci některých principů termodynamiky a pomohl určit hranice jejich použitelnosti. Termodynamika může často mnohem jednodušeji popsat zkoumané jevy. To má velký význam nejen v mnoha oborech fyziky, ale i v chemii, biologii a v technologii přípravy různých materiálů s požadovanými vlastnostmi. Na druhé straně i když správně vysvětlujeme mnohé jevy, nepodává však obraz o jejich mechanismu. Hlubší pohled na zákony termodynamiky podává až statistická fyzika.

5.1.2 Teplota a její měření

Nejjednodušší způsob rozlišení teplých těles od studených je hmatem. Dotykem můžeme seřadit tělesa podle subjektivních pojmů „tepla“ a „chladu“. Objektívni příčině našich subjektivních vjemů říkáme „teplota“. Subjektivní určování teploty může být značně zkresleno a rozsah vnímání teploty je omezen. Potřebujeme objektivní, číselné měření teploty jako fyzikální veličiny. Pojem teploty se někdy definuje jako fyzikální veličina, která charakterizuje tepelný stav tělesa.

Se změnou teploty se mění mnoho fyzikálních vlastností látek, jako např. objem plynu udržovaného při stálém tlaku, tlak plynu udržovaného při stálém objemu, objem kapaliny, elektrický

5.1. ZÁKLADNÍ POJMY TERMODYNAMIKY

odpor, elektrické napětí (v termočlátku), rozměry tuhých těles apod. Kterákoliv z těchto vlastností může být užita k měření teploty, k zhotovení teploměru a stanovení samostatné teplotní stupnice. Teplotní stupnice závisí na užití termoelektrické látky. Teplotní stupnici definujeme předpokládanou monotónní stupnicí. K definici teploty se používá termometrické látky o zvláštní termometrické vlastnosti. Zvolme veličinu X za termometrickou vlastnost vybrané látky, kterou uijeme ke stanovení teplotní stupnice. Můžeme libovolně zvolit teplotu T jako lineární funkci vlastnosti X

$$T(X) = aX ,$$

kde a je konstanta. Stejným teplotním rozdílům odpovídají stejné změny v X . Z toho plyne, že poměr teplot (měřených týmž teploměrem) je ve stálém poměru jako jejich odpovídající si X , tj.

$$\frac{T(X_1)}{T(X_2)} = \frac{X_1}{X_2} .$$

K určení konstanty a tím kalibraci teploměru zvolíme standardní pevný bod, při kterém všechny teploměry musí mít stejné čtení pro teplotu. Za tento bod byl vybrán bod, při kterém led, voda a vodní pára spolu existují v rovnováze a nazývá se trojný bod vody. Teplota v tomto bodě byla označena

$$T_{\text{tr}} = 273,16 \text{ K} .$$

Jednotkový teplotní interval je označen 1 K (kelvin). Pak pro všechny teploměry platí

$$\frac{T(X)}{T(X_{\text{tr}})} = \frac{X}{X_{\text{tr}}} ,$$

kde hodnoty v trojném bodě jsou označeny indexem tr ,

$$\{3.2-1\} \quad T(X) = 273,16 \text{ K} \frac{X}{X_{\text{tr}}} . \quad (5.1)$$

Tuto rovnici můžeme použít pro různé teploměry. Nechť X je délka L sloupce rtuti ve skleněném teploměru, pak

$$T(L) = 273,16 \text{ K} \frac{L}{L_{\text{tr}}} .$$

Označíme-li za X tlak plynu při konstantním objemu, pak

$$\{3.2-2\} \quad T(p) = 273,16 \text{ K} \frac{p}{p_{\text{tr}}} \quad (\text{při konst.}V) \quad (5.2)$$

apod.

Podle této definice souhlasí čtení teploty na všech druzích teploměrů ve standardním pevném bodě. Pro různé teploměry by však bylo čtení teploty daného systému různé. K odstranění této nejednotnosti vybereme určitý druh teploměru jako standard. Volba se provede tak, aby fyzikální zákony týkající se teploty měly co nejjednodušší tvar. Tomuto požadavku nejlépe vyhovuje plyn jako teploměrná látka za konstantního objemu a teploměrnou vlastností je tlak. Čím je menší tlak plynu teploměru, tím se dosáhne menšího rozdílu při čtení mezi různými plynovými teploměry.

Podle (5.2) by měl tlak plynu klesnout na nulu při teplotě $T = 0 \text{ K}$. V reálných plynech tlak plynu nemůže nikdy být nulový, proto se zavádí abstraktní pojem ideálního plynu (viz kap. 4.2). Definice teplotní stupnice ideálního plynu je dána vztahem

$$\{3.2-3\} \quad T = 273,16 \text{ K} \lim_{p_{\text{tr}} \rightarrow 0} \left(\frac{p}{p_{\text{tr}}} \right) \quad (\text{při konst.}V) . \quad \text{definice teplotní stupnice ideálního plynu} \quad (5.3)$$

{ram-113}

5.1. ZÁKLADNÍ POJMY TERMODYNAMIKY

Nejnižší teplota, která může být měřena plynovým teploměrem, je přibližně 1 K.

Poznámka: Absolutní nulová teplota je odvozena extrapolací a nepodařilo se jí dosáhnout experimentálně. Spojení makroskopického pojmu teploty s mikroskopickým pojmem molekulového pohybu vede k názoru, že při přibližování se k absolutní nule kinetická energie molekul se blíží ke konečně minimální hodnotě, tzv. energii nulového bodu.

Absolutní termodynamickou teplotní stupnici nebo také Kelvinovu stupnici, která je identická se stupnicí ideálního plynu, zavedeme v odst. 5.6.4.

Existují systémy, které mají záporné Kelvinovy teploty. Takové teploty se dosáhnou postupováním přes nekonečné teploty a ne projitím přes 0 K. Záporné teploty tedy nejsou „chladnější“ než absolutní nula, ale „teplejší“ než nekonečné teploty. Absolutní nula zůstává experimentálně nedosažitelná.

Při měření teploty se užívá za základní teplotní stav teplota tání ledu (tj. teplota rovnovážného stavu vody a ledu za normálního tlaku $p_n = 1,01325 \cdot 10^5$ Pa), které je v absolutní termodynamické stupnici přiřazena číselná hodnota

$$T_n = 273,15 \text{ K}.$$

Protože tento teplotní stav definuje nulu termodynamické stupnice Celsiovy a obě stupnice jsou určeny stejným způsobem, souvisí teplota ve stupních Celsiových, označená t ($^{\circ}\text{C}$), s teplotou T v kelvinech K jednoduchým vztahem

$$t = T - T_n.$$

Teplota trojného bodu H_2O v Celsiově stupnici je tedy $t_{\text{tr}} = 0,01$ $^{\circ}\text{C}$, teplota bodu varu vody za normálního tlaku $t = 100,00$ $^{\circ}\text{C}$.

5.1.3 Teplo a práce

TeploAPrace}

Myšlenka, že teplo je nějaká „látka“, odporovala mnoha experimentům. Kdyby teplo bylo „látkou“ nebo určitým druhem energie, která by neměnila podstatu, nebylo by možné odebírat neomezeně teplo ze systému, který se nemění.

Podobně práce není něco, čeho nějaký systém obsahuje určité množství. Můžeme vložit nekonečné množství práce do systému, aniž bychom změnili jeho podmínky. Práce, právě tak jako množství dodaného tepla, má za následek změnu energie. V mechanice je práci charakterizován děj, jímž se mění energie soustavy, ale při kterém se teplota a skupenství látek nemění.

Při procesu (např. tření povrchů dvou těles), kdy neexistuje žádná mez pro množství tepla, které může být systému odňato nebo pro množství práce, které může být do něj vloženo, pojem „teplo v systému“ nebo „práce v systému“ nemá význam. Jen během termodynamického procesu, při kterém systém mění rovnovážný stav a je ovlivňován okolím, dáváme významu teple Q a práci W .

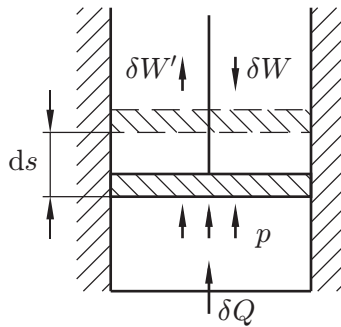
Práce i teplo jsou mírou změny energie systému, nejsou však s energií totožné. Energie je jednodušší funkcí jejího stavu, protože charakterizuje systém. Systém má určitou energii, i když se s ní nedějí žádné změny, tj. neprobíhají žádné děje. Pojmy práce a teplo mají smysl jen tehdy, když jde o děj, jímž se stav systému mění. Tedy práce i teplo nejsou funkcemi stavu systému.

Někdy se pod pojmem teplo obsažené v soustavě rozumí celková tepelná energie soustavy. Tato nejednoznačnost vede k nejasnostem. Teplem budeme rozumět veličinu ekvivalentní práci jako míru změny energie. Energií související s teplotou soustavy budeme nazývat vnitřní energii.

Určíme nyní teplo Q a práci W pro specifický termodynamický proces. Mějme plyn ve válcové nádobě s pohyblivým pístem. Nechť plyn o tlaku p_1 a objemu V_1 je systémem v rovnováze



5.1. ZÁKLADNÍ POJMY TERMODYNAMIKY



{obr3.2-1}

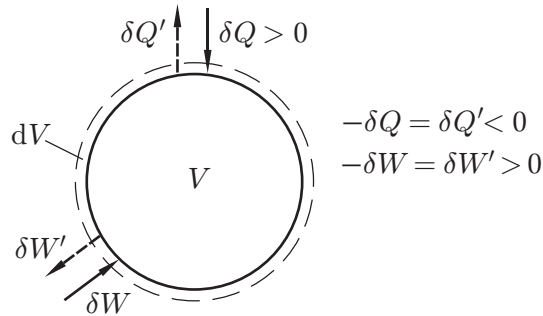
Obr. 5.1

s okolím, které je tvořeno pístem a tepelným zásobníkem (viz obr. 5.1). Teplo může přecházet dnem válce, práce může být konána okolím nebo systémem stlačením nebo rozpínáním plynu posouváním pístu. Uvažujme nyní o dějích, kterými plyn dosáhne konečného rovnovážného stavu charakterizovaného tlakem p_2 a objemem V_2 .

Nechť se plyn rozpíná a posouvá píst. Práce $\delta W'$ vykonaná plynem při přemístění pístu (o ploše S) o malou vzdálenost ds je

$$\{3.2-4\} \quad \delta W' = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos 0^\circ = F ds = pS ds = p dV, \quad (5.4)$$

kde dV je diferenciální změna objemu plynu.



{obr3.2-2}

Obr. 5.2

Poznámka: V termodynamických úvahách byla zavedena znaménková konvence (obr. 5.2). Užívá se pro teplo systémem (tj. plynem) vydané a pro práci systémem (plynem) vykonanou užitím symbolů Q' a W' . Množství tepla, které odevzdalo okolí systému (plynu), případně práci, kterou okolí na systému (plynu) vykonalo, označujeme symboly nečárkovanými.

Obecně tlak nebude během procesu konstantní. Celková práce vykonaná plynem ze stavu 1 do stavu 2 podél křivky a bude

PracePlynem}

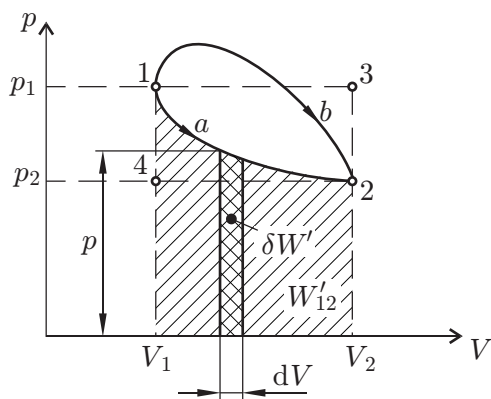
$$W'_{12} = \int_{1(a)}^2 \delta W'_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad \text{práce vykonaná plynem} \quad (5.5)$$

{ram-114}

Tento integrál se dá znázornit graficky jako plocha pod křivkou 1-a-2 v p - V diagramu (obr. 5.3).

Systém se může z počátečního stavu 1 do konečného stavu 2 dostat různými způsoby. Práce vykonaná systémem při rozepnutí plynu podél křivky 1-b-2 (nebo 1-3-2, nebo 1-4-2) bude obecně jiná než v předchozím případě.

5.2. PRVNÍ PRINCIP TERMODYNAMIKY



Obr. 5.3

{obr3.2-3}

Tedy práce konaná systémem nezávisí jen na počátečním a konečném stavu, ale také na středních stavech, tj. na cestě procesu.

K podobnému výsledku dospějeme, určíme-li teplo dodané během děje. Stav 1 je charakterizován teplotou T_1 a konečný stav 2 teplotou T_2 . Teplo dodávané systému závisí na tom, jak je systém zahříván. Můžeme jej zahřívát při konstantním tlaku p_1 , až dosáhneme teploty T_2 a pak změnit tlak při konstantní teplotě na konečnou hodnotu p_2 . Nebo můžeme nejdřív snížit tlak na p_2 a pak systém zahřívát při konstantním tlaku až ke konečné hodnotě T_2 . Nebo můžeme sledovat mnoho různých cest, ale každá dává jiný výsledek pro teplo dodané systému okolím. Tedy teplo získané nebo odevzdané systémem závisí nejen na počátečním a konečném stavu, ale také na středních stavech, tj. na cestě děje. To je experimentálně ověřeno. V našem značení budeme nadále používat pro malé změny veličin, které obecně závisí na cestě změny, symbolu δ (např. $\delta W'$, δQ). Naopak pro ty veličiny, jejichž integrál na integrační cestě nezávisí, budeme užívat symbolů pro tzv. úplný diferenciál, tj. např. dU .

5.2 První princip termodynamiky

PrincipTermo}

Je to nejdůležitější část termodynamiky. Je v ní vyložena základní princip termodynamiky, z fyzikálního hlediska představuje zákon zachování energie.

Cíl: I) Zpaměti vyložit a definovat základní princip termodynamiky.

II) Samostatně aplikovat a řešit příklady v tomto textu a příklady podobného typu.

Nechť systém přechází z počátečního rovnovážného stavu 1 do konečného rovnovážného stavu 2 určitým způsobem. Teplo přijaté systémem (tj. plynem) označíme Q a práci, kterou koná okolí na plynu, označíme W . Vypočteme-li $Q + W$, tj. součet tepla dodaného okolím a práce vykonané okolím na plynu při přechodech ze stavu 1 do stavu 2 po různých cestách, je tento součet vždy stejný, tedy na cestě nezávislý. V termodynamice existuje veličina, která je funkcí termodynamických souřadnic, a jejíž rozdíl v konečném a počátečním stavu se rovná součtu $Q + W$ v celém procesu. Tuto veličinu nazýváme vnitřní energií a značíme ji U .

Na základě souvislosti mechanické a tepelné formy energie můžeme zobecnit zákon zachování energie, známý už z mechaniky, i pro obecné makroskopické systémy. Tento zákon je formulován v první termodynamické větě. Součet tepla dodaného plynu a práce vykonané na plynu okolím

5.2. PRVNÍ PRINCIP TERMODYNAMIKY

reprezentuje podle definice změnu vnitřní energie systému

$$\{3.2-5\} \quad U_2 - U_1 = \Delta U = Q + W. \quad (5.6)$$

Pro vnitřní energii můžeme volit ve standardním referenčním stavu libovolnou hodnotu. Rovnici (5.6) nazýváme první termodynamickou větou.

Při výpočtu práce vykonané na systému (tj. W) nebo tepla dodaného okolím systému (tj. Q) se obvykle pozorovaný proces rozloží na celou řadu elementárních procesů, z nichž každá odpovídá velmi malé změně (tj. změně konečné hodnoty) parametrů systému. Rovnice (5.6) pro tyto elementární procesy má pak tvar

$$\{3.2-6\} \quad \Delta U = \Delta Q + \Delta W. \quad (5.7)$$

V uvažovaném systému probíhá jen infinitezimální (tj. nekonečně malá) změna stavu, je proto přijato jen infinitezimální množství tepla δQ a vnější síly vykonají na systému jen infinitezimální práci δW . Pak změna vnitřní energie je dU a první termodynamická věta v diferenciálním tvaru je zapsána

$$\{3.2-7\} \quad dU = \delta Q + \delta W. \quad (5.8)$$

Zde se vyskytují dvě elementární veličiny δQ a δW , které nejsou úplnými diferenciály žádné stavové funkce (tedy závisí na dráze p - V diagramu), avšak jejich součet je úplným diferenciálem stavové funkce (nazvané vnitřní energie). Proto jsou elementární změny δQ a δW označeny jinak, než elementární změna dU .

Z rovnice (5.8) při platnosti $\delta W = -\delta W'$ plyne

$$\{\text{Nova3.2-77}\} \quad \delta Q = dU - \delta W \rightarrow \delta Q = dU + \delta W' \quad (5.9)$$

a první termodynamická věta se dá vyslovit takto:

Teplu dodané soustavě se spotřebuje na zvýšení její vnitřní energie a na práci systémem konanou.

První termodynamickou větu lze užitím rovnice (5.4) psát ve tvaru

$$\{\text{Nova3.2-88}\} \quad \delta Q = dU + pdV. \quad \text{první princip termodynamiky} \quad (5.10)$$

{ram-115}

Při cyklickém ději, tj. takovém ději, při kterém se soustava vrací do původního stavu (změna vnitřní energie je nulová), je přivedené teplo rovno odevzdané práci.

{kpr3.2-1} **KP 5.2-1** _____

Ve válci s pohyblivým pístem je 36 g vodíku teploty 27°C pod tlakem $3,92 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$. Na jeho stlačení na třetinu původního objemu bylo zapotřebí vynaložit práci $1,50 \cdot 10^5 \text{ J}$ a současně se mu odňalo ochlazením $5,9 \cdot 10^4 \text{ J}$ tepla. Vypočítejte teplotu a tlak vodíku po stlačení.

Řešení:

Užijeme první termodynamickou větu ve tvaru

$$\Delta U = Q + W$$

po dosazení veličin $Q = -5,9 \cdot 10^4 \text{ J}$, $W = 15,0 \cdot 10^4 \text{ J}$ vypočteme změnu vnitřní energie $\Delta U = Q + W = -5,9 \cdot 10^4 \text{ J} + 15,0 \cdot 10^4 \text{ J} = 9,1 \cdot 10^4 \text{ J}$.

Užitím rovnic 4.31 ($U = n_m c_V T$), 4.32 (vyjadřující vztah mezi počtem molů n_m , molární hmotností M_m a celkovou hmotností M plynu) a při znalosti 4.34 (c_V pro dvouatomární plyn) lze dpovídající změnu teploty vyjádřit

$$\Delta T = \frac{\Delta U}{n_m c_V} = \frac{M_m \cdot \Delta U}{M c_V} = \frac{2 \text{ kg kmol}^{-1} \cdot 9,1 \cdot 10^4 \text{ J}}{3,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 2,1 \cdot 10^4 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 241 \text{ K}.$$

5.3. VRATNÉ A NEVRATNÉ DĚJE

Konečná teplota je

$$T_2 = T_1 + \Delta T = 300 \text{ K} + 241 \text{ K} = 541 \text{ K},$$

tedy

$$t_2 = T_2 - T_0 = 541 \text{ K} - 273 \text{ K} = 268 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Tlak určíme ze stavové rovnice

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Z toho plyne

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} \frac{T_2}{T_1} = 3,92 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} \cdot 3 \cdot \frac{541 \text{ K}}{300 \text{ K}} = 2,14 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

5.3 Vratné a nevratné děje

V odst. 5.3.1 je vyložena stav termodynamické rovnováhy. V dalším odst. 5.3.2 jsou vyšetřeny děje z hlediska vratnosti a nevratnosti.

Cíl: I) Vyložit a definovat pojmy a veličiny uvedené v rámečcích v tomto odstavci.

5.3.1 Stav termodynamické rovnováhy

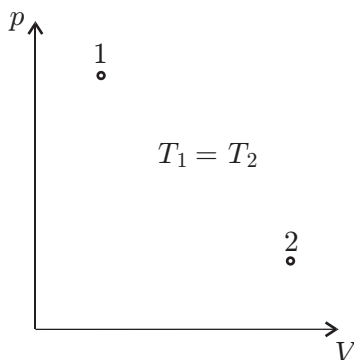
Většina fyzikálních problémů spočívá v úloze zjistit, jaké vlastnosti bude mít systém za určitých vnějších podmínek. Parametry charakterizující vnější podmínky nazýváme vnější parametry. Po uplynutí určité doby (během níž probíhají v systému změny) se vlastnosti systému ustálí v souladu s novými vnějšími podmínkami, přičemž v systému přestanou probíhat všechny makroskopické děje. Takto dosažený stav se nazývá stavem termodynamické rovnováhy a čas potřebný na jeho dosažení relaxační dobou.

Můžeme rovněž vnější parametry doplnit o další údaje o struktuře molekul a vnitřní systému, které rovněž odrážejí vlastnosti systému – tyto označujeme jako vnitřní parametry. Z celkového počtu makroskopických parametrů systému (vnějších i vnitřních) můžeme vybrat určitý počet parametrů, které jsou navzájem nezávislé. Tyto parametry jednoznačně charakterizují stav systému, a proto je nazýváme stavové proměnné. Funkce stavových proměnných nazýváme stavové funkce. Dělení parametrů na vnitřní a vnější je možné si objasnit na příkladě ideálního plynu. Ideální plyn jako systém je reprezentovaný určitým pevně zvoleným počtem molekul. Protože objem V , tlak p a teplota T plynu jsou ve stavu termodynamické rovnováhy navzájem vázané stavovou rovnicí ideálního plynu, je počet nezávislých parametrů roven dvěma – pak kterákoliv z dvojic $V-T$, $V-p$, $T-p$ může tvořit stavové proměnné. Při dalším dělení parametrů na vnější a vnitřní je třeba přihlížet ke konkrétním podmínkám, ve kterých se systém nachází.

5.3.2 Vratné a nevratné děje

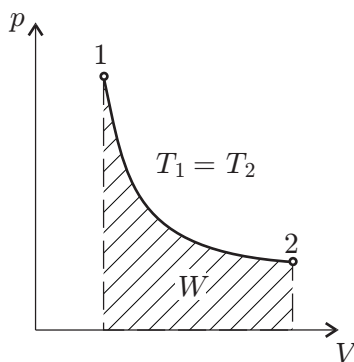
Mějme plyn o hmotnosti M uzavřený pístem ve válci o objemu V – obr. 5.1. Plyn má teplotu T a tlak p . V termodynamické rovnováze zůstávají tyto termodynamické veličiny časově neměnné. Předpokládejme, že válec, jehož stěny jsou dokonalým tepelným izolátorem a dno naopak ideálním vodičem tepla, postavíme na těleso o velké tepelné kapacitě o téže teplotě. Převědme systém do jiného rovnovážného stavu o téže teplotě T , pouze objem plynu zmenšíme na polovinu. Z mnoha způsobů, kterými toto můžeme provést, rozebereme dva extrémní případy.

5.3. VRATNÉ A NEVRATNÉ DĚJE



{obr3.2-4}

Obr. 5.4



{obr3.2-5}

Obr. 5.5

- a) Stlačíme píst velmi prudce a počkáme, až nastane znovu rovnováha s ohřívačem o teplotě T . Během tohoto děje mění se tlak i teplota plynu různě v celém objemu. Při rychlé kompresi je tlak plynu v blízkosti pístu větší, než je střední tlak plynu ve válci. (Naopak při expanzi plynu by byl tlak u pístu menší, než je střední tlak plynu.) Děj nemůžeme znázornit spojitou křivkou v p - V diagramu, protože nevíme, jakou hodnotu tlaku (nebo teploty) máme přiřadit danému objemu. Systém přejde z jednoho rovnovážného stavu 1 do druhého rovnovážného stavu 2 přes množinu nerovnovážných stavů (obr. 5.4).
- b) Stlačíme píst velmi pomalu nepatrným zvyšováním působící síly na píst tak, aby tlak, objem a teplota plynu se daly v každém okamžiku dobře určit. Při nepatrném zvýšení tlaku se objem trochu zmenší a teplota se zvýší. Systém se bude odchylovat od rovnovážného stavu, ale jen nepatrně. Malé množství tepla se předá ohřívači a celý systém v krátkém čase opět bude v rovnováze. Během celého procesu až do dosažení polovičního objemu se systém vždy nacházel ve stavu velmi blízkém rovnovážnému stavu. Při infinitezimálních změnách tlaku dostaneme se k ideálnímu procesu, při kterém systém prochází spojitou řadou rovnovážných stavů, které můžeme v p - V diagramu znázornit spojitou čarou na obr. 5.5. Během děje se jisté množství tepla předá ohřívači. Děj je vratný, jestliže při nekonečně malém snížení vnějšího tlaku probíhá děj opačným směrem a přitom soustava přijme totéž množství tepla od ohřívače. To lze přesně uskutečnit jen při velmi pomalých dějích. Pomalé děje jsou tedy nutnou podmínkou vratnosti, ale ne postačující. Objem plynu můžeme zmenšit též adiabaticky, tj. bez výměny tepla, odstraníme-li ohřívač a dno válce nahradíme tepelně nevodivou podložkou. Adiabatický děj může být vratný nebo nevratný, záleží na rychlosti komprese nebo expanze. Práce při stlačení plynu (tj. práce, kterou na

5.4. MOLOVÁ TEPELNÁ KAPACITA PLYNŮ PŘI KONSTANTNÍM TLAKU

systému (na plynu) vykoná okolí) bude mít různé hodnoty pro různé průběhy stlačení. Tato práce je dána vztahem

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV > 0,$$

tj. plochou pod křivkou v p - V diagramu. Odpovídá tedy pouze vratným změnám, při nichž je tlak definovatelnou veličinou (závislou na V).

Všechny skutečné děje probíhají konečnou rychlostí a jsou tedy nevratné. Vratné změny jsou takové, u kterých je možné pomalými změnami vnějších podmínek vrátit se po stejné cestě do původního stavu nejen soustavu, ale i okolí soustavy (např. tepelné lázně).

5.4 Molová tepelná kapacita plynů při konstantním tlaku

TepKapacita}



U reálných plynů závisí jejich vnitřní energie na teplotě a objemu. U ideálního plynu závisí vnitřní energie jen na teplotě (viz odst. 4.5) a pro jeden kilomol plynu je $U = c_V T$, takže $dU = c_V dT$, kde c_V je molová tepelná kapacita za konstantního objemu.

Jestliže ohřev plynu probíhá za konstantního tlaku, pak plyn se bude rozpínat a na okolí vykoná kladnou práci $\delta W' > 0$. Ke zvýšení teploty plynu o jeden kelvin bude proto zapotřebí více tepla, než při ohřevu za konstantního objemu. Část tepla se totiž spotřebuje na práci vykonanou plynem. Molová tepelná kapacita za konstantního tlaku tedy musí být větší, než molová tepelná kapacita za konstantního objemu, tj. $c_p > c_V$.

Napišeme první termodynamickou větu $\delta Q = dU + \delta W'$ pro jeden mol plynu ve tvaru

$$\delta Q = c_V dT + p dV.$$

Obsahuje-li systém plyn o celkové hmotnosti M , tj. látkové množství

$$n_m = \frac{M}{M_m}$$

molů (kde M_m je molová hmotnost), má první termodynamická věta tvar

$$\delta Q = \frac{M}{M_m} c_V dT + p dV = n_m c_V dT + p dV.$$

Podělíme-li tuto rovnici $n_m dT$, dostaneme vztah pro molovou tepelnou kapacitu plynu za konstantního tlaku

$$\{3.2-8\} \quad c_p = \frac{\delta Q}{n_m dT} = \frac{1}{n_m dT} (n_m c_V dT + p dV). \quad (5.11)$$

Použijeme-li stavovou rovnici pro stejné množství ideálního plynu $pV = n_m RT$ a zdiferencujeme-li ji pro konstantní tlak, pak dostaneme

$$\{\text{Nova}3.2-8\} \quad p dV = n_m R dT. \quad (5.12)$$

Spojení rovnic 5.11 a 5.12 dává

$$\{3.2-9\} \quad c_p = c_V + R. \quad \text{Mayerův vztah} \quad (5.13)$$

\{ram-116\}

Rovnice se nazývá Mayerův vztah a ukazuje, že molová tepelná kapacita za konstantního tlaku je vždy větší, než molová tepelná kapacita za konstantního objemu o hodnotu rovnou univerzální plynové konstantě R . Mayerův vztah platí přesně jen pro ideální plyn, ale je v dobré shodě pro reálné plyny o nízkých tlacích. Těchto výsledků jsme dosáhli bez užití vztahu¹ $U = \frac{3}{2} n_m RT$, ale

¹Platný striktně vzato jen pro ideální jednoatomové plyny - viz vztah 4.34.

5.5. STAVOVÉ ZMĚNY IDEÁLNÍHO PLYNU

jen ze znalosti, že vnitřní energie ideálního plynu závisí jen na teplotě.

Poměr molových tepelných kapacit při stálém tlaku a stálém objemu se nazývá Poissonova konstanta κ

onKonstanta}
{ram-117}

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V}. \quad \text{Poissonova konstanta} \quad (5.14)$$

Pro ideální plyn je

$$\kappa = \frac{c_V + R}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V}.$$

Protože platí $c_V = \frac{i}{2}R$, kde i je počet stupňů volnosti, pak Poissonovu konstantu pro i počet stupňů volnosti můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\kappa = \frac{i+2}{i}.$$

Pro jednoatomový plyn je $\kappa = 1,67$ ($i = 3$), pro dvouatomový plyn je $\kappa = 1,40$ ($i = 5$), pro víceatomový plyn je $\kappa = 1,33$ ($i = 6$).

5.5 Stavové změny ideálního plynu

{StavZmeny}

Tato část je důležitá k pochopení termodynamických procesů. Jsou v ní vyloženy základní stavové změny: změna izochorická (odst. 5.5.1), změna izobarická (odst. 5.5.2) a změna izotermická (odst. 5.5.3). V odst. 5.5.4 je vyložena adiabatická a v odst. 5.5.5 změna polytropická.

Cíl: I) Zapaměti vztahy a zákony stavových veličin.

II) Definovat a vyložit pojmy, veličiny a zákony uvedené v části „Obsah“.

III) Samostatně řešit příklady, řešení zdůvodnit a nakreslit náčrtky.

V termodynamice mají základní význam některé jednoduché děje, které probíhají v ideálním plynu za určitých podmínek, kdy některá ze stavových veličin zůstává konstantní.

Všeobecně můžeme říci, že práce vykonaná systémem závisí na způsobu přechodu z jednoho stavu do druhého. Stav systému je jednoznačně určený souborem nezávislých vnějších parametrů a teplotou. Podle toho, které a v jakém vzájemném vztahu se mění tyto veličiny, dostáváme různé stavové změny. Budeme je posuzovat z hlediska práce, kterou systém vykoná po dobu příslušné stavové změny. Z tohoto důvodu je výhodné zobrazovat procesy v p - V diagramu, ve kterém má vykonaná práce názornou geometrickou interpretaci.

5.5.1 Změna za stálého objemu – izochorická, $V = \text{konst.}$

alehoObjemu}

V počátečním stavu 1 má plyn tlak p_1 a objem V_1 . Teplotu T_1 určíme ze stavové rovnice $p_1 V_1 = n_m R T_1$. V konečném stavu 2 má plyn tlak p_2 , objem $V_2 = V_1$ a teplotu T_2 určíme rovněž se stavové rovnice $p_2 V_1 = n_m R T_2$. Z obou rovnic dostaneme

{3.2-10}
{ram-118}

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{Gay-Lussacův zákon} \quad (5.15)$$

tj. vyjádření, že tlak ideálního plynu ze stálého objemu je úměrný absolutní teplotě² (Gay – Lussacův zákon).

²Protože $p = (n_m R/V)T = \text{konst.}$ T při $V = \text{konst.}$

5.5. STAVOVÉ ZMĚNY IDEÁLNÍHO PLYNU

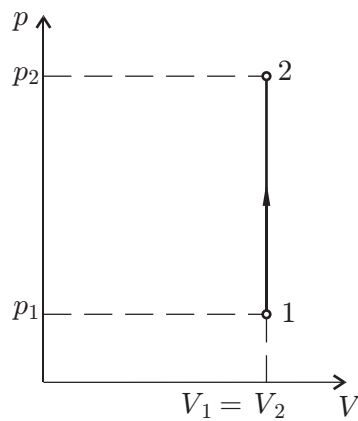
V pracovním diagramu je izochorická změna znázorněna úsečkou $V = \text{konst.}$, která se nazývá izochora (obr. 5.6).

Při izochorické změně objem plynu zůstává stálý, tj. $V = \text{konst.}$, $dV = 0$, plyn tedy nekoná práci ($\delta W' = p dV = 0$) a podle první věty termodynamické (viz rovnice 5.10) se dodané teplo rovná přírůstku vnitřní energie

$$Q_{12} = n_m \int_1^2 dU = n_m(U_2 - U_1) = n_m \int_{T_1}^{T_2} c_V dT = n_m c_V (T_2 - T_1).$$

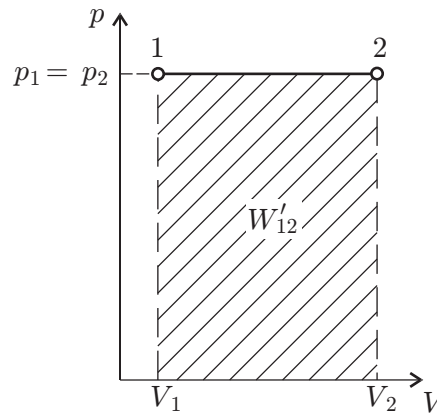
Molová tepelná kapacita podle definice (viz rovnice 4.31) je

$$c_V = \frac{\delta Q}{n_m dT} = \frac{dU}{n_m dT}.$$



Obr. 5.6

{obr3.2-6}



Obr. 5.7

{obr3.2-7}

5.5.2 Změna za stálého tlaku – izobarická, $p = \text{konst.}$

V počátečním stavu 1 má plyn tlak p_1 a objem V_1 . V konečném stavu 2 bude tlak $p_2 = p_1$ a objem V_2 . Příslušné teploty určíme ze stavové rovnice $p_1 V_1 = n_m R T_1$ a $p_1 V_2 = n_m R T_2$. Podělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad (5.16)$$

{3.2-11}



5.5. STAVOVÉ ZMĚNY IDEÁLNÍHO PLYNU

tj. vyjádření, že objem ideálního plynu za konstantního tlaku je úměrný absolutní teplotě³ (Gay – Lussacův zákon).

V pracovním diagramu je izobarická změna znázorněna úsečkou 1–2, rovnoběžnou s osou V a nazývá se izobara (obr. 5.7).

Podle první termodynamické věty se dodaným teplem plynu zvýší jeho vnitřní energie a současně plyn vykoná práci zvětšením objemu.

Práce W'_{12} plynem vykonaná při přechodu ze stavu 1 do stavu 2 je rovna (při platnosti $p_1 = p_2 = \text{konst.}$)

$$W'_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1(V_2 - V_1).$$

Přijatým teplem se plyn ohřeje a zvětší objem, tj. zvýší se jeho vnitřní energie a vykoná práci. Tato práce je v pracovním diagramu obr. 5.7 znázorněna plochou obdélníka pod izobarou 1–2.

Práci W'_{12} můžeme vyjádřit užitím stavové rovnice $pV = n_m RT$

$$W'_{12} = p_1(V_2 - V_1) = n_m R(T_2 - T_1)$$

a celkové dodané teplo Q_{12} ze vztahu

$$\delta Q = n_m c_V dT + p dV \rightarrow Q_{12} = n_m c_V \int_{T_1}^{T_2} dT + p_1 \int_{V_1}^{V_2} dV .$$

ve kterém jsme využili toho, že tlak plynu je konstantní, nezávisí tudíž na V a lze jej jako konstantu vytknout před integrál. Získáme tak vztah pro dodané teplo

$$\begin{aligned} Q_{12} &= n_m c_V(T_2 - T_1) + p_1(V_2 - V_1) = n_m c_V(T_2 - T_1) + n_m R(T_2 - T_1) = \\ &= n_m(c_V + R)(T_2 - T_1) = n_m c_p(T_2 - T_1), \end{aligned}$$

kde $c_p = c_V + R$ je molová tepelná kapacita za konstantního tlaku a n_m je látkové množství plynu (pokud není řečeno jinak, pracujeme obvykle s jedním kilomolem plynu, tj. $n_m = 1$).

5.5.3 Změna za stálé teploty – izotermická, $T = \text{konst.}$

Teplota počátečního stavu T_1 zůstává stejná a tedy i teploty konečného stavu $T_2 = T_1$, ($dT = 0$). Stav plynu popisujeme objemem a tlakem

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = n_m R T_1 = n_m R T_2 = \text{konst.} \quad \text{Boyleův–Mariottův zákon} \quad (5.17)$$

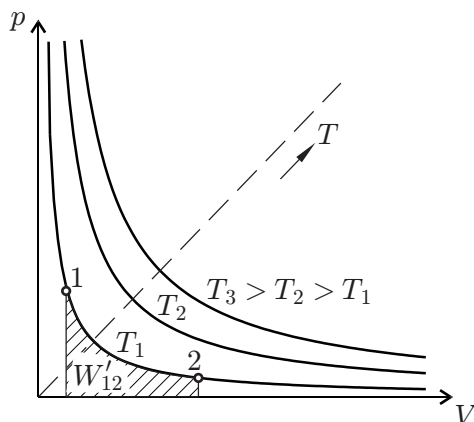
Součin objemu a tlaku je konstantní (Boyleův–Mariottův zákon).

Izotermická změna je v pracovním diagramu (obr. 5.8) znázorněna čarou zvanou izoterma. Představuje ji část větve rovnoosé hyperboly, jejíž asymptoty jsou souřadnicové osy. Izotermy pro různé teploty mění tvar i polohu.

Z první termodynamické věty (viz rovnice 5.10 za současné platnosti $dU = 0$) plyne, že vnitřní energie ideálního plynu při izotermické expanzi se spotřebuje na práci, kterou plyn vykoná proti vnějším silám, tj.

$$\delta Q = p dV = \delta W' \quad (dU = 0).$$

³Protože $V = (n_m R/p)T = \text{konst.}$ T při $p = \text{konst.}$



{obr3.2-8}

Obr. 5.8

Práce W'_{12} vykonaná plynem při změně z počátečního stavu 1 (o tlaku p_1 , objemu V_1) do konečného stavu 2 (p_2 , V_2) je rovna dodanému teplu Q_{12} (p vyjádříme ze stavové rovnice ve tvaru $p = \frac{n_m RT}{V}$)

$$\{3.2-13\} \quad Q_{12} = W'_{12} = \int_1^2 p dV = n_m RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = n_m RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (5.18)$$

Tato práce je znázorněna v p - V diagramu na obr. 5.8 plochou pod izotermou ze stavu 1 do 2. Při izotermické expanzi ($V_2 > V_1$) dodáváme teplo a plyn koná kladnou práci. Při izotermické kompresi ($V_1 > V_2$) se teplo plynu odnímá, ale teplota se nemění a kompresní práce okolí je stejná, jaká byla v předchozím případě práce vykonaná plynem při jeho rozpínání, tj. W'_{12} .

Molovou tepelnou kapacitu při izotermické změně dostaneme formálně dle definice

$$\{\text{Nova3.2-13}\} \quad c_T = \frac{\delta Q}{n_m dT} \rightarrow \infty. \quad (5.19)$$

Nekonečně veliká molová tepelná kapacita znamená, že přiváděné teplo nezpůsobí růst teploty, ale plyn koná ekvivalentní práci. Při expanzi $\delta Q > 0$ a $c_T \rightarrow +\infty$, při kompresi $\delta Q < 0$ a $c_T \rightarrow -\infty$.

5.5.4 Změna adiabatická

Adiabaticka}

Adiabatická změna probíhá v soustavě za dokonalé tepelné izolace od okolí. Podmínkou této změny je $\delta Q = 0$. Mechanicky však soustava izolovaná není. Adiabatická změna je charakterizována změnou tlaku, objemu i teploty.

Z první termodynamické věty (rovnice 5.10) dostaneme pro n_m kilomolů ideálního plynu

$$\{3.2-1313\} \quad n_m c_V dT + p dV = 0. \quad (5.20)$$

Abychom tento děj graficky znázornili v pracovním diagramu, musíme změnu teploty vyjádřit pomocí změn tlaku a objemu. Použijeme-li stavové rovnice v diferenciálním tvaru

$$\{\text{ova3.2-1313}\} \quad p dV + V dp = n_m R dT, \quad (5.21)$$

pak vyloučením dT z 5.20 a 5.21 a použitím Mayerova vztahu $c_p = c_V + R$ dostaneme

$$\{3.2-131313\} \quad c_p \frac{dV}{V} + c_V \frac{dp}{p} = 0 \quad (5.22)$$

5.5. STAVOVÉ ZMĚNY IDEÁLNÍHO PLYNU

Po zavedení Poissonovy konstanty

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

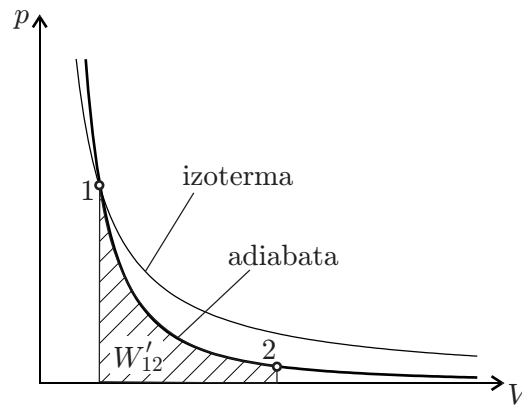
a po provedení separace proměnných nabude rovnice 5.22 tvar

$$\kappa \frac{dV}{V} = \frac{dp}{p} \quad (5.23)$$

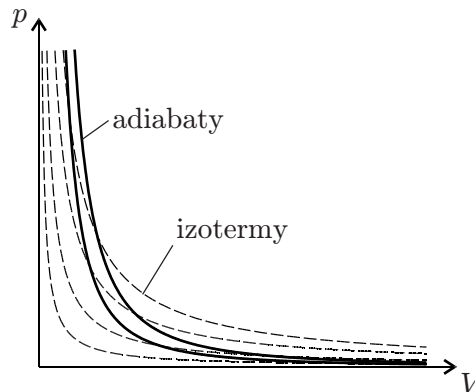
a integrací pak

$$pV^\kappa = \text{konst.} \quad \text{Poissonova rovnice} \quad (5.24)$$

Tato rovnice popisuje v pracovním diagramu stavy, kterými plyn při adiabatické změně prochází, a nazýváme ji Poissonovou rovnicí. Křivka v pracovním diagramu se nazývá adiabata (obr. 5.9). Adiabata je všude strmější než izoterma, neboť $\kappa > 1$.



Obr. 5.9



Obr. 5.10

Adiabaty se kvalitativně podobají izotermám (obr. 5.10), ale mezi stavovými změnami je zásadní rozdíl. Při adiabatické změně je dokonalá tepelná izolace systému, při izotermické změně je dokonalý přenos tepla. Při adiabatické změně plyn koná práci na úkor vnitřní energie, při izotermické změně zůstává vnitřní energie konstantní.

Práci n_m kilomolů plynu při adiabatické expanzi⁴ dostaneme z rovnice

$$\delta W' = p dV = -n_m c_v dT$$

⁴Platí $\delta Q = n_m c_v dT + p dV$; $\delta Q = 0 \rightarrow p dV = -n_m c_v dT$.

5.5. STAVOVÉ ZMĚNY IDEÁLNÍHO PLYNU

integrací

$$\{3.2-15\} \quad W'_{12} = \int_1^2 p dV = -n_m c_V \int_{T_1}^{T_2} dT = n_m c_V (T_1 - T_2), \quad (5.25)$$

nebo dosadíme-li za p z Poissonovy rovnice⁵ (5.24), tj. $p = \text{konst.}/V^\kappa$:

$$\begin{aligned} W'_{12} &= \text{konst.} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\kappa} = \text{konst.} \int_{V_1}^{V_2} V^{-\kappa} dV = \frac{1}{-\kappa + 1} \text{konst.} (V_2^{-\kappa+1} - V_1^{-\kappa+1}) = \\ &= \frac{1}{\kappa - 1} \left(\text{konst.} \frac{V_1}{V_1^\kappa} - \text{konst.} \frac{V_2}{V_2^\kappa} \right) = \frac{1}{\kappa - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{n_m}{\kappa - 1} R (T_1 - T_2). \end{aligned}$$

Tento výsledek je shodný s (5.25), uvědomíme-li si, čemu se rovná výraz $R/(\kappa - 1)$. Práce plynu je znázorněna v diagramu na obr. 5.9 plochou pod adiabatou ze stavu 1 do stavu 2.

5.5.5 Změna polytropická

polytropická}

Izotermická, ani adiabatická změna není přesně realizovatelná. Skutečně expanzní a kompresní děje můžeme zobrazit v p - V diagramu čarami typu $pV^n = \text{konst.}$, které se nazývají polytropy.

Polytropická změna je děj, při kterém měrná tepelná kapacita systému zůstává konstantní

$$c = \text{konst.} \left(= \frac{\delta Q}{n_m \Delta T} \right).$$

Měrná tepelná kapacita v tomto případě představuje množství tepla potřebné ke zvýšení teploty o 1 K látkového množství 1 kilomolu při dané polytropické změně. Odvodíme rovnici polytropy pro ideální plyn z první termodynamické věty pro jeden kmol plynu ve tvaru

$$\{3.2-16\} \quad \delta Q = dU + p dV \rightarrow c dT = c_V dT + p dV. \quad (5.26)$$

V získané rovnici vystupují všechny tři parametry: p , V a T . Jeden z nich můžeme vyloučit použitím stavové rovnice. Abychom dostali rovnici polytropy hned v proměnných p a V , vyloučíme T . Zdiferencujeme stavovou rovnici pro jeden kilomol $pV = RT$:

$$\{3.2-17\} \quad p dV + V dp = R dT. \quad (5.27)$$

Z rovnic (5.26) a (5.27) vyloučíme dT a uspořádáme stejné členy, dostaneme

$$(c - c_V - R)p dV + (c - c_V)V dp = 0.$$

Využitím Mayerova vztahu (5.13) a podělením rovnice pV , dostaneme diferenciální rovnici

$$\{3.2-18\} \quad (c - c_p) \frac{dV}{V} + (c - c_V) \frac{dp}{p} = 0, \quad (5.28)$$

jejíž řešení je

$$\{3.2-Nova18\} \quad (c - c_p) \ln V + (c - c_V) \ln p = \text{Konst.} \quad (5.29)$$

Tuto rovnici podělíme $(c - c_V)$ (to je možné, jestliže platí $c \neq c_V$),

$$\frac{(c - c_p)}{(c - c_V)} \ln V + \ln p = \ln(\text{konst.}),$$

⁵($pV^\kappa = \text{konst.}$)

5.5. STAVOVÉ ZMĚNY IDEÁLNÍHO PLYNU

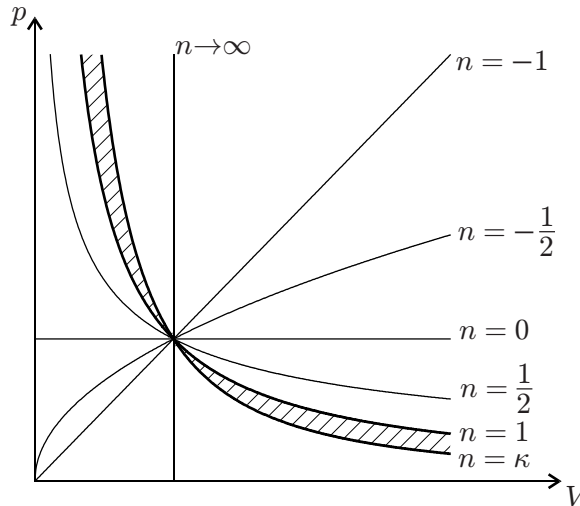
pak rovnici odlogaritmuje a dostaneme

$$\{3.2-19\} \quad pV^n = \text{konst.}, \quad \text{rovnice polytropy} \quad (5.30)$$

kde

$$\{\text{ExpPolytr}\} \quad n = \frac{c - c_p}{c - c_V} \quad \text{exponent polytropy} \quad (5.31)$$

je exponent polytropy. K určení charakteru polytropické změny pro $c = c_V$ vyjdeme z rovnice (5.29). Tato rovnice nabude tvar $(c - c_p) \ln V = \text{Konst}$, odkud je vidět, že V je v průběhu procesu konstantní. Při $c = c_V$ se tedy jedná o izochorický děj. Pro reálné plyny polytropický exponent n má hodnotu $1 < n < \kappa$. Pro $n = 1$ je polytropa izotermou a pro $n = \kappa$ je adiabatou (obr. 5.11).



{obr3.2-11}

Obr. 5.11

Všechny vratné změny můžeme považovat za zvláštní případy polytropické změny. Je-li $n = 0$, pak $pV^0 = \text{konst.}$, čili $p = \text{konst.}$ a dostáváme izobaru.

Pro $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} pV^n = \text{konst.}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p^{1/n} V^{n/n} = \text{konst.}^{1/n} = K, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p^{1/n} V = 1, \quad \text{takže } V = K$$

a představuje změnu izochorickou.

Pro výpočet práce pro polytropickou změnu ze stavu 1 do stavu 2 napíšeme rovnici polytropy ve tvaru

$$pV^n = p_1 V_1^n = p_2 V_2^n,$$

kde p_1 , V_1 a p_2 , V_2 jsou hodnoty tlaku a objemu v počátečním a koncovém stavu. Vyjádříme tlak p pomocí objemu V v počátečním stavu

$$p = p_1 V_1^n V^{-n}.$$

Dosadíme-li za tlak do rovnice pro práci vykonanou plynem při přechodu ze stavu 1 do stavu 2, dostaneme

$$\{3.2-20\} \quad W'_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n}. \quad (5.32)$$

5.5. STAVOVÉ ZMĚNY IDEÁLNÍHO PLYNU

Pro $n \neq 1$ je integrál roven

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{V_1^{n-1}} - \frac{1}{V_2^{n-1}} \right),$$

po dosazení do rovnice (5.32) vyjde

$$\{3.2-21\} \quad W_{12} = \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (5.33)$$

Použijeme-li stavové rovnice (viz (4.4)) pro $n_m = M/M_m$ kilomolů, lze počáteční stav plynu vyjádřit

$$p_1 V_1 = \frac{M}{M_m} R T_1,$$

a rovnice pro práci nabude tvaru

$$\{3.2-22\} \quad W_{12} = \frac{M}{M_m} \frac{R T_1}{(n-1)} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right]. \quad (5.34)$$

Výrazy (5.33) a (5.34) popisují práci vykonanou ideálním plynem při libovolném polytropickém procesu, vyjma izotermického procesu, poněvadž jsme z našeho řešení vyloučili možnost $n = 1$.

{pr3.2-2} **KP 5.5-1** _____

Jak se změní vnitřní energie 0,003 kmol kyslíku O_2 při ohřátí z $10^\circ C$ na $60^\circ C$, probíhá-li proces

- při konstantním objemu,
- při konstantním tlaku,
- ohřeje-li se plyn následkem adiabatického stlačení?

Vypočítejte, kolik tepla je zapotřebí k tomuto ohřátí při uvedených dějích.

Řešení:

Předpokládejme, že se kyslík chová jako ideální plyn. Pak změna jeho vnitřní energie je úměrná změně teploty a nezávislá na ostatních veličinách. Tedy při všech uvedených dějích je

$$\Delta U = n_m c_V \Delta T = n_m \frac{5}{2} R \Delta T = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kmol} \frac{5}{2} 8314 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 50 \text{ K} = 3,12 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

- Při ději za konstantního objemu plyn práci nekoná ($W'_{12} = 0$) a podle první termodynamické věty $\Delta U = \Delta Q$, tj. změna vnitřní energie je přímo rovna dodanému teplu.
- Při ději za konstantního tlaku jen část dodaného tepla zvýší vnitřní energii, zbytek se přemění v práci, kterou plyn současně koná

$$Q_{12} = \Delta U + W'_{12}.$$

Je tedy zapotřebí více tepla ($c_p = c_V + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R$)

$$Q_{12} = n_m c_p \Delta T = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kmol} \frac{7}{2} 8314 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1} 50 \text{ K} = 4,37 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

- Při adiabatickém ději je teplo Q plynu dodané $Q = 0$ a změna vnitřní energie je tak rovna práci vnějších sil $\Delta U = -pdV = -W'_{12} = W_{12}$.

5.6 Tepelné stroje a Carnotův kruhový děj

strojeCarnot}

Tato část je pro termodynamiku důležitá. Jsou v ní vyloženy základní pojmy a veličiny: kruhový děj (odst. 5.6.1), Carnotův kruhový děj (odst. 5.6.2) a tepelné stroje (odst. 5.6.3). V odst. 5.6.4 je zavedena a vyšetřena absolutní termodynamická stupnice teploty. Účinnostmi nevratných dějů se zabývá odst. 5.6.5, kde je vyslovena i Carnotova věta.

Cíl: I) Definovat a vyložit pojmy, veličiny a zákonitosti uvedené v rámečcích.

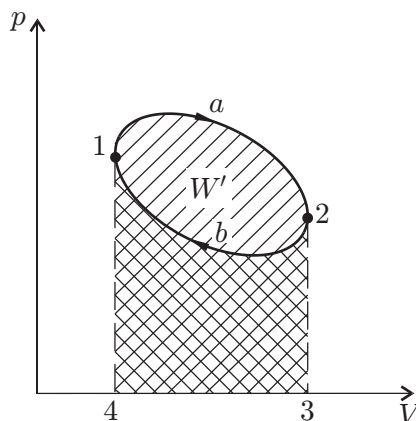
II) Samostatně řešit příklady uvedené v tomto textu a podobného typu, řešení zdůvodnit a nakreslit náčrtky.

5.6.1 Kruhové děje

KruhoveDeje}

Z předchozích úvah plyne, že v kruhových dějích nelze všechno přijaté teplo zcela přeměnit na práci. K přeměně tepla v práci je třeba převést pracovní plyn po skončené expanzi opět do počátečního stavu, aby plyn mohl opět expandovat.

Nechť soustava přechází expanzí z rovnovážného stavu 1 do stavu 2 (obr. 5.12) a pak kompresí ze stavu 2 do původního stavu 1. Předpokládejme, že zvětšení objemu se děje podél křivky 1–*a*–2. Stlačování může probíhat podél téže křivky v opačném směru 2–*a*–1 za stejných teplot a tato práce, kterou nyní plyn při expanzi vykoná, se rovná práci, kterou vykonaly vnější síly při kompresi. Komprese však může probíhat jinak, např. podél křivky 2–*b*–1. Soustava pak prochází jinými teplotami než při expanzi.



Obr. 5.12

{obr3.2-12}

Každý děj zobrazený v pracovním diagramu uzavřenou křivkou se nazývá kruhový děj nebo cyklus. Práce vykonaná systémem při přechodu ze stavu 1 do stavu 2 je vyznačena plochou obrazce 1–*a*–2–3–4–1. Tato práce $W'_1 > 0$. Práce při stlačování, tj. při přechodu systému ze stavu 2 po křivce *b* do stavu 1, je znázorněna plochou obrazce 1–*b*–2–3–4–1, tato práce $W'_2 < 0$. Úhrnná práce $W' > 0$ vykonaná systémem je vyjádřena plochou uvnitř křivky.

Vnitřní energie U systému je stavovou funkcí a její změna je určena jen počátečním a konečným stavem. Po průchodu cyklem je systém v původním stavu, změna vnitřní energie je proto rovna nule. Z první termodynamické věty $dU = \delta Q + \delta W$ (viz např. (5.10)) plyne

$$0 = \oint \delta Q + \oint \delta W \rightarrow \oint \delta Q = - \oint \delta W .$$

Integrál $\oint \delta Q$ určuje celkové teplo dodané systému a $\oint \delta W = W (= -W')$ celkovou práci vnějších sil, tedy $Q = -W (= W')$. Podle obr. 5.12 je teplo přijaté při rozpínání plynu $Q_1 > 0$

5.6. TEPELNÉ STROJE A CARNOTŮV KRUHOVÝ DĚJ

a práce vykonaná plynem $W'_1 > 0$, při kompresi pak teplo přijaté $Q_2 < 0$ a vykonaná práce $W'_2 < 0$. Tedy $Q_1 + Q_2 = W'_1 + W'_2$. Celková práce vykonaná plynem $W' = W'_1 + W'_2$ je však kladná. Soustava, která přijala teplo $Q_1 > 0$ a odevzdala teplo $Q'_2 > 0$, pak vykoná práci $W' = Q_1 - Q'_2$. Soustavu, která provádí takovýto cyklus, nazýváme tepelný stroj.

Při konání práce na účet dodaného tepla soustavě je splněn zákon zachování energie. Pro praxi má význam ta část přijatého tepla Q_1 , která se přeměňuje v práci W' . Zavádí se pojem účinnosti⁶ cyklu

{3.2-23}

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1}. \quad \text{účinnost cyklu} \quad (5.35)$$

{ram-121}

Obrácený cyklus probíhá při expanzi podél křivky 1–b–2 a přitom koná práci $W'_2 > 0$ a přijímá teplo $Q_2 > 0$, při stlačování probíhá po dráze 2–a–1, přičemž odevzdá teplo $Q'_1 > 0$ a vnější síly vykonají práci $W_1 > 0$ ($W'_1 < 0$). Úhrnná práce vykonaná plynem, tj. $W' = W'_2 + W'_1$, je záporná, práce vnějších sil $W = -W'$ je kladná. Odevzdané teplo systémem $Q'_1 (> 0)$ je větší, než teplo přijaté $Q_2 (> 0)$, a proto pro ně platí

{Nova5.24}

$$Q'_1 = Q_2 + W. \quad (5.36)$$

Stroj, který pracuje podle tohoto cyklu, je chladicí stroj. Expanze probíhá při nižších teplotách než komprese, stroj přijímá teplo při nižších teplotách a odevzdává je při teplotách vyšších.

5.6.2 Carnotův kruhový děj

otuvKruhovy}



V termodynamice má základní teoretický význam kruhový děj skládající se z izotermické a adiabatické expanze soustavy, po nichž následuje izotermická a adiabatická komprese do výchozího stavu. Tento cyklus se nazývá Carnotův kruhový děj (obr. 5.13). Při izotermických dějích je pracovní látka v tepelném styku se zdrojem nebo jímáčem tepla. Při adiabatických změnách je tepelně dokonale izolována.

Předpokládejme, že pracovní látkou je jeden kilomol ideálního plynu. Z počátečního stavu 1 charakterizovaného tlakem p_1 , objemem V_1 a teplotou T_1 , přejde plyn izotermickou změnou do stavu 2 (p_2, V_2, T_1), přičemž získá⁷ od tepelného zdroje (okolí) teplo $Q_1 > 0$ a vykoná práci $W'_1 > 0$ danou vztahem⁸

{Nova5.25}

$$0 < W'_1 = Q_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (5.37)$$

Přechod ze stavu 2 (p_2, V_2, T_1) do stavu 3 (p_3, V_3, T_2) probíhá adiabatickou expanzí, při níž teplota klesne z T_1 na T_2 a práci plynu (kladnou) určíme (viz např. (5.25)) ze vztahu

{Nova5.26}

$$0 < W'_2 = c_V(T_1 - T_2). \quad (5.38)$$

Ze stavu 3 (p_3, V_3, T_2) do stavu 4 (p_4, V_4, T_2) přechází plyn izotermickou kompresí a odevzdává teplo $Q'_2 > 0$. K uskutečnění komprese vykoná okolí kladnou práci

{Nova5.27}

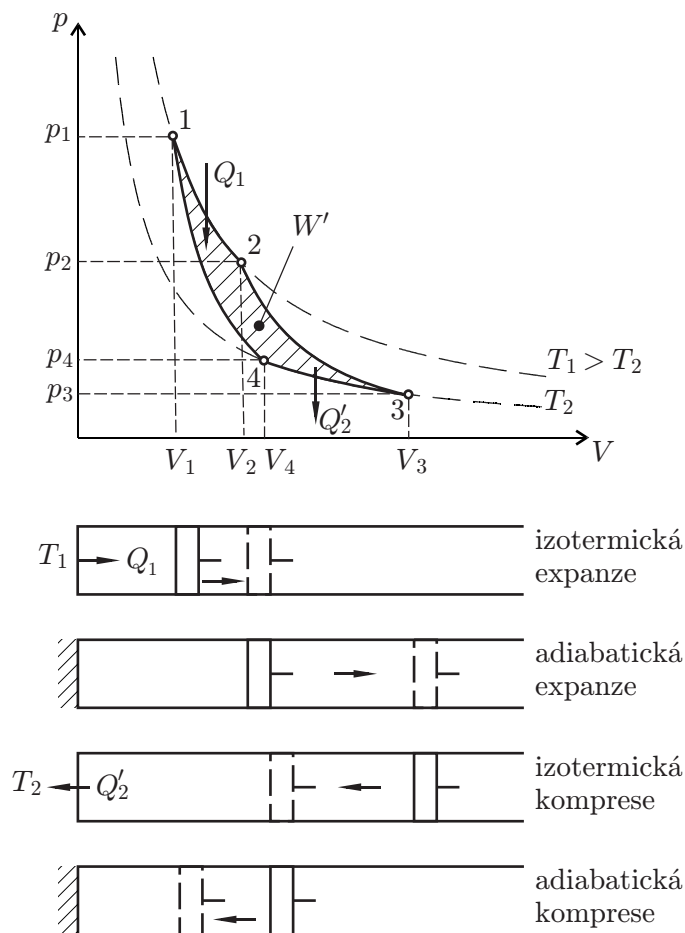
$$0 < W_3 = Q'_2 = -RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} (= -W'_3). \quad (5.39)$$

⁶Obsahuje v podílu to, co chceme získat (v tomto případě práci), s tím, čím musíme „zaplatit“, tj. s dodaným teplem.

⁷Tedy okolí plynu dodá teplo $Q_1 > 0$.

⁸Ze vztahu (5.18) $\delta Q = c_V dT + p dV$ totiž pro $dT = 0$ (pro izotermický děj, tedy $T = \text{konst.}$) plyne např. rovnice (5.18).

5.6. TEPELNÉ STROJE A CARNOTŮV KRUHOVÝ DĚJ



{obr3.2-13}

Obr. 5.13

Do původního stavu 1 (p_1, V_1, T_1) se plyn dostane adiabatickou kompresí, teplota se zvýší z T_2 na T_1 , přitom plyn vykoná zápornou práci

$$\{Nova5.28\} \quad 0 > W'_4 = c_V(T_2 - T_1). \quad (5.40)$$

Aby se plyn při adiabatické kompresi vrátil do původního stavu 1, musí být splněna podmínka

$$\{Nova5.29\} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}, \quad (5.41)$$

která plyne z podmínky, že stavy 1 a 4 leží na stejné adiabatě, $p_1 V_1^\kappa = p_4 V_4^\kappa$ a stavy 2 a 3 rovněž na adiabatě $p_2 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa$. Dosadíme-li do uvedených vztahů ze stavové rovnice pro jeden kilomol plynu $p_1 V_1 = RT_1$, $p_2 V_2 = RT_1$, $p_3 V_3 = RT_2$, $p_4 V_4 = RT_2$ a rovnice upravíme, pak dostaneme

$$\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\kappa-1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{a} \quad \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\kappa-1} = \frac{T_2}{T_1},$$

z čehož ihned plyne žádaná podmínka.

Práce, kterou vykonal plyn při jednom cyklu, je

$$\{Nova5.30\} \quad W' = W'_1 + W'_2 + W'_3 + W'_4 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + c_V(T_1 - T_2) + RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} + c_V(T_2 - T_1) = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}, \quad (5.42)$$

5.6. TEPELNÉ STROJE A CARNOTŮV KRUHOVÝ DĚJ

neboť práce W'_2 a W'_4 se při adiabatických změnách kompenzují.

Z platnosti vztahu (5.41) pak plyne, že celková práce vykonaná plynem bude

$$\{Nova5.31\} \quad W' = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln \frac{V_2}{V_1} (T_1 - T_2) > 0. \quad (5.43)$$

5.6.3 Tepelné stroje

Pro účinnost tepelného Carnotova cyklu plyne z (5.35)

$$\{3.2-24\} \quad \eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1}. \quad \text{účinnost tepelného Carnotova cyklu} \quad (5.44)$$

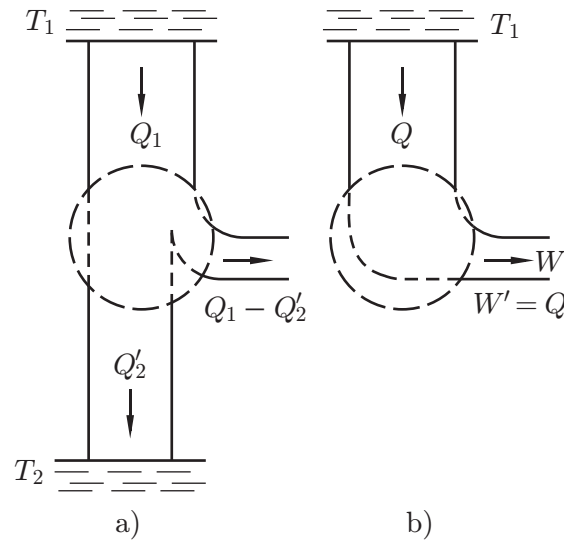
{ram-122}

Účinnost η Carnotova kruhového děje závisí tedy jen na teplotě zdroje tepla T_1 a na teplotě jímáče T_2 . Čím větší je rozdíl mezi T_1 a T_2 , tím je η větší – tím větší část tepla přijímaného ze zdroje se přemění na práci a tím méně tepla odevzdá jímáči tepla. Účinnost tepelného stroje by se rovnala jedné, jen kdyby $T_2 = 0$, tj. teplota jímáče by se rovnala absolutní nule.

Protože Carnotův cyklus je děj vratný, lze jej vykonat i v obráceném směru. Stroj provádějící obrácený Carnotův cyklus je ideální chladicí stroj, při kterém plyn odebere chladnějšimu tělesu teplo $Q_2 (> 0)$ (to „chceme“) a odevzdá teplejšimu tělesu teplo $Q'_1 (> 0)$ a vnější síly konají práci $W (> 0)$ (tím „platíme“). Chladicí stroj tedy pracuje s účinností

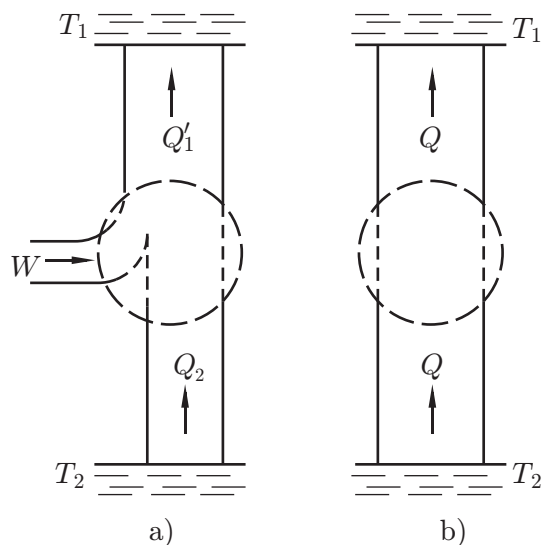
$$\{3.2-25\} \quad \varepsilon = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q'_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad \text{účinnost chladicího stroje} \quad (5.45)$$

která udává množství tepla cyklem odejmuté ochlazovanému tělesu při dodání jednotkové mechanické práce. Schématicky je funkce tepelného a chladicího stroje konajícího vratný Carnotův děj v přímém i obráceném směru znázorněna na obr. 5.14 a obr. 5.15. Na obr. 5.14a a obr. 5.15a je znázorněn tepelný stroj a chladicí stroj.



Obr. 5.14

{obr3.2-14}



Obr. 5.15

Účinnost těchto strojů je maximální, když splňují podmínku

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q_1' T_1}{Q_2 T_2},$$

a je podle vztahu (5.44) vždy menší než jedna. Na obr. 5.14b a obr. 5.15b je znázorněn nerealizovatelný tepelný stroj a chladicí stroj mající účinnost rovnou jedné.

5.6.4 Absolutní termodynamická stupnice teploty

Termodynamická teplotní stupnice je definována na základě vztahu (5.44) pro tepelnou účinnost vratného Carnotova děje, která nezávisí na použité látce. Tato rovnice byla odvozena pro ideální plyn, ale podle Carnotovy věty je ji možno zobecnit i na Carnotův vratný děj s libovolnou pracovní látkou. Pro danou látku při Carnotově vratném ději je důležité vybrat vhodné izotermy a adiabaty tak, aby byly přesně splněny definované požadavky, tj., aby děj proběhl mezi přesně definovanými teplotami.

K definování absolutní termodynamické stupnice teploty se používá měrného systému realizovaného termostaty s tajícím ledem a vroucí vodou za normálních podmínek, jímž přísluší izotermy s teplotami 0 a 100 Celsiovy stupnice. Izoterma s teplotou T (leží v p - V diagramu mezi izotermami T_0 a T_{100}) reprezentuje termostat, jehož teplotu chceme změřit. Tento termostat je výhodné realizovat jako tající soustavu (nebo vařící se) chemicky čistou látkou jako při T_0 a T_{100} . Takové soustavy jsou vhodné protože;

1. automaticky si udržují konstantní teplotu;
2. dodané (odebrané) teplo v lázních můžeme změřit podle změny relativního obsahu fází, které jsou zde v rovnováze, přitom využít znalost měrného skupenského tepla tání (varu) látky.

Přiřadíme-li teplotě T_0 vhodnou číselnou hodnotu, např. $T_0 = 273,16$ K pro trojný bod vody, je teplota látky T , kterou chceme měřit, určena vztahem

$$T = T_0 \frac{Q}{Q_0}, \quad (5.46)$$

v němž Q je teplo, které látka pracující ve vratném Carnotově ději přijme při teplotě T , a Q'_0 je teplo, které látka odevzdá při teplotě T_0 . Tím je měření teploty převedeno na měření tepla, a to nezávisle na pracovní látce.

Poznámka: Experimentálně byla určena hodnota pro bod tání ledu 273,15 K. Tento údaj přísluší absolutní plynové stupnici. Výsledek potvrzuje, že plynová absolutní stupnice a termodynamická absolutní stupnice jsou identické. Definicí termodynamické stupnice vypracoval Kelvin (v roce 1848) a nazývá se také Kelvinova stupnice teploty. Tato stupnice nepřipouští záporné teploty.

5.6.5 Účinnost nevratných dějů

Ideální plyn konající vratný děj nahradíme libovolnou látkou a budeme hledat účinnost tohoto děje. Označme účinnost Carnotova děje s ideálním plynem η_i a jinou látkou η_r , a předpokládejme, že $\eta_r > \eta_i$. Pro přímý směr kruhového děje (pro tepelný stroj) dostaneme pro práci vykonanou systémem z rovnice pro účinnost $\eta = W'/Q_1$ vztah $W' = \eta Q_1$ a nahradíme-li Q_1 ze vztahu $W' = Q_1 - Q'_2 \rightarrow Q_1 = W' + Q'_2$, dostaneme

$$W' = \eta(W' + Q'_2) = \eta W' + \eta Q'_2 \rightarrow W' = \frac{\eta}{1 - \eta} Q'_2. \quad (5.47)$$

Pro obrácený směr (chladičí stroj) platí pro účinnost vztah (5.45)

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} = \frac{-Q'_2}{-W'} = \frac{Q'_2}{W'},$$

do kterého můžeme dosadit z rovnice (5.47) např. za W' , a dostaneme

$$\varepsilon = \frac{1}{Q_2} \frac{(1 - \eta)}{\eta} Q_2 = \frac{1 - \eta}{\eta}.$$

Tímto způsobem můžeme získat pro obrácený směr vztah pro práci W

$$W\varepsilon = Q_2 \rightarrow W = \frac{Q_2}{\varepsilon} = \frac{\eta}{1 - \eta} Q_2.$$

Kruhový děj s libovolnou látkou proběhne n -krát za sebou v přímém směru (tepelný stroj) mezi zdrojem tepla o teplotě T_1 a jímáčem teploty T_2 . Získáme tak práci

$$\{3.2-27\} \quad nW'_r = \frac{\eta_r}{1 - \eta_r} \cdot nQ'_{2,r}. \quad (5.48)$$

Carnotův děj s ideálním plynem proběhne m -krát v obráceném směru (chladičí stroj) mezi stejnými teplotami. Vnější síly vykonají práci

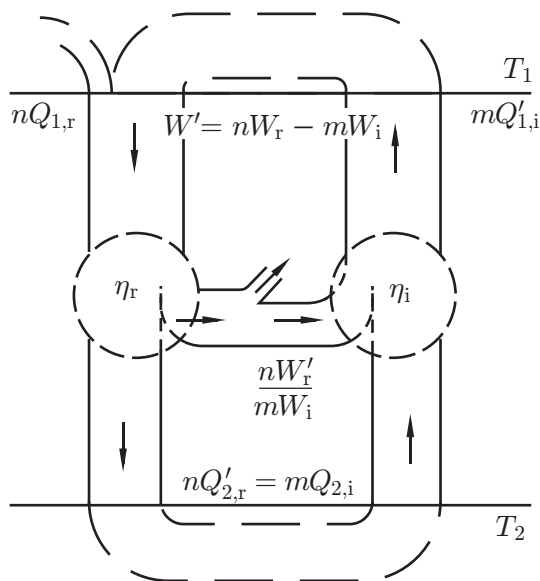
$$\{3.2-28\} \quad mW_i = \frac{\eta_i}{1 - \eta_i} \cdot mQ_{2,i}. \quad (5.49)$$

Čísla m a n volíme tak, aby $nQ'_{2,r} = mQ_{2,i}$. Za předpokladu, že $\eta_r > \eta_i$ plyne z (5.48) a (5.49)

$$\frac{nW'_r}{mW_i} = \frac{\eta_r (1 - \eta_i)}{\eta_i (1 - \eta_r)} > 1,$$

tj. proběhne-li přímý děj n -krát a obrácený m -krát, je celková vykonaná práce strojem $nW'_r - mW_i$ kladná, tj. získá se práce a přitom jímáči tepla je odvedeno právě tolik tepla, kolik od něho

5.6. TEPELNÉ STROJE A CARNOTŮV KRUHOVÝ DĚJ



Obr. 5.16

{obr3.2-16}

bylo přijato (obr. 5.16). Oba stroje jako celek tvoří perpetuum mobile druhého druhu – získáváme práci z tepla přijatého z tepelného zdroje, jímači se však žádné teplo nepředává. Jak uvidíme v dalších kapitolách, podle druhé termodynamické věty perpetuum mobile druhého druhu není možné. Tedy předpoklad $\eta_r > \eta_i$ je chybný.

Předpoklad $\eta_r < \eta_i$ také není možný. Oba děje necháme proběhnout v opačném směru a opět dostaneme perpetuum mobile druhého druhu.

Zbývá závěr, že $\eta_r = \eta_i$, tzn., že účinnost Carnotova děje pro jakoukoliv látku je stejná.

Dokažme nyní, že účinnost libovolného nevratného tepelného stroje je vždy menší než účinnost vratného stroje. Jeden tepelný stroj pracuje nevratně, druhý vratně. Je-li účinnost nevratného stroje η_n větší než účinnost vratného stroje η_v ($\eta_n > \eta_v$), bylo by možné získanou prací nevratného stroje pohánět stroj vratný, dalo by se tedy sestavit opět perpetuum mobile druhého druhu, což není možné. Tedy platí $\eta_n \leq \eta_v$.

Z těchto výsledků plyne Carnotova věta.

Účinnost všech Carnotových vratných dějů pracujících mezi stejnými teplotami ($T_1 > T_2$) je stejná a závisí jen na obou teplotách.

{pr3.2-3} **KP 5.6.3-1** —————

Izotermická expanze v Carnotově cyklu probíhá při 400 K a izotermická komprese při 300 K. Během expanze přejde do plynu 500 J tepla. Určete:

- práci vykonanou plynem během izotermické expanze;
- teplo odevzdané plynem při izotermické kompresi;
- práci při izotermické kompresi;
- celkovou práci vykonanou strojem během jednoho cyklu.

Řešení:

- Práce W'_1 vykonaná během izotermické expanze je rovna přijatému teplu Q_1

$$W'_1 = Q_1 = 500 \text{ J.}$$

5.7. DRUHÝ PRINCIP TERMODYNAMIKY A ENTROPIE

- b) Ze vztahu (5.35) pro účinnost Carnotova děje plyne pro teplo odevzdané plynem při izotermické kompresi

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q'_2}{Q_1} \rightarrow Q'_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1} = 500 \text{ J} \frac{300 \text{ K}}{400 \text{ K}} = 375 \text{ J}.$$

- c) Při izotermické kompresi vykoná okolí práci

$$W_3 = Q'_2 = 375 \text{ J}.$$

- d) Celková práce vykonaná strojem během jednoho cyklu

$$W' = W'_1 + W'_3 = W'_1 - W_3 = Q_1 - Q'_2 = 125 \text{ J}.$$

5.7 Druhý princip termodynamiky a entropie

Tato část je důležitá pro posouzení termodynamických jevů. V odst. 5.7.1 je definována druhá termodynamická věta. Entropie vratných dějů je vyšetřována v odst. 5.7.2 a nevratných dějů v odst. 5.7.3. V odst. 5.7.6 je diskutována entropie a druhá věta termodynamiky a v odst. 5.7.7 entropie a pravděpodobnost. Třetí věta termodynamiky je uvedena v odst. 5.7.8.

Cíl: I) Zpaměti vztahy a uvedené zákony uvedené v rámečcích.

II) Definovat a vyložit pojmy, veličiny a zákony uvedené v části „Obsah“.

III) Samostatně řešit příklady, řešení zdůvodnit a nakreslit náčrtky.

První termodynamická věta vyjadřuje zákon zachování energie. Můžeme uvažovat termodynamické procesy, které sice zachovávají energii, ale ve skutečnosti nikdy nebudou probíhat. Např. přiložíme-li k sobě chladné a horké těleso, nikdy nenastane případ, že by horké těleso se více ohřálo a chladné ochladilo, přesto, že to neodporuje první termodynamické větě. Plyn samovolně expanduje do vakua a přitom nekoná práci. Nikdy nenastane obrácený proces.

5.7.1 Druhý princip termodynamiky

První termodynamická věta neznemožňuje převod práce úplně v teplo a naopak, pouze vyžaduje zachování energie. Druhá termodynamická věta se zabývá otázkami, proč některé procesy neprobíhají v přírodě, i když neodporují první termodynamické větě.

Otázku, jak velkou práci lze obdržet z tepla, které bylo odebráno z tepelného zdroje, řešil Carnot. Jeho závěry zobecnili Clausius, Thompson a Planck v princip, který se nazývá druhou termodynamickou větou. Existují její různé formulace :

{Clausius} Teplo nemůže samovolně přecházet z tělesa chladnějšího na teplejší (Clausius).

V této formulaci je podstatné slovo „samovolně“, protože dodáním práce může přejít teplo z tělesa chladnějšího na teplejší.

{Thompson, Planck} Není možné sestrojiti periodicky pracující stroj, který by jen ochlazoval tepelný zdroj a konal rovnocennou práci (Thompson, Planck).

Takový stroj se nazývá perpetuum mobile druhého druhu. V této formulaci je podstatné slovo

5.7. DRUHÝ PRINCIP TERMODYNAMIKY A ENTROPIE

„periodicky“, poněvadž vratnou izotermickou expanzí ideálního plynu je možné po omezenou dobu konat práci pouze z dodaného tepla.

V okolí libovolného počátečního stavu termicky homogenního systému existují adiabaticky nedosažitelné stavy (Caratheodory).

Není možné sestrotit perpetum mobile druhého druhu (Ostwald).

5.7.2 Entropie při vratných dějích

{PriVratnych}

První termodynamická věta se týká jen pojmu vnitřní energie U . Druhá termodynamická věta se týká termodynamické veličiny zvané entropie, označované S . Pomocí této veličiny můžeme kvalitativně formulovat druhou termodynamickou větu. Začneme analýzou Carnotova děje. Pro účinnost tohoto děje platí (5.35)

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

kde $Q_1 (> 0)$ je teplo dodané plynu teplým zdrojem (zásobníkem), který se nachází na teplotě T_1 , a $Q'_2 (> 0)$ je teplo plynem odevzdané jímači tepla, který se nachází na teplotě $T_2 (< T_1)$.

Položíme-li $Q'_2 = -Q_2$, pak úpravou⁹ dostaneme Clausiovu rovnici

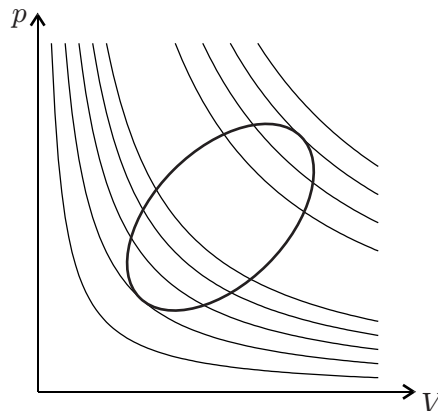
{3.2-29}

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad \text{Clausiova rovnice pro Carnotův děj} \quad (5.50)$$

{ram-123}

Tato rovnice říká, že součet veličin $\frac{Q}{T}$ je pro Carnotův děj roven nule.

Clausiovu rovnici můžeme zobecnit pro libovolný vratný kruhový děj. Obr. 5.17 ukazuje libovolný vratný děj překrytý množinou izoterm. Skutečný děj můžeme aproximovat tak, že izotermy spojíme vhodně vybranými adiabatami (obr. 5.18), čímž dostaneme soubor Carnotových dějů. Proběhnutí jednotlivých Carnotových dějů je přesně ekvivalentní proběhnutí původního děje (obr. 5.19).



Obr. 5.17

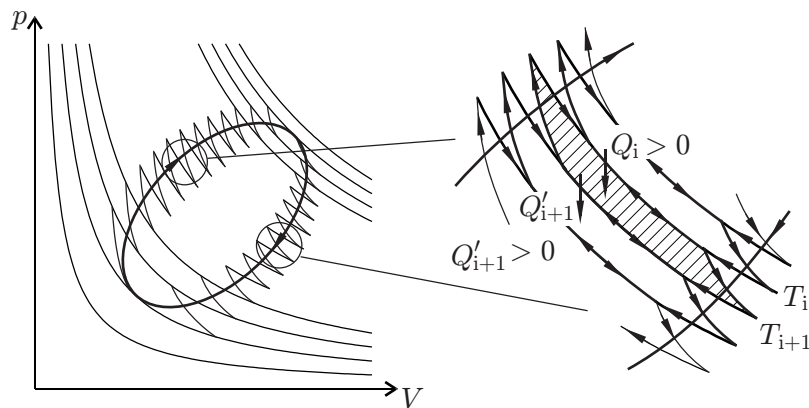
{obr3.2-17}

Je to proto, že sousední Carnotovy děje mají společnou izotermu a dvě okrajové adiabaty ve směrech navzájem opačných se ruší. Zvolíme-li teplotní izotermami dostatečně malé, můžeme libovolný skutečný děj aproximovat přesně pomocí posloupností adiabat a izoterm. Každý elementární děj probíhá obecně mezi jinými teplotami. Pak můžeme pro izotermicko-adiabatickou soustavu čar psát

$$\sum \frac{\Delta Q}{T} = 0,$$

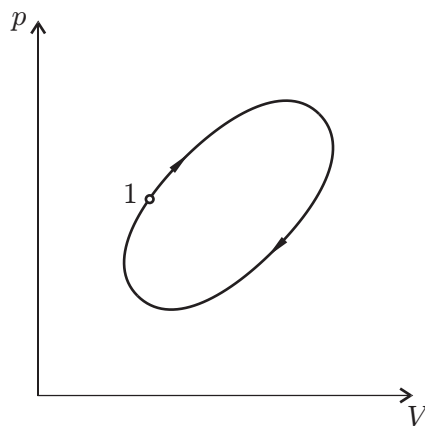
⁹ $\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \rightarrow 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{T_2}{T_1} = 0 \rightarrow \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0.$

5.7. DRUHÝ PRINCIP TERMODYNAMIKY A ENTROPIE



Obr. 5.18

{obr3.2-18}



Obr. 5.19

{obr3.2-19}

nebo v limitě pro infinitezimální teplotní diferenci mezi izotermami

{3.2-30}

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0, \quad \text{Clausiova rovnice pro vratný děj} \quad (5.51)$$

{ram-124}

kde \oint znamená, že integrál je vyčíslován přes celou uzavřenou křivku, tj. začíná a končí v libovolně zvoleném bodě křivky. Tuto rovnici nazýváme Clausiovou rovnicí pro libovolný vratný kruhový děj.

Je-li integrál nějaké veličiny po uzavřené křivce roven nule, pak veličinu nazýváme stavovou veličinou, tj. má hodnotu, která záleží pouze na stavu systému a ne na způsobu, jakým byl dosažen. V tomto případě veličinu S nazýváme entropií a platí

{3.2-31}

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad \text{definice změny entropie} \quad (5.52)$$

{ram-125}

a

$$\oint dS = 0. \quad (5.53)$$

Hlavní jednotkou entropie systému je JK^{-1} . Vztahujeme-li entropii na jednotku látkového množ-

5.7. DRUHÝ PRINCIP TERMODYNAMIKY A ENTROPIE

ství nebo hmotnosti, pak jednotka molové entropie je $\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$ a jednotka měrné entropie $\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$.

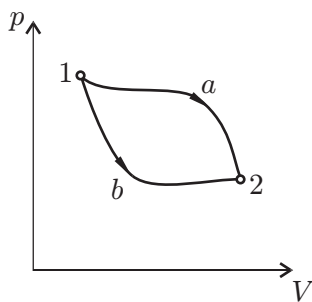
Vlastnosti stavové veličiny $\oint dS = 0$ můžeme vyjádřit tvrzením, že $\int dS$ mezi dvěma rovnovážnými stavy má stejnou hodnotu pro všechny vratné¹⁰ cesty spojující tyto dva stavy. Rovnici (5.52) můžeme psát ve tvaru

$$\int_{1(a)}^2 dS + \int_2^1 dS = 0,$$

kde 1 a 2 jsou libovolně volné stavy a (a) a (b) popisují cesty spojující oba body vyjadřující stavy (obr. 5.20). Protože děj je vratný, můžeme psát

$$\int_{1(a)}^2 dS - \int_{1(b)}^2 dS = 0 \rightarrow \int_{1(a)}^2 dS = \int_{1(b)}^2 dS.$$

Poslední rovnost říká, že veličina $\int_1^2 dS$ mezi dvěma rovnovážnými stavy 1 a 2 systému nezávisí na cestě spojující tyto stavy. Cesty (a) i (b) jsou zcela libovolné.



Obr. 5.20

Změna entropie mezi dvěma stavy 1 a 2 je

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \quad \text{změna entropie pro vratný děj} \quad (5.54)$$

Hodnota tohoto integrálu nezávisí na integrační cestě – můžeme jej tedy vypočítat pro libovolný vratný děj (tj. libovolnou křivku) spojující tyto stavy.

pr3.2-4} KP 5.7-1

Odvoďte vztah pro změnu entropie n_m kilomolů ideálního plynu, přejde-li plyn vratným způsobem ze stavu 1 (p_1, V_1, T_1) do stavu 2 (p_2, V_2, T_2).

Řešení:

Při elementární změně stavu plynu, která probíhá při teplotě T a při níž plyn přijme teplo δQ , je změna entropie

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

¹⁰Tj. takové, u kterých známe stavové „souřadnice“ p, V , a T , kterými plyn prochází ze stavu 1 do 2. Jinak bychom totiž nemohli integrál spočítat.

5.7. DRUHÝ PRINCIP TERMODYNAMIKY A ENTROPIE

Podle první termodynamické věty je $\delta Q = dU + \delta W'$, tedy

$$dS = \frac{1}{T}(dU + \delta W') = \frac{1}{T}(n_m c_V dT + p dV) = n_m \left(c_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right)$$

Při úpravě jsme použili stavové rovnice (4.4) ideálního plynu¹¹. Změna entropie při vratném přechodu systému ze stavu 1 do stavu 2 je

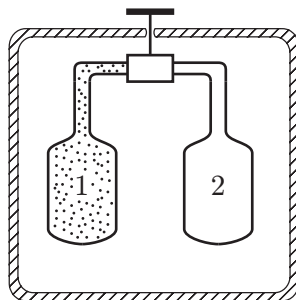
$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = n_m c_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT + n_m R \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = n_m \left(c_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

5.7.3 Entropie při nevratných dějích

Velký význam má průběh entropie při nevratných dějích, neboť umožňuje kvantitativně formulovat druhou termodynamickou větu. Entropie, stejně jako ostatní stavové veličiny, závisí pouze na stavu systému – musíme být tedy schopni vypočítat změnu entropie i pro nevratné děje, s požadavkem, aby začínaly a končily v rovnovážném stavu. Určíme změnu entropie dvou důležitých druhů nevratných změn – volnou expanzi a vedení tepla.

5.7.4 Volná expanze

Mějme v kalorimetru umístěny dvě nádoby spojené kohoutkem (obr. 5.21). Jedna je naplněna plynem, ve druhé je vakuum. Po otevření kohoutku vyplní plyn obě nádoby. Plyn se rozpínal do vakua, nekonal žádnou práci (neposouval žádné stěny, píst atd.), tj. $W' = 0$. Protože plyn je uzavřen tepelně nevodivými stěnami, nenastala výměna tepla s okolím, tedy $Q = 0$. Jen objem plynu se změnil z hodnoty V_1 na V_2 ($V_2 > V_1$). Je-li $Q = 0$ a $W' = 0$, pak z první termodynamické věty plyne $\Delta U = 0$, neboli $U_2 = U_1$, kde 1 a 2 odpovídají počátečnímu a konečnému rovnovážnému stavu. Jedná-li se o ideální plyn, pak U závisí pouze na teplotě a ne na tlaku a objemu $\rightarrow T_1 = T_2$ (viz odst. 4.5).



Obr. 5.21

Volná expanze je nevratný děj, protože ztrácíme kontrolu nad stavovými „souřadnicemi“ prostředí p , V a T hned po otevření kohoutku mezi oběma nádobami. Existuje rozdíl entropií mezi konečným a počátečním rovnovážným stavem, ale nemůžeme jej vypočítat ze vztahu (5.54), protože ten platí (jsme schopni jej určit) jen pro vratný děj.

Výpočet rozdílu entropií provedeme tak, že najdeme vratnou cestu (libovolnou), která popisuje oba rovnovážné stavy 1 a 2 a výpočet provedeme pro tuto cestu. Vhodnou vratnou změnou

¹¹ $pV = n_m RT \rightarrow \frac{p}{T} = \frac{n_m R}{V} \rightarrow \frac{pdV}{T} = \frac{n_m R dV}{V}$.

5.7. DRUHÝ PRINCIP TERMODYNAMIKY A ENTROPIE

je izotermická expanze z V_1 na V_2 ($V_2 = 2V_1$). Toto odpovídá izotermické expanzi provedené mezi body 1 a 2 Carnotova děje. Rozdíl entropií pak vypočteme

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = n_m R \ln \frac{V_2}{V_1} = n_m R \ln 2.$$

Toto je kladná hodnota – entropie systému při nevratném adiabatickém ději roste.

5.7.5 Vedení tepla

Uvažujme dvě stejná tělesa, jedno (teplé) má teplotu T_1 a druhé (studené) T_2 ($T_1 > T_2$). Obě tělesa vložíme do nádoby s tepelně nevodivými stěnami, takže po určité době dosáhnou společné teploty T' . Proces je adiabaticky nevratný, protože teplo se během procesu s okolím nevyměňuje.

Pro výpočet změny entropie systému během procesu musíme najít vhodný vratný děj, který začíná a končí ve stejných rovnovážných stavech. Výpočet provedeme takto: použijeme tepelný zásobník, jehož teplotu můžeme plynule měnit. Zásobník má nejdříve teplotu T_1 , tedy teplotu teplejšího tělesa. Jeho dno pak dáme do styku s tímto teplejším tělesem a začneme pomalu vratně snižovat teplotu zásobníku na teplotu $T' < T_1$. Teplé těleso tak ztrácí entropii $\Delta S_1 (< 0)$

$$\Delta S_1 = - \int_{T_1}^{T'} \frac{\delta Q'}{T} = \int_{T_1}^{T'} \frac{\delta Q}{T},$$

kde $\delta Q' > 0$ je teplo, které teplejší těleso odevzdá při teplotách, které jsou vyšší než T' .

Nyní uvažujme, že má zásobník teplotu T_2 a pomalu ji začneme zvyšovat (vratně) na výslednou teplotu $T' > T_2$ tentokrát v kontaktu s chladnějším tělesem. Chladnější těleso přijímá teplo $\delta Q > 0$, zvyšuje se jeho entropie a její změna $\Delta S_2 (> 0)$ se rovná

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T'} \frac{\delta Q}{T}.$$

Obě tělesa jsou na teplotě T' a systém, který se skládá z těchto dvou těles, je v konečném rovnovážném stavu a platí samozřejmě, že teplo „vydané“ teplejším rovná se teplu „přijatému“ studenějším, tj $\delta Q' = \delta Q$. Celková změna entropie ΔS pro celý systém je pak rovna součtu jednotlivých změn ΔS_1 a ΔS_2

$$\{3.2-33\} \quad S_2 - S_1 = \Delta S_1 + \Delta S_2 = - \int_{T_1}^{T'} \frac{\delta Q'}{T} + \int_{T_2}^{T'} \frac{\delta Q}{T}. \quad (5.55)$$

Platí sice $\delta Q' = \delta Q (> 0)$, ale první integrál

$$\int_{T_1}^{T'} \frac{\delta Q'}{T}$$

je prováděn při stále vyšší teplotě než integrál druhý (dělíme tedy větším číslem), proto

$$\int_{T_1}^{T'} \frac{\delta Q'}{T} < \int_{T_2}^{T'} \frac{\delta Q}{T}$$

5.7. DRUHÝ PRINCIP TERMODYNAMIKY A ENTROPIE

a $S_2 - S_1 > 0$. Entropie systému tedy celkově při tomto nevratném adiabatickém ději vzrostla.

Výpočet změny entropie při reálném ději soustavy bez okolí provedeme následovně. Vybereme libovolný vratný děj, který má stejný počáteční a konečný rovnovážný stav jako reálný děj. Všechny takto zvolené vratné děje povedou ke stejné změně entropie, protože tato závisí pouze na počátečním a konečném stavu a ne na cestě, kterou je systém převeden z jednoho stavu do druhého, ať je vratný nebo nevratný.

Růst entropie při nevratných dějích v izolovaných soustavách lze dokázat obecně. Nechť účinnost nevratného Carnotova děje η_n je menší, než účinnost vratného Carnotova děje η_v

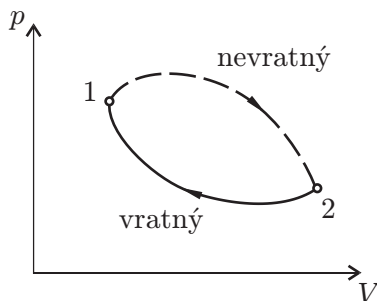
$$\{3.2-34\} \quad \eta_n = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \eta_v. \quad (5.56)$$

Nahradíme-li teplo Q'_2 odevzdané strojem chladnější lázni teplem Q_2 přijatým od chladnější lázně ($Q_2 = -Q'_2$), lze předchozí rovnici přepsat ($Q_1 > 0, T_1, T_2 > 0$) na tvar

$$\{3.2-35\} \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0. \quad (5.57)$$

Tento vztah se nazývá Clausiova nerovnost pro nevratný Carnotův děj. Pro libovolný nevratný děj platí Clausiova nerovnost

$$\{3.2-36\} \quad \oint_{\text{nevrát}} \frac{\delta Q}{T} < 0. \quad \text{Clausiova nerovnost pro nevratný děj} \quad (5.58)$$



{obr3.2-22}

Obr. 5.22

Nechť soustava přejde ze stavu 1 do stavu 2 nevratnou cestou a do původního stavu se vrátí po vratné¹² cestě (obr. 5.22). Pro tento kruhový děj rovněž platí Clausiova nerovnost (5.58) a lze tedy psát

$$\Delta S_{\text{nevrát}} + \int_{2 \text{ vrat}}^1 \frac{\delta Q}{T} < 0, \quad \text{tj.}$$

$$\Delta S_{\text{nevrát}} - \int_{1 \text{ vrat}}^2 \frac{\delta Q}{T} < 0.$$

Podle definice entropie (viz (5.54)) pro vratné změny je

$$\int_{1 \text{ vrat}}^2 \frac{\delta Q}{T} = (S_2 - S_1)_{\text{vrat}}$$

¹²Platí tedy (5.51) a (5.54).

5.7. DRUHÝ PRINCIP TERMODYNAMIKY A ENTROPIE

a tak dostáváme výsledek¹³

{3.2-37}

$$(S_2 - S_1)_{\text{vrat}} - \Delta S_{\text{nevrat}} > 0. \quad \text{míra nevratnosti děje} \quad (5.59)$$

Z této úvahy plyne důležitý závěr, že pro obecný vratný děj je rozdíl entropie v konečném a počátečním stavu větší než ΔS_{nevrat} , tj. že platí $(S_2 - S_1)_{\text{vrat}} > \Delta S_{\text{nevrat}}$.

Rozdíl vyjádřený rovnicí (5.59) je mírou nevratnosti vyšetřovaného děje.

{pr3.2-5}

KP 5.7-2

- Jeden kilogram vody teploty 273 K je ohříván teplem, které do něj přechází ze zásobníku tepla s konstantní teplotou 373 K s velkou tepelnou kapacitou. Teplota vody se tak zvýší na 373 K. Jaká je změna entropie vody, zásobníku tepla a jaká je celková změna entropie všech částí, které se účastní děje?
- 1 kg H₂O byl nejdříve zahřátý teplem ze zásobníku o teplotě 323 K a po dosažení této teploty pomocí dalšího zásobníku na 373 K. Jaká je celková změna entropie systému?
- Jakým způsobem může být zahřáta H₂O z 323 K na 373 K, aniž by se změnila celková entropie?

Řešení:

Ohřívání vody pomocí zásobníku tepla o stále vyšší teplotě je nevratný děj. Musíme najít vratný děj, kterým se převede 1 kg H₂O z počátečního stavu (273 K) do konečného rovnovážného stavu (373 K). Postup: H₂O uvedeme do tepelného kontaktu se zásobníkem, jehož teplota je nepatrně vyšší než teplota H₂O, a rozdíl stále udržujeme. Potom změna entropie H₂O

$$\Delta S_{\text{H}_2\text{O}} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$$

je v případech a) i b) stejná

$$\Delta S_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ kg} \cdot 4,19 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \ln \frac{373}{273} = 1307 \text{ J K}^{-1}.$$

Změna entropie zásobníku se stálou teplotou T_2

$$\Delta S_{\text{Zás}} = \frac{Q'}{T_2} = \frac{mc(T_1 - T_2)}{T_2} < 0$$

pro $T_2 > T_1$. Zde $Q' = mc(T_1 - T_2) < 0$ je teplo přijaté zásobníkem za stálé teploty T_2 (tzn., že teplo vydané zásobníkem je kladné). Dosazením dostaneme

$$\text{a) } \Delta S_{\text{Zás}} = \frac{mc(T_1 - T_2)}{T_2} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 4 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} (-100) \text{ K}}{373 \text{ K}} = -1123 \text{ J K}^{-1}$$

$$\text{b) } \Delta S_{\text{Zás}} = \frac{mc(T_1 - T_3)}{T_3} - \frac{mc(T_2 - T_3)}{T_2} = -1210 \text{ J K}^{-1},$$

kde $T_3 = 323 \text{ K}$; $T_1 - T_3 = -50 \text{ K}$; $T_2 - T_3 = 50 \text{ K}$.

Celková změna entropie je součtem změn entropie vody a zásobníku:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{H}_2\text{O}} + \Delta S_{\text{Zás}},$$

¹³ $\Delta S_{\text{nevrat}} - (S_2 - S_1)_{\text{vrat}} < 0 \rightarrow (S_2 - S_1)_{\text{vrat}} - \Delta S_{\text{nevrat}} > 0.$

5.7. DRUHÝ PRINCIP TERMODYNAMIKY A ENTROPIE

- a) $\Delta S = 1307 \text{ J K}^{-1} - 1123 \text{ J K}^{-1} = 184 \text{ J K}^{-1}$
- b) $\Delta S = 1307 \text{ J K}^{-1} - 1210 \text{ J K}^{-1} = 67 \text{ J K}^{-1}$.
- c) Celková entropie by se nezměnila, kdybychom postupně ohřívali H_2O pomocí velkého počtu zásobníků s teplotami odstupňovanými od 273 K do 373 K anebo užitím jednoho zásobníku s proměnnou teplotou, což odpovídá provedení ohřívání H_2O vratně.

5.7.6 Entropie a druhá termodynamická věta

Druhou termodynamickou větu můžeme formulovat pomocí entropie. Tato věta je zobecněním zkušenosti, nemůžeme ji dokázat, ale jen zapsat a ukázat, že naše tvrzení je v soulase s experimentem a je ekvivalentní s formulací této věty.

Druhá termodynamická věta se dá vyslovit:

Přirozený děj, který začíná v jednom rovnovážném stavu a končí ve druhém rovnovážném stavu, bude probíhat tím směrem, který způsobuje, že součet entropie systému a okolí vzrůstá.

Jádrem druhé termodynamické věty je existence užitečné termodynamické veličiny, zvané entropie. Druhá věta ukazuje, jak entropie užívat k určení, zda určitý děj v přírodě existuje.

Tato forma druhé termodynamické věty je použitelná jen pro nevratné děje, protože jen tyto mají „přirozený směr“, tj. ve směru zvětšování entropie. Vratné děje mohou probíhat v obou směrech a pro ně entropie systému a okolí zůstává nezměněna.

5.7.7 Entropie a pravděpodobnost

Praxe potvrzuje existenci obecného principu, že se energie různého druhu mění v energii tepelnou, ztrácí-li probíhající děj uspořádanost. Např. vypálená střela má kinetickou energii a po nárazu na ocelovou desku se její kinetická energie přemění na neuspořádané pohyby molekul střely a desky. Zvýšení energie neuspořádaného pohybu se projeví zvýšením teploty a energie neuspořádaného pohybu nazýváme tepelnou energií. Abychom tepelnou energii mohli správně charakterizovat, musíme užít dvou hodnot. Jedna hodnota slouží k určení množství energie, druhá jako míra neuspořádanosti. Množství energie měříme v joulech, velikost neuspořádanosti je měřena pomocí entropie.

Existence vztahu mezi neuspořádaností a entropií ukazuje, že neuspořádanost podobně jako entropie roste při přirozených dějích. Např. při volné expanzi molekuly původně uzavřené v jedné polovině nádoby se rychle rozmístí v celé nádobě. Systém se stal méně uspořádaným, protože jsem ztratili určitou možnost určení molekuly. Tvrzení: „Molekuly jsou v nádobě“ je slabší než „molekuly jsou v levé polovině nádoby“. To potvrzuje, že existuje tendence dosáhnout při přirozených dějích stavů s vyšší neuspořádaností.

Ve statistice dostává neuspořádanost přesný smysl a její souvislost s entropií lze vyjádřit vztahem

$$S = k e^{nP}, \quad \text{entropie a pravděpodobnost} \quad (5.60)$$

kde k je Boltzmannova konstanta, S entropie systému a P pravděpodobnost, že se systém bude nacházet v daném stavu ze všech možných, ve kterých se může nacházet. Tato pravděpodobnost se nazývá parametrem neuspořádanosti.

Rovnice (5.60) spojuje termodynamickou (makroskopickou) veličinu entropii se statistickou (mikroskopickou) veličinou pravděpodobností. Statistická definice entropie spojuje termodynamické a statistické náhledy a umožňuje položit druhou termodynamickou větu na statistický

5.8. REÁLNÉ PLYNY

základ. Směr, ve kterém probíhají přirozené děje, je určen zákony pravděpodobnosti. Rovnovážený stav je stavem s největší entropií a je nejpravděpodobnější.

Nicméně kolem rovnovážných stavů se mohou vyskytovat fluktuace. Z tohoto hlediska není jisté, že entropie vzroste při každém samovolném ději. Entropie může někdy klesnout. Druhá termodynamická věta ukazuje nejpravděpodobnější průběh dějů, ne jedině možný.

5.7.8 Třetí princip termodynamiky

{retiPrincip}

Druhá termodynamická věta zavádí pouze změnu entropie. Entropie se dala určit až na jistou aditivní konstantu. K určení této konstanty je třeba určit entropie v určitém stavu látky. Taková hodnota se dá určit z věty formulované Nerstem. Tato věta se nazývá třetí termodynamickou větou a zní:

Entropie každé krystalické chemicky čisté látky při absolutní nulové teplotě je rovna nule. Matematický zápis této věty je

{3.2-39}

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad \text{třetí věta termodynamiky} \quad (5.61)$$

Znamená to, že vratná nulová izoterma ($T = 0$) splývá s vratnou nulovou adiabatou ($S = 0$).

5.8 Reálné plyny

{RealPlyny}

V této části jsou probrány základní pojmy, veličiny a zákony. V odst. 5.8.1 jsou vyloženy fázové změny, stavová rovnice v odst. 5.8.2 a Van der Waalova rovnice v odst. 5.8.3. V odst. 5.8.4 je vyšetřován kritický trojný bod.

Cíl: I) Vyložit a definovat pojmy, veličiny a zákony uvedené v rámečcích v této kapitole.

II) Samostatně řešit příklady, řešení zdůvodnit a nakreslit náčrtky.

5.8.1 Fázové změny

{FazoveZmeny}

Termodynamika vyšetřuje kromě homogenního systému také systémy, skládající se z několika homogenních částí. Takový systém nazýváme heterogenní. Jako příklad uvedeme kapalinu v rovnováze se svou parou. Hustota kapaliny je všude stejná, hustota páry rovněž, ale mezi kapalinou a parou je ostré rozhraní. Takové homogenní části, které jsou od ostatních částí odděleny ostrým rozhraním, nazýváme fázemi, jejich počet značíme f . Fázemi mohou být různé modifikace stejnorodé látky, jako pevný, kapalný, plynný stav, různé krystalické stavy (uhlík v šesterečné a krychlové soustavě), feromagnetický a paramagnetický stav apod.

Navzájem nezávislé chemicky čisté látky obsažené v termodynamické soustavě nazýváme složky a jejich počet značíme s . Systém se tedy obecně skládá z s složek, které tvoří f fází. Rovnovážený stav heterogenního systému je charakterizován parametry, z nichž počet v se může nezávisle měnit, aniž se změní počet fází soustavy a pro něž platí

{3.2-40}

$$f + v = s + 2. \quad \text{Gibbsovo fázové pravidlo} \quad (5.62)$$

Toto pravidlo, které určuje počet stupňů volnosti v , se nazývá Gibbsovo fázové pravidlo.

V případě systému, který tvoří jedna fáze jediné složky¹⁴, má systém dva stupně volnosti a takovýto systém se nazývá bivariantní. Jeho stav je určen různým tlakem a různou teplotou.

¹⁴ $f = 1, s = 1, \rightarrow v = 2.$

5.8. REÁLNÉ PLYNY

Jestliže se systém vyskytuje ve dvou fázích jedné složky¹⁵, má jen jeden stupeň volnosti. Typickým příkladem je rovnováha vody a její nasycené páry. Rovnováha se dosáhne pro daný tlak při určité teplotě, pro jiný tlak bude rovnováhy dosaženo při teplotě jiné. Systém tří fází jedné složky¹⁶ nemá žádnou volnost a rovnováha se dosáhne jen při jediné určité hodnotě tlaku a jediné určité hodnotě teploty. Tento stav látky, ve kterém je plyn, kapalná a tuhá fáze v rovnováze, je určený trojným bodem. Např. trojný bod vody se dosáhne při teplotě 0,01 °C (273,16 K) a tlaku 509,95 Pa.

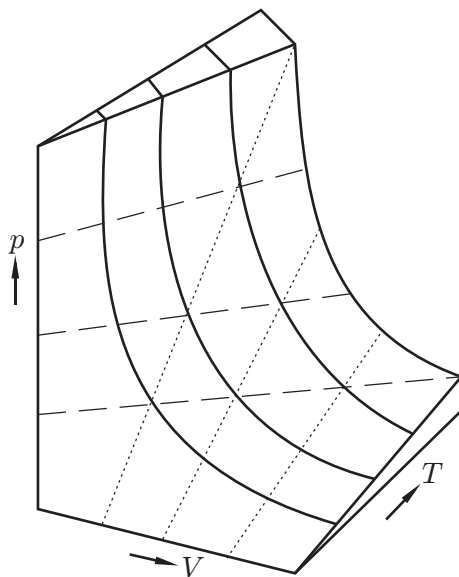
5.8.2 Stavová rovnice

Budeme se zabývat fázovými přechody u jednosložkového systému ($s = 1$), jehož parametry jsou teplota, tlak, objem a látkové množství. V jednosložkovém systému mohou být maximálně tři fáze a to již systém nemá žádný stupeň volnosti. Koexistence nastane jen při určité teplotě a tlaku a množstvím je dán objem. Při dvou fázích počet stupňů volnosti je $v = 1$ a můžeme libovolně měnit teplotu nebo tlak. Při jedné fázi můžeme měnit teplotu i tlak.

Stavovou rovnici systému o jedné složce můžeme obecně zapsat ve tvaru

$$f(n_m, p, V, T) = 0, \quad \text{stavová rovnice systému o jedné složce} \quad (5.63)$$

kde V je objem zaujímaný látkou o látkovém množství n_m , při teplotě T a tlaku p . Přesný tvar funkce je obvykle velmi složitý. Často chceme znát, jak se některá veličina mění v závislosti na jiné veličině, přičemž ostatní veličiny zůstávají konstantní.



Obr. 5.23

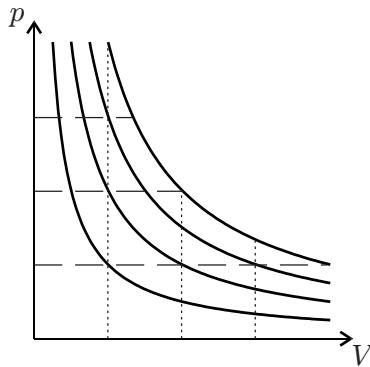
Stavová rovnice pro konstantní látkové množství (např. 1 kilomol) je relací mezi třemi proměnnými p , V a T . Znázorníme ji plochou v pravoúhlém souřadném systému, kde p , V a T jsou znázorněny na jednotlivé osy. Obr. 5.23 znázorňuje plochu, která představuje stavovou rovnici ideálního plynu $pV = RT$. Plné čáry na ploše znázorňují vztah mezi p a V při $T = \text{konst.}$, čárkovaná vztah mezi V a T za $p = \text{konst.}$ a tečkovaná čára vztah mezi p a T při $V = \text{konst.}$ Kolmá projekce na rovinu p - V je znázorněna na obr. 5.24, kolmá projekce na rovinu p - T je na

¹⁵ $f = 2$, $s = 1$, $\rightarrow v = 1$.

¹⁶ $f = 3$, $s = 1$, $\rightarrow v = 0$.

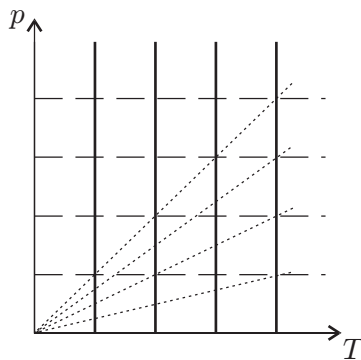
5.8. REÁLNÉ PLYNY

obr. 5.25 a kolmá projekce na $V-T$ je na obr. 5.26.



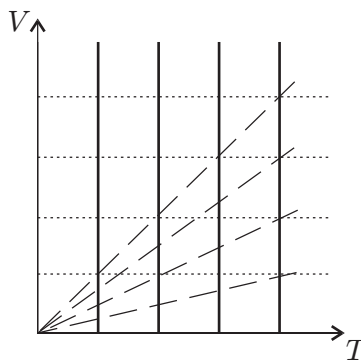
Obr. 5.24

{obr3.2-24}



Obr. 5.25

{obr3.2-25}



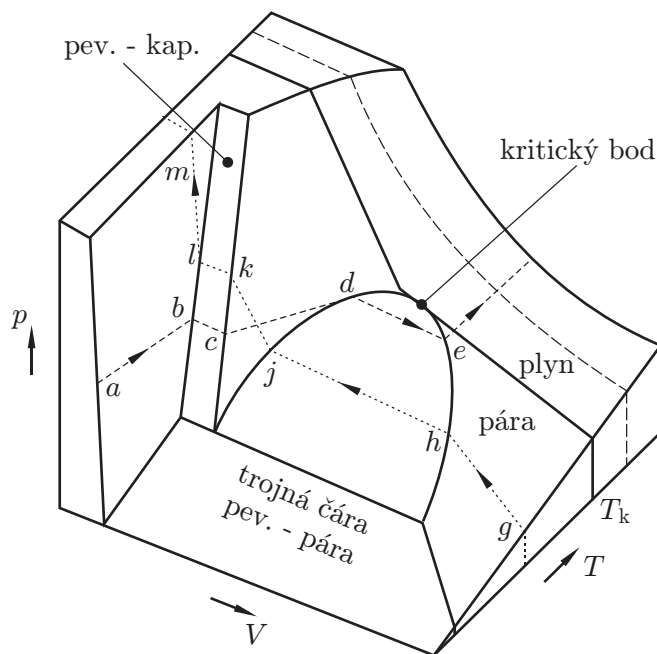
Obr. 5.26

{obr3.2-26}

Plyn nemůže existovat ve stavu, který není na ploše. Při kterémkoliv procesu, při kterém plyn prochází sledem rovnovážných stavů, bod reprezentující jeho stav se pohybuje po křivce ležící na ploše $p-V-T$.

Chování reálných látek se vzdaluje od chování ideálních plynů a to tím více, čím vyšší jsou tlaky a nižší teploty. Všechny látky při zvyšování tlaku a snižování teploty se mění z plynné fáze v kapalnou nebo pevnou. Obecná stavová rovnice je příliš komplikovaná pro matematické vyjádření. Graficky je znázorněna plochou $p-V-T$.

Na obr. 5.27 je schematický diagram pro látku, která se při snížení tlaku mění v kapalinu (nejobvyklejší případ). Látka může existovat v pevné, kapalně nebo plynné fázi nebo současně ve dvou fázích nebo ve třech fázích podél trojné čáry.



Obr. 5.27

{obr3.2-27}

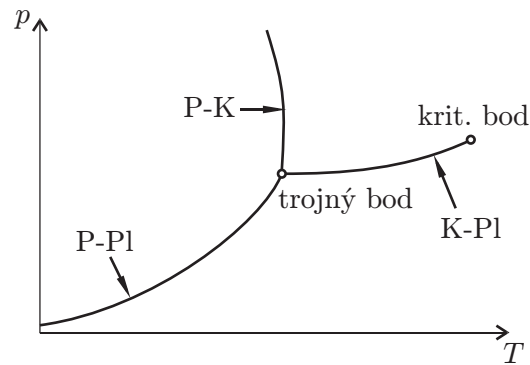
Nyní si uvedeme několik ukázek použití p - V - T diagramu.

Nechť látka je v pevné fázi a prochází rovnovážnými stavy za $p = \text{konst.}$ Vyjdeme ze stavu znázorněného bodem a . Nechť látka koná izobarický děj a při zahřívání látky teplota stoupá a objem roste a - b . Látka v bodě b se začne měnit z pevné na kapalnou fázi. Na úseku b - c je rovnováha mezi pevnou a kapalnou fází. V bodě c je látka jen v kapalně fázi, teplota opět začne stoupat a objem roste. Po dosažení bodu d teplota opět zůstává konstantní, kapalina se mění v páru a objem ztelně narůstá. Na úseku d - e existuje rovnovážná směs kapaliny a její nasycené páry. V bodě e je látka zcela v plynné fázi. Dalším dodáváním tepla začne teplota stoupat a objem poroste, až plyn dosáhne bodu f . Teplota leží nad kritickou teplotou T_K a plyn se nedá izotermickým stlačením zkapalnit.

Mějme látku, jejíž počáteční stav se dán souřadnicemi bodu g (obr. 5.27). Látka je ve styku s tělesem o velké tepelné kapacitě, teplota se nemění - děj je izotermický. Účinkem zvětšení vnějšího tlaku se zvýší teplota. Teplo se předá zásobníku, teplota se vyrovná a objem se zmenší. Jak tlak roste, objem se zmenšuje podél čáry g - h . V bodě h plyn začne zkapalnit a objem se zmenšuje, bez zvyšování tlaku. V bodě j je všechna látka v kapalně fázi. Při dalším zvyšování tlaku objem zmenšujeme a v bodě k dojde ke změně kapalně fáze v pevnou a objem se zmenšuje podél čáry k - l . V bodě l je látka zcela v pevně fázi, další tlak zmenšuje objem mírně podél čáry l - m .

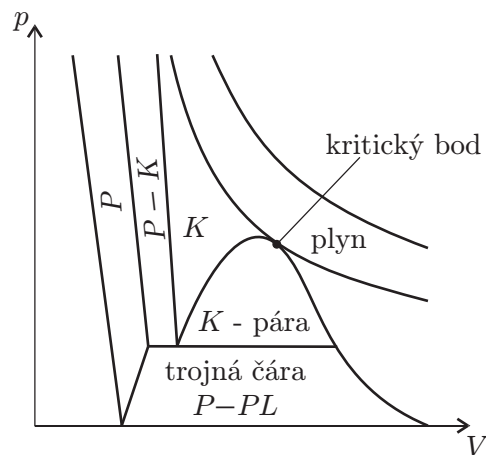
Sestrojit trojrozměrný diagram a odečíst z něho není vždy snadné, je proto obvyklé zobrazovat p - V - T plochu jejími projekcemi do rovin p - T , p - V nebo V - T . Na obr. 5.28 a obr. 5.29 jsou zobrazeny dvě projekce obr. 5.27. Na těchto diagramech se dají sledovat izochorické a izotermické děje popisované na obr. 5.27.

Křivky z obr. 5.28 označené P - K , P - Pl a K - Pl jsou geometrická místa odpovídajících tlaků a teplot, při kterých mohou existovat dvě fáze. Trojný bod (je to průmět trojné čáry na rovinu p - T) je geometrické místo, ve kterém mohou existovat tři fáze.



Obr. 5.28

{obr3.2-28}



Obr. 5.29

{obr3.2-29}

5.8.3 Van der Waalsova rovnice

DerWaalsova}

Matematické vyjádření stavové rovnice ideálního plynu pro 1 kilomol je $pv_k = RT$. Reálné plyny splňují tuto rovnici jen přibližně a to tím lépe, čím vyšší je teplota plynu a čím nižší je tlak. U ideálního plynu jsem předpokládali, že molekuly mají zanedbatelný objem a že na sebe mimo srážek silově nepůsobí. K těmto nereálným okolnostem přihlédl Van der Waals a teoreticky odvodil stavovou rovnici pro reálné plyny.

Molekuly mají vlastní rozměr a pohybují se v uzavřené nádobě o určitém objemu méně volně, než kdyby byly bodovými částicemi. Objem, který je volný pro pohyb molekul, je proti geometrickému objemu nádoby V menší o hodnotu b , která souvisí s vlastním objemem molekul. Ve stavové rovnici pro jeden kilomol plynu je tak třeba nahradit objem v_k veličinou $v_k - b$. Veličina b je objem, který zaujímají všechny molekuly jednoho kilomolu plynu nahuštěny těsně jedna na druhé.

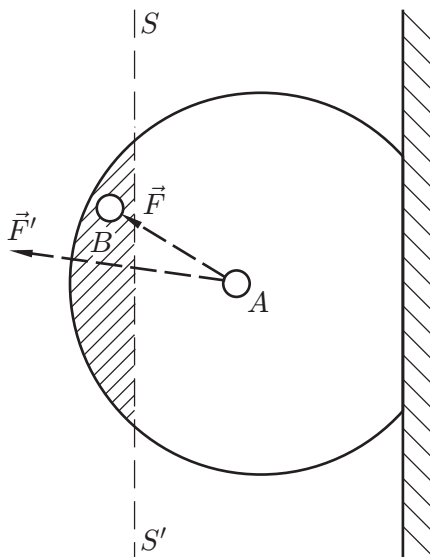
Přitažlivé síly mezi molekulami způsobují, že plyn zaujímá menší objem V , než by plynulo z Boylova–Mariottova zákona. Plyn zaujímá takový objem, jako kdyby byl pod tlakem p' větším, než je vnější tlak p . Vnější tlak p ve stavové rovnici musí být nahrazen hodnotou $p' = p + p_i$, kde p_i je tzv. kohezní tlak. Stavová rovnice pro jeden kilomol plynu má pak tvar

{3.2-41}

$$(p + p_i)(v_k - b) = RT. \quad \text{stavová rovnice pro reálný plyn} \quad (5.64)$$

5.8. REÁLNÉ PLYNY

Účinek přitažlivých sil mezi molekulami se projevuje jinak na molekulách uvnitř plynu a na molekulách blízko stěn. Uvnitř plynu působí na každou molekulu síly ze všech stran, takže se navzájem kompenzují. Molekuly blízko stěny jsou přitahovány molekulami vnitřními. Vliv stěny lze zanedbat za předpokladu, že molekuly nelnou ke stěnám a že se molekuly odrážejí od stěn jako pružné koule.



Obr. 5.30

{obr3.2-30}

Pokud budou mezimolekulární síly rychle ubývat se zvětšováním vzdálenosti mezi molekulami, pak průměr sestrojené oblasti působením přitažlivých sil bude jen o málo větší, než průměr molekuly. Nedaleko od stěny nádoby budou síly, působící na molekulu A od různých molekul (které se nacházejí uvnitř oblasti působení přitažlivých sil), spolu v rovnováze, takže molekula A nebude vystavena působení výsledné síly v určitém směru. Jestliže oblast působení přitažlivých sil omezíme stěnou SS' (jak je uvedeno na obr. 5.30), pak na molekulu A bude působit síla ve směru od stěny. Z obrázku je totiž zřejmé, že molekuly, působící na molekulu A z vyšrafované oblasti nemají svůj silový „protějšek“, protože tyto molekuly by se nacházely již za stěnou. Výsledná síla je F' a je přibližně úměrná objemu vyšrafovaného elementu na obr. 5.30 a počtu molekul v jednotkovém objemu tohoto elementu.

Na všechny molekuly ležící v tzv. povrchové vrstvě¹⁷, která má tloušťku řádově průměru oblasti působení přitažlivých sil, působí nějaká síla F ve směru od stěny k plynu. V prvním přiblížení můžeme uvažovat, že počet molekul v jednotkovém objemovém elementu vyšrafované části N_0 je roven počtu molekul n_0 v jednotkovém objemu V , tj. platí $N_0 = n_0$, kde n_0 je koncentrace částic v plynu. Pak střední síla působící na molekulu v povrchové vrstvě je úměrná n_0 . Tato přitažlivá síla míří dovnitř plynu a zmenšuje tlak, vyvolaný molekulami na stěnu. Abychom vypočetli opravu k tlaku, musíme určit obecnou sílu působící na všechny molekuly povrchové vrstvy jednotkové plochy stěny. V prvním přiblížení je tato veličina rovněž úměrná počtu molekul v objemové jednotce, tj. koncentraci částic n_0 .

Pokud počet molekul v povrchové vrstvě je úměrný koncentraci a síla působící na všechny molekuly v této vrstvě je rovněž úměrná n_0 , pak oprava tlaku, tj. síla na jednotku plochy povrchové vrstvy, je úměrná n_0^2 . Oprava tlaku se nazývá kohezní tlak p_i a vyjádříme jej vztahem

¹⁷Zde je namísto připomenout si podobnou fyzikální situaci vody a povrchové vrstvy, která je obdobná situaci v plynu, kterou právě diskutujeme.

5.8. REÁLNÉ PLYNY

$p_i = a'n_0^2$, kde a' je konstanta závislá na druhu plynu. Protože

$$n_0 = \frac{N_0}{V} = \frac{N_A n_m}{V} = \frac{N_A}{v_k},$$

kde N_A je Avogardova konstanta a v_k kilomolový objem, lze psát

$$p_i = \frac{a'N_A^2}{v_k^2} = \frac{a}{v_k^2},$$

kde $a = a'N_A^2$ je jistá konstanta. Dosazením do (5.64) dostaneme stavovou rovnici Van der Waalsovu pro 1 kilomol reálného plynu

$$\{3.2-42\} \quad \left(p + \frac{a}{v_k^2}\right)(v_k - b) = RT. \quad \text{Van der Waalsova} \\ \text{stavová rovnice reálného plynu} \quad (5.65)$$

Pro množství plynu o celkové hmotnosti M a molekulové hmotnosti M_m , tj. pro látkové množství $n_m = \frac{M}{M_m}$ molů, zaujímá plyn objem $V = \frac{M}{M_m}v_k = n_mv_k$ a dosadíme-li do rovnice (5.65), obdržíme rovnici pro libovolný počet molů

$$\{3.2-43\} \quad \left(p + \frac{n_m^2 a}{V^2}\right)(V - n_m b) = n_m RT. \quad (5.66)$$

Van der Waalsova rovnice vyhovuje velmi dobře pro plynnou fázi, pro kapalnou již méně. Např. pro dusík v rozsahu 10^5 – 10^8 Pa nepřesahují odchylky chování tohoto plynu od Van der Waalsovy rovnice 2 %, zatímco odchylka od stavové rovnice ideálního plynu při tlaku 10^8 Pa je větší než 100 %.

Jednoduchou úpravou rovnice (5.66), tj. provedeme naznačené operace a rovnici vynásobíme V^2 , dostaneme

$$\{3.2-44\} \quad pV^3 - n_m(pb + RT)V^2 + n_m^2 aV - n_m^3 ab = 0. \quad (5.67)$$

Tato rovnice je vzhledem k objemu V rovnicí třetího stupně. Při libovolných hodnotách p a T dává 3 hodnoty pro objem. Protože řešení rovnice má tři kořeny reálné nebo jeden reálný a dva komplexní, a protože objem je vždy reálný, dostáváme pro V buď jedno nebo tři různá řešení. Fyzikální smysl mají jen kladné reálné kořeny.

5.8.4 Kritický a trojný bod

Z obr. 5.27 vidíme, že kapalná a plynná fáze mohou společně existovat jen za teplot a tlaků menších, než odpovídají bodu ležícímu na vrcholu plochy označené kapalina–pára. Tento bod se nazývá kritický bod a odpovídající hodnoty T_{kr} , p_{kr} , V_{kr} jsou kritická teplota, tlak a objem. Pro kritický bod má rovnice (5.67) tvar

$$\{3.2-45\} \quad p_{kr}V_{kr}^3 - n_m(p_{kr}b + RT_{kr})V_{kr}^2 + n_m^2 aV_{kr} - n_m^3 ab = 0. \quad (5.68)$$

Z matematického hlediska můžeme objem V_{kr} považovat za trojnásobný kořen rovnice (5.67) a můžeme ji napsat ve tvaru

$$\{3.2-46\} \quad p_{kr}(V - V_{kr})^3 \equiv p_{kr}V^3 - 3p_{kr}V_{kr}V^2 + 3p_{kr}V_{kr}^2V - p_{kr}V_{kr}^3 = 0. \quad (5.69)$$

Porovnáním koeficientů u rovnic (5.68) a (5.69) dostaneme

$$n_m(p_{kr}b + RT_{kr}) = 3p_{kr}V_{kr}; \quad n_m^2 a = 3p_{kr}V_{kr}^2; \quad n_m^3 ab = p_{kr}V_{kr}^3.$$

5.8. REÁLNÉ PLYNY

Z toho vyplývá souvislost kritických parametrů s veličinami a a b (viz (5.65)), které charakterizují síly mezi molekulami. Tedy

$$V_{\text{kr}} = 3bn_m; \quad p_{\text{kr}} = \frac{a}{27b^2}; \quad T_{\text{kr}} = \frac{8a}{27bR}.$$

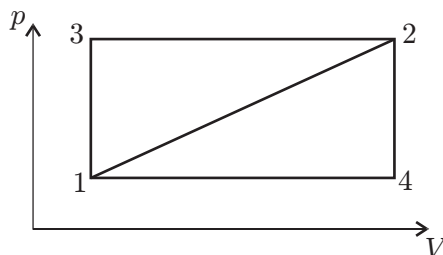
Z těchto vztahů získáme z $p_{\text{kr}}V_{\text{kr}} = n_mRT_{\text{kr}}$ výsledek

$$\frac{n_mRT_{\text{kr}}}{p_{\text{kr}}V_{\text{kr}}} = \frac{n_mR\frac{8a}{27bR}}{\frac{a}{27b^2}3bn_m} = \frac{8ab^2n_mR27}{3ab^2n_m27R} = \frac{8}{3} = 2,67,$$

který je vhodný pro jednoduchou kvantitativní kontrolu přesnosti Van der Waalsovy rovnice.

{pr3.2-6} **KP 5.8-1** _____

Je-li systém ze stavu 1 do stavu 2 (viz obr. 5.31) převeden po cestě 1–3–2, přijme 80 J tepla



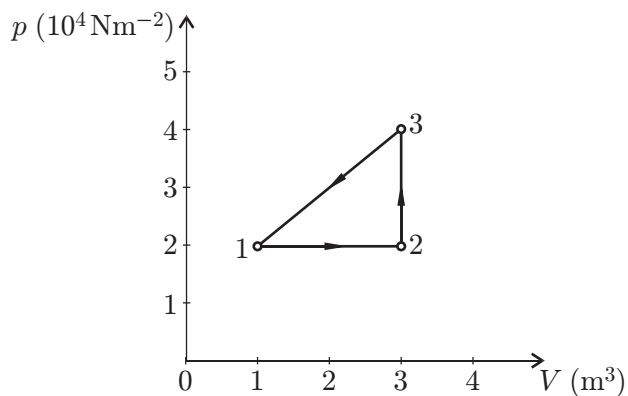
Obr. 5.31

a vykoná 30 J práce.

1. Jaké teplo přijme systém na dráze 1–4–2, vykoná-li systém práci 10 J?
2. Vráti-li se systém z 2 do 1 po křivce 2–1, vykonají vnější síly práci 20 J. Bude systém přijímat nebo vydávat teplo a jaké?
3. Nalezněte teplo absorbované při procesech 1–4 a 4–2, je-li $U_1 = 0$ a $U_4 = 40$ J.

{pr3.2-7} **KP 5.8-2** _____

Termodynamický systém vykoná uzavřený cyklus 1–2–3–1 podle obr. 5.32 Vypočítejte práci



Obr. 5.32

vykonanou systémem při úplném cyklu.

5.8. REÁLNÉ PLYNY

{pr3.2-8} **KP 5.8-3** _____

Užitím Mayerova vztahu dokažte, že zvýší-li se při izobarické expanzi jednoho kilomolu ideálního plynu jeho teplota o 1 K, vykoná plyn práci číselně rovnou univerzální plynové konstantě R .

{pr3.2-9} **KP 5.8-4** _____

Jaké teplo se vybaví při izotermickém stlačení $0,003 \text{ m}^3$ vzduchu s počátečním tlakem 10^5 N m^{-2} a objemem $0,0005 \text{ m}^3$?

{pr3.2-10} **KP 5.8-5** _____

Válec obsahuje $0,001$ kilomolu kyslíku teploty 27°C . Válec je opatřen pístem, který se pohybuje bez tření a který udržuje ve válci konstantní tlak 10^5 N m^{-2} . Plyn je zahřát na teplotu 127°C .

1. Jakou práci vykoná plyn při tomto ději?
 2. Jaká je změna vnitřní energie plynu?
 3. Jaké teplo bylo dodáno plynu?
 4. Jaká práce by byla vykonána, kdyby byl tlak $5 \cdot 10^{-4} \text{ N m}^{-2}$?
-

{pr3.2-11} **KP 5.8-6** _____

Kompresor vyrobí za hodinu 50 m^3 stlačeného vzduchu o tlaku $8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Je přitom ochlazen proudem vody, takže stlačování je možno pokládat za izotermické. Vnější tlak je 10^5 Pa .

1. Jaký výkon musí mít motor kompresoru, je-li účinnost kompresoru $0,6$?
 2. Kolik se spotřebuje chladící vody, mění-li se její teplota z 11°C na 17°C ?
-

{pr3.2-12} **KP 5.8-7** _____

Počáteční tlak dvouatomového plynu je $1,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, počáteční objem je 10^{-3} m^3 . Jaký bude tlak plynu při objemu

$$V_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; \quad V_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; \quad V_3 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3; \quad V_4 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3;$$

1. expanduje-li plyn adiabaticky;
2. expanduje-li plyn izotermicky?

Znázorněte změny tlaku v p - V diagramu.

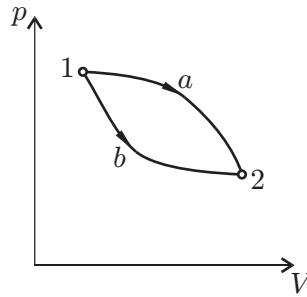
{pr3.2-13} **KP 5.8-8** _____

Dieselův motor má objem válce 10^{-2} m^3 a kompresní poměr 12 . Počáteční tlak ve válci je 10^5 Pa , počáteční teplota 10°C . Předpokládejte, že komprese probíhá adiabaticky, a stanovte konečný tlak, teplotu a práci při stlačování.

{pr3.2-14} **KP 5.8-9** _____

1 kg kyslíku počátečního tlaku 10^5 Pa a počáteční teploty 20°C je stlačen na tlak 10^6 Pa . Vypočítejte práci vykonanou při stlačení kyslíku, probíhá-li komprese

1. izotermicky
 2. adiabaticky
-

{pr3.2-15} **KP 5.8-10** _____Přechází-li systém ze stavu 1 do stavu 2 (viz obr. 5.33) po křivce 1–a–2, přijímá teplo Q_a ;

Obr. 5.33

{obrp3.2-15}

přechází-li po křivce 1–b–2, přijímá teplo Q_b . Které z těchto tepel je větší? Čemu je roven jejich rozdíl?

{pr3.2-16} **KP 5.8-11** _____

Teplota páry z kotle vstupující do parního stroje je 210 °C, teplota v kondenzoru je 40 °C. Jakou maximální práci by bylo možno teoreticky získat z 4,19 kJ vynaložených na vytvoření páry?

{pr3.2-17} **KP 5.8-12** _____

Jaké maximální teplo může být odvedeno z chlazeného prostoru chladničky při vynaložené práci 1 kJ, je-li teplota uvnitř chladničky -10°C a teplota okolí 11°C?

{pr3.2-18} **KP 5.8-13** _____Dva ideální Carnotovy stroje mají společný tepelný zdroj o teplotě T_1 a společný jímač tepla o teplotě T_2 . Pracují se stejným množstvím pracovní látky, kterou je ideální plyn. Čím se liší pracovní cykly obou strojů, jestliže práce vykonaná jedním ze strojů během jednoho cyklu je n -násobkem práce druhého stroje během jednoho cyklu?

{pr3.2-19} **KP 5.8-14** _____První stupeň vratného tepelného stroje přijme teplo Q_1 při teplotě T_1 , vykoná práci W'_1 a vydá teplo Q'_2 při nižší teplotě T_2 . Druhý stupeň přijme teplo odevzdané prvním stupněm při teplotě T_2 , vykoná práci W'_2 a odevzdá teplo Q'_3 při nižší teplotě T_3 .

1. Znázorněte schematicky činnost popsaného zařízení podle vzoru na obr. 5.16.
2. Dokažte, že účinnost celého zařízení je dána vztahem

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

{pr3.2-20} **KP 5.8-15** _____

1. Jaká by byla účinnost η ideálního tepelného stroje, o němž se mluví v Thompsonově a Planckově formulaci (viz 5.7.1) druhé termodynamické věty?
2. Jaká by byla účinnost ε ideálního chladicího stroje, jehož existence je v rozporu s Clausiovou formulací (rovněž viz odst. 5.7.1) druhé termodynamické věty?

5.8. REÁLNÉ PLYNY

{pr3.2-21} **KP 5.8-16** _____

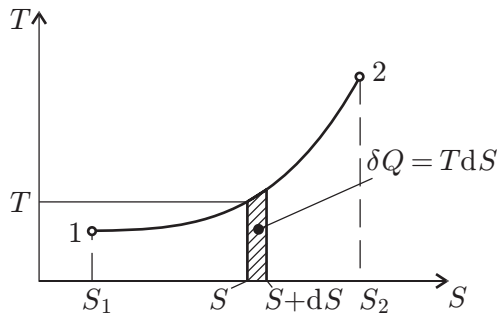
Stanovte změnu entropie dusíku při ochlazení 2 g tohoto plynu ze 40 °C na 0 °C

1. při stálém objemu,
2. při stálém tlaku.

Molová tepelná kapacita dusíku při stálém objemu je $c_V = 742 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

{pr3.2-22} **KP 5.8-17** _____

Stanovte změnu entropie vody při těchto vratných dějích:



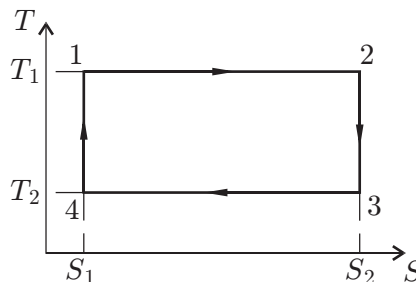
Obr. 5.34

1. kilogram ledu 0 °C byl rozpuštěn a přeměněn na vodu téže teploty.
2. Kilogram vody teploty 0 °C byl ohřátý na teplotu 100 °C.

{pr3.2-23} **KP 5.8-18** _____

1. Dokažte, že plocha pod křivkou znázorňující vratný děj v $T-S$ diagramu je úměrná teplu, které systém při ději přijímá nebo vydává.
2. Vyslovte pravidlo, podle kterého určíte z diagramu znaménko tepla Q přijatého systémem.

{pr3.2-24} **KP 5.8-19** _____



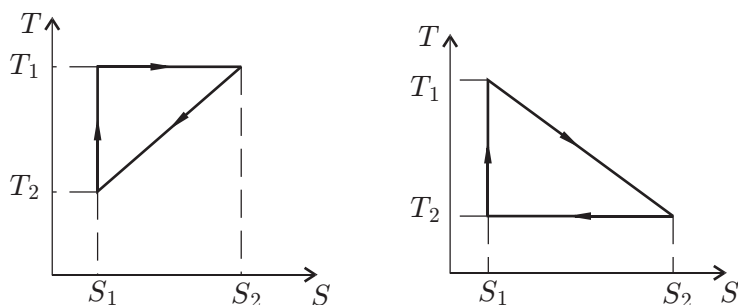
Obr. 5.35

1. Jaký děj je znázorněn obdélníkem 1-2-3-4-1 v $T-S$ diagramu na obrázku 5.35?
2. Čemu jsou úměrné plochy $S_1-1-2-S_2$, $S_1-4-3-S_2$ a 1-2-3-4?
3. Stanovte účinnost znázorněného cyklu.

5.8. REÁLNÉ PLYNY

{pr3.2-25} **KP 5.8-20** _____

Stanovte účinnost cyklů podle obrázků 5.36a a 5.36b.



Obr. 5.36

{obrp3.2-25}

{pr3.2-26} **KP 5.8-21** _____

Dva různé chemicky spolu nereagující plyny, které mají stejnou teplotu T a tlak p , se nacházejí v oddělených nádobách s tepelně izolujícími stěnami o objemech V_1 a V_2 spojených trubící s kohoutem. Otevřeme-li kohout, plyny se promísí. Určete změnu entropie při tomto ději.

{pr3.2-27} **KP 5.8-22** _____

Mosazná tyč spojuje dvě tepelné lázně o konstantní teplotě; jedna z nich má teplotu 127°C , druhá 27°C . Vypočtete celkovou změnu entropie, projde-li tyčí $5\,030\text{ J}$ tepla.

{pr3.2-28} **KP 5.8-23** _____

Do kalorimetru se zanedbatelnou tepelnou kapacitou, který obsahuje 250 g vody 23°C teplé, je vloženo 27 g ledu o teplotě 0°C . Po jisté době se teplota ustálí. Určete změnu entropie.

{pr3.2-29} **KP 5.8-24** _____

Jak se mění bod tání reálných látek v závislosti na tlaku? Vysvětlete pomocí p - V - T diagramu reálných látek.

{pr3.2-30} **KP 5.8-25** _____

1. Za jakých podmínek je možné převést izobaricky látku z pevné fáze přímo do plynné fáze?
2. Za jakých podmínek lze izotermickou kompresí zkapalnit plyn?

Popište tyto děje a znázorněte je v p - V - T diagramech reálných látek.

{pr3.2-31} **KP 5.8-26** _____

Ověřte platnost Gibbsova fázového pravidla pro systémy o jedné složce na fázových p - T diagramech reálných látek.

{pr3.2-32} **KP 5.8-27** _____

Pro kyslíčník uhličitý byly experimentálně určeny hodnoty konstant ve Van der Waalově rovnici

$$a = 3,64 \cdot 10^5 \text{ Nm}^4\text{kmol}^{-2}; \quad b = 4,26 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3\text{kmol}^{-1}.$$

1. Přesvědčte se, zda je Van der Waalova rovnice ((5.65)) splněna pro kritické stanové veličiny

$$T_{\text{kr}} = 304 \text{ K}; \quad p_{\text{kr}} = 7,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}; \quad v_{\text{kr}} = 0,1278 \text{ m}^3\text{kmol}^{-1}.$$

5.8. REÁLNÉ PLYNY

2. Jaká by vyšla kritická teplota, kdybychom CO_2 pokládali za ideální plyn a použili stavové rovnice ideálního plynu (4.4)?

{pr3.2-33}

KP 5.8-28

Jak velká relativní chyba vznikne, počítáme-li teplotu jednoho kilomolu CO_2 ze stavové rovnice (4.4) ideálního plynu,

1. je-li jeho objem roven kritickému objemu a jeho tlak rovný dvojnásobku (čtyřnásobku) kritického tlaku;
 2. je-li tlak rovný kritickému tlaku a jeho objem je rovný dvoj a (čtyř)násobku kritického objemu;
 3. je-li jeho objem rovný čtyřnásobku kritického objemu a tlak rovný čtyřnásobku kritického tlaku?
-

6. Kmitání

{Kmitani}

6.1 Hlavní vlastnosti kmitavých pohybů

6.1.1 Obecné kmity

{ObecneKmity}

Příklady kmitavých pohybů. V technické praxi i v běžném životě se vyskytuje velmi často kmitavý pohyb, tj. kmitání (neboli kmity, oscilace). Několik příkladů **mechanických kmitavých pohybů** je znázorněno na obr. 6.1. Tělesa nebo systémy těles se přitom pohybují kolem rovnovážných poloh. Kromě mechanických kmitů jsou důležité kmity elektrických systémů — **elektrické oscilace**. Dva příklady jsou naznačeny v obr. 6.2.

Oscilátory jsou tělesa nebo soustavy těles, která mohou vykonávat kmity, nebo v nichž mohou probíhat kmitavé pohyby. Nauka o kmitech tvoří rozsáhlé odvětví mechaniky a nauky o elektromagnetismu. Zde se omezíme na vyšetření jednoduchých oscilačních systémů a jejich základních zákonitostí, které se uplatňují nejen při kmitání makroskopických soustav — strojních mechanismů, elektrických obvodů, nýbrž i v jevech molekulárních, světelných atd.

- Cíl:**
- I) Umět z paměti veličiny a definice uvedené v rámečcích.
 - II) Samostatně řešit příklady uvedené v textu, řešení zdůvodnit a nakreslit náčrtky.

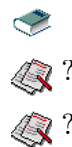
Třídění kmitů:

- periodické (obr. 6.1a, b, c, e, f, h, k)
 - harmonické, $x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha)$ obr. 6.1a, b, c, f, h - při malých výchylkách a malém tlumení (odst. 6.1.2), obr. 6.1e, při malém tlumení,
 - obecné (obr. 6.1k; při velkých výchylkách i kmity v obr. 6.1a, b, c),
- neperiodické (obr. 6.1d, i, j; vznikají často složením několika kmitů, viz odst. 6.5).

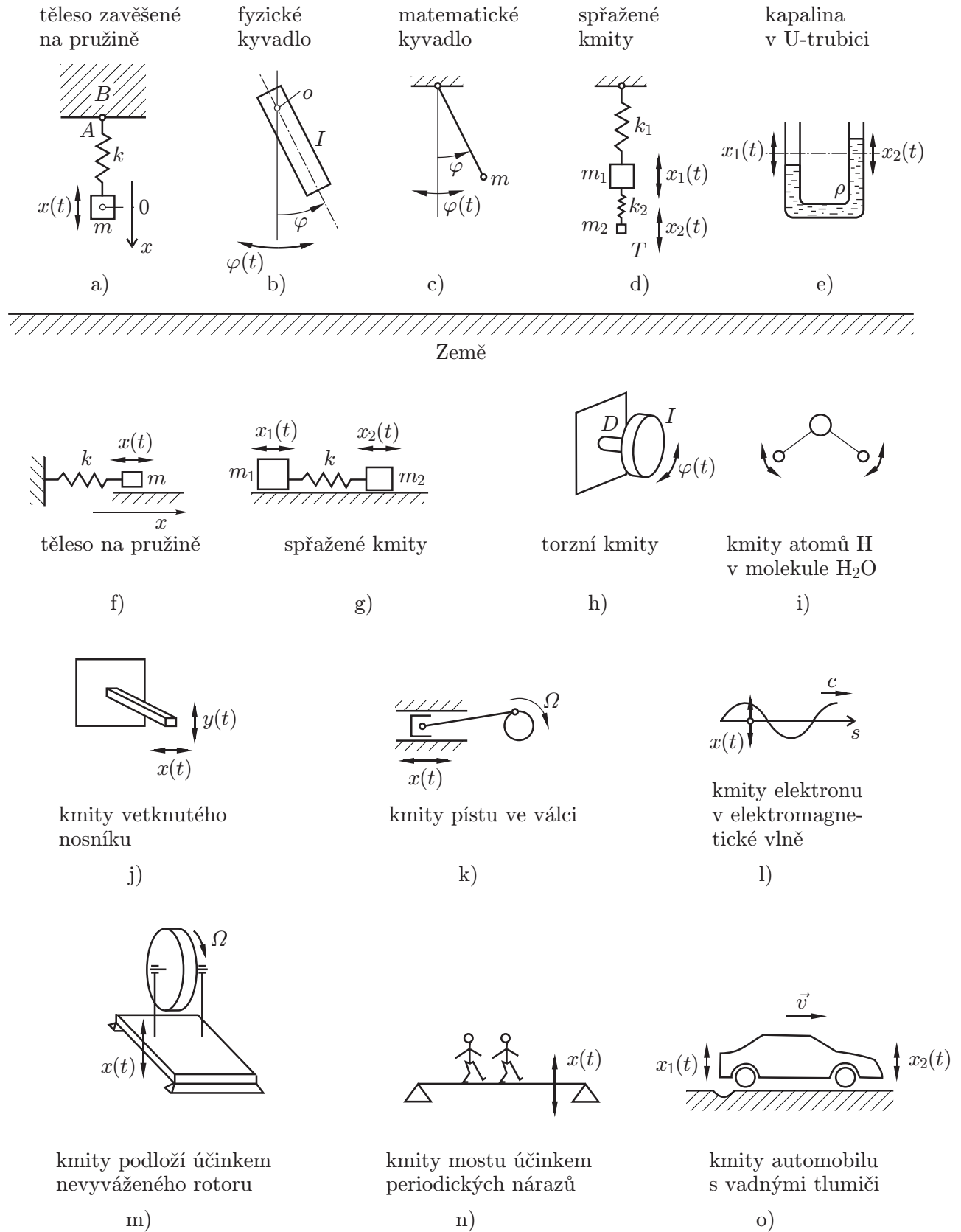
Z uvedených kmitavých pohybů budeme probírat pouze **kmity harmonické** a **kmity vzniklé složením dvou nebo několika harmonických kmitavých pohybů**. Takto vzniklé kmity mohou být opět harmonické nebo mohou mít složitější průběh.

Harmonické kmity mají mezi kmitavými pohyby význačné postavení:

1. Pružné kmity soustav, které mají jeden stupeň volnosti (jejich poloha je zcela určena jedinou veličinou — např. výchylkou (obr. 6.1a, f), úhlem (obr. 6.1h) atd.), mají v případě velmi malých kmitů téměř vždy přibližně sinusový průběh. Přibližně sinusový průběh mají většinou i malé kmity jiných soustav (obr. 6.1b, c, e).
2. Výchylku při libovolném periodickém kmitavém pohybu lze vyjádřit jako součet výchylek početného množství harmonických pohybů. (Viz Fourierova analýza v matematice).



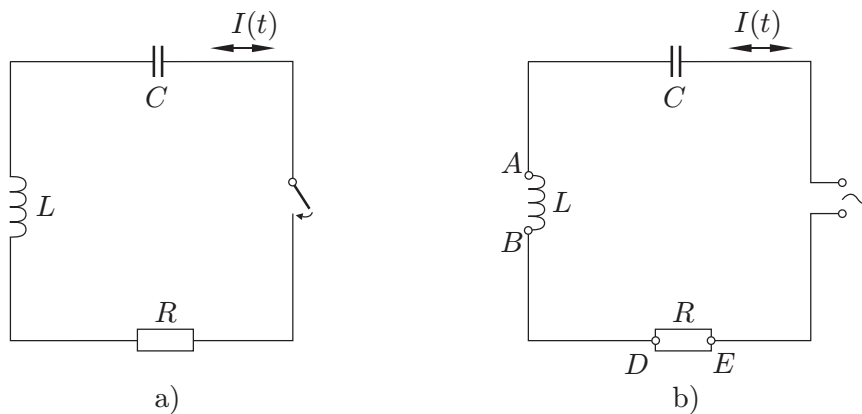
6.1. HLAVNÍ VLASTNOSTI KMITAVÝCH POHYBŮ



{obrkmít.1-1}

Obr. 6.1

6.1. HLAVNÍ VLASTNOSTI KMITAVÝCH POHYBŮ



Obr. 6.2

6.1.1.1 Perioda T a frekvence f (nebo ν) periodických kmitů.

Periodické jsou ty kmity, které se opakují po určitém časovém intervalu. Veličina, která popisuje periodický děj — např. výchylka (obr. 6.1a) nebo úhlová dráha (obr. 6.1h) nebo proud (obr. 6.2), je periodickou funkcí času. Označíme-li tuto funkci obecně F , platí pro všechna t

$$F(t + T) = F(t),$$

kde T je perioda pohybu. Její jednotkou je 1 s. Frekvence kmitů f (nebo ν) je definována takto: Vykona-li periodicky se pohybující systém celistvý počet kmitů n za dobu t , je frekvence f (nebo ν) definována vztahem

$$f = \frac{n}{t}.$$

Číselně se f rovná počtu kmitů za jednotku doby. Jednotka frekvence f je $1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hertz} = 1 \text{ Hz}$. Za dobu $t = T$, tj. za jednu periodu, vykoná soustava jeden kmit, $n = 1$. Dosazením plyne $fT = 1$, tj.

$$f = \frac{1}{T}. \quad \text{vztah mezi frekvencí a periodou kmitů} \quad (6.1)$$

Třídění harmonických kmitů:

- vlastní (obr. 6.1a, b, c, e, f, h; 6.2a)
 - netlumené (zanedbatelně malé odpory, odst. 6.3.1, odst. 6.3.2)
 - tlumené (odpory nelze zanedbat, odst. 6.3.3)
- nucené (obr. 6.1m, n, 6.2b — nebudeme probírat)

Vlastní harmonické kmity se vyznačují tím, že v oscilující soustavě působí buď jen vnitřní síly nebo i vnější síly, které se stávají periodické až při pohybu oscilátoru. Např. na obr. 6.1a působí těleso B v bodě A na pružinu při pohybu tělesa T periodickou silou. Tato síla nekoná práci, takže do oscilátoru se nepřivádí z okolí energie. Pro vlastní kmity je charakteristické to, že frekvenci pohybu (a tedy i frekvenci působící síly) si určuje oscilátor sám, tj. že frekvence závisí pouze na vlastnostech oscilátoru (na setrvačných a pružných vlastnostech v obr. 6.1a; na elektrických vlastnostech v obr. 6.2a).

6.1. HLAVNÍ VLASTNOSTI KMITAVÝCH POHYBŮ

Nucené harmonické kmity se vyznačují tím, že na oscilátor působí (kromě jiných sil) vnější periodická síla (nebo otáčivý moment) s nějakou frekvencí, která je zcela nezávislá na vlastnostech oscilátoru. Tato síla se nazývá **budící síla** a koná (obecně) nenulovou práci. Oscilátor kmitá (po odeznění přechodového jevu) s frekvencí rovnou frekvenci budící síly. To je pro nucené harmonické kmity charakteristické. Nucené kmity jsou znázorněny v obr. 6.1k, m, n. Nebudeme je však probírat, jejich popis je např. v [1].



6.1.2 Harmonické kmity (harmonický pohyb)

6.1.2.1 Definice harmonických kmitů

Harmonické kmity jsou takové periodické kmity, při nichž charakteristická veličina — např. výchylka $x(t)$ (obr. 6.1a), tj. souřadnice, nebo úhel $\varphi(t)$ (obr. 6.1b) atd. — je funkcí času, kterou lze vyjádřit ve tvaru



{kmit.1-2}
{ram-128}

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \alpha), \quad \text{výchylka při harmonickém pohybu} \quad (6.2)$$

kde x_m , ω , α jsou konstanty. **Význam veličin** $x(t)$, x_m , ω , α , $\omega t + \alpha$:

$x(t)$ se nazývá **výchylka**. V případě obr. 6.1a je to souřadnice oscilujícího tělesa (hmotného bodu). V případě na obr. 6.1b je to orientovaný úhel $\varphi(t)$ (tj. úhlová dráha). V případě na obr. 6.2a je to proud $I(t)$, počítaný kladně v jednom (zvoleném) směru a záporně ve směru opačném.

x_m se nazývá **amplituda** nebo přesněji amplituda výchylky, což je veličina na čase nezávislá a nezáporná. Volí se tedy vždy $x_m > 0$. Je to maximální hodnota výchylky. Značí se také A .

ω se nazývá **úhlová frekvence**. Funkce $x(t) = x_m \cos t$ má periodu $T = 2\pi$. Funkce $x(t) = x_m \cos \omega t$, a tedy i funkce (6.2), má periodu T danou vztahem $\omega T = 2\pi$. Odtud a ze vztahu (6.1) plyne

{kmit.1-3}
{ram-129}

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad \text{úhlová frekvence kmitů} \quad (6.3)$$

Jednotka ω : $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

$\omega t + \alpha$ se nazývá **fáze** harmonického pohybu. S rostoucím časem fáze rovnoměrně roste. Označuje se někdy $\varphi(t) = \omega t + \alpha$. Jednotka: 1 rad.

α se nazývá **počáteční fáze** nebo **fázová konstanta**. Je to hodnota fáze $\omega t + \alpha$ pro $t = 0$.

Detailnější srovnání tzv. „k“lasického oscilátoru, kterému je věnován tento text, a „k“vantového mechanického oscilátoru najde pokročilý student na straně v textu Kvantová mechanika pomalu a těžce, ale radostně.

{kmit.5.1-119}

KP 6-1

Těleso vykonává podél osy Ox harmonický pohyb o výchylce $x(t) = 0,02 \cos(600t - 2)$ [SI]. Určete: 1. Největší a nejmenší hodnotu výchylky; 2. Úhlovou frekvenci; 3. Frekvenci; 4. Periodu; 5. Fázovou konstantu; 6. Fázi pohybu v okamžiku $t_1 = 0,01$ s.

Řešení:

6.1. HLAVNÍ VLASTNOSTI KMITAVÝCH POHYBŮ

1. $x_{\max} = x_m = 0,02 \text{ m}$, $x_{\min} = -x_m = -0,02 \text{ m}$;
2. $\omega = 600 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$;
3. $f = \omega/2\pi = 95,5 \text{ Hz}$;
4. $T = f^{-1} = 0,01 \text{ s}$;
5. $\alpha = -2 \text{ rad}$;
6. $\varphi(t_1) = 600t_1 - 2 = 4 \text{ rad}$.

Různá vyjádření harmonických kmitů:

1. Harmonický pohyb podle rovnice (6.2) lze vždy vyjádřit i ve tvaru

{kmit.1-4}

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \beta) \quad \text{možné vyjádření harmonického pohybu} \quad (6.4)$$

{ram-130}

a naopak, každý pohyb (6.4) lze vyjádřit ve tvaru (6.2). Stačí zvolit $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

2. Harmonický pohyb (6.2) lze rovněž vyjádřit ve tvaru

{kmit.1-5}

$$x(t) = A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t \quad \text{možné vyjádření harmonického pohybu} \quad (6.5)$$

{ram-131}

a naopak. Stačí, aby byly splněny vztahy $A_1 = x_m \cos \alpha$, $A_2 = x_m \sin \alpha$.

3. Harmonický pohyb (6.2) lze také vyjádřit ve tvaru

{kmit.1-5a}

$$x(t) = \widehat{C}_1 e^{i\omega t} + \widehat{C}_2 e^{-i\omega t}, \quad \text{možné vyjádření harmonického pohybu} \quad (6.6)$$

{ram-132}

kde \widehat{C}_1 a \widehat{C}_2 jsou komplexní konstanty¹.

{ } **KP 6-2** _____

Těleso vykonává podél osy Ox harmonický pohyb o výchylce $x(t) = 0,005 \cos(-5t + 1)$ [SI].
Úkoly:

1. Napište vztah pro výchylku ve tvaru (6.2) a určete
 - a) x_m ,
 - b) ω ,
 - c) f ,
 - d) α ,
 - e) fázi v okamžiku $t_1 = 0,1 \text{ s}$;

2. Napište vztah pro výchylku ve tvaru (6.5) a určete hodnotu konstant A_1 , A_2 .

¹Vztah $e^{i\omega t}$ lze podle Moivroy věty rozepsat na součet $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$. Pokuste se úpravami dokázat, že všechny tři výše uvedené vztahy pro matematický popis harmonického pohybu jsou ekvivalentní.

6.1. HLAVNÍ VLASTNOSTI KMITAVÝCH POHYBŮ

Řešení:

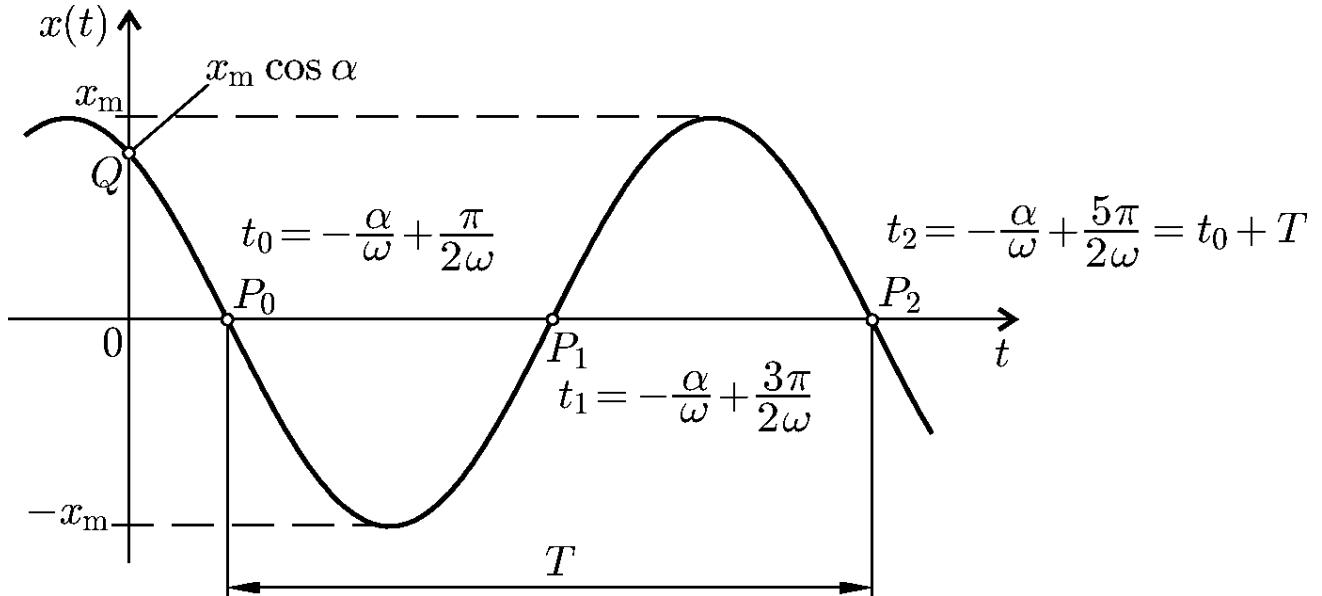
- $x(t) = 0,005 \cos(-5t + 1) = 0,005 \cos(5t - 1) = 0,005 \sin(5t - 1 + \pi/2)$ [SI]
 - $x_m = 0,005$ m; b) $\omega = 5$ rads⁻¹; c) $f = \omega/2\pi = 0,796$ Hz; d) $\alpha = -1$ rad; e) $\varphi(t_1) = (5t_1 - 1)$ rad = -0,5 rad.
- $x(t) = 0,005 \cos(-5t + 1) = 0,005 \cos(5t - 1) = 0,005(\cos(5t) \cos 1 + \sin(5t) \sin 1) = A_1 \cos 5t + A_2 \sin 5t$, kde $A_1 = 0,005 \cdot \cos 1 = 0,0027$ m, $A_2 = 0,005 \cdot \sin 1 = 0,0042$ m.

Grafické znázornění harmonických kmitů v diagramu t, x .

Grafem funkce $x(t) = x_m \cos(\omega t + \alpha)$ v soustavě pravoúhlých os Otx je kosinusovka o amplitudě x_m posunutá v závislosti na konstantě α (obr. 6.3). Vyznačené body na ose t jsou $P_0, P_1, P_2 \dots$ (tj. $x = 0$), pro něž tak platí

$$\omega t_n + \alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \Rightarrow t_n = -\frac{\alpha}{\omega} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega}, \text{ kde } n = 0, 1, 2, \dots$$

Na obr. 6.3 je rovněž znázorněn bod Q na ose x (tj. pro $t = 0$) $x_Q = x(t = 0) = x_m \cos \alpha$.



Obr. 6.3

Grafické znázornění harmonických kmitů fázovým vektorem nebo, což je totéž, pohybem po kružnici.

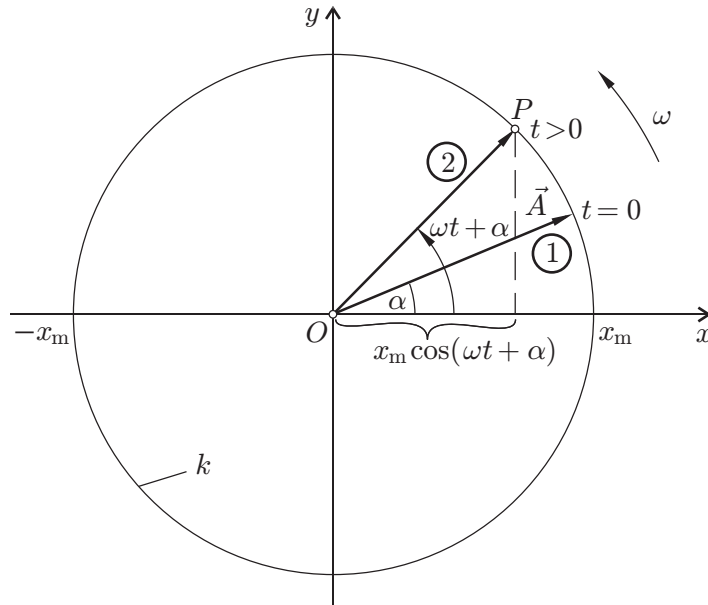
Harmonické kmity o výchylce $x(t) = x_m \cos(\omega t + \alpha)$ znázorníme vektorem \vec{A} o velikosti $|\vec{A}| = x_m$, rotujícím kolem počátku O úhlovou rychlostí ω ve směru naznačeném na obr. 6.4. V okamžiku $t = 0$ je \vec{A} v poloze 1, v okamžiku $t > 0$ je v poloze 2, neboť za dobu t opíše úhel ωt . Jeho koncový bod P se pohybuje rovnoměrně po kružnici k a má x -ovou souřadnici

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \alpha). \quad (6.7)$$

Výsledek:

Výchylky harmonického pohybu dané rovnicí (6.7) jsou rovny průmětům vektoru \vec{A} do osy Ox . Vektor \vec{A} se nazývá fázový vektor, krátce „fázor“. V diagramu na obr. 6.4 se obvykle zakresluje (kromě os) jen vektor \vec{A} v poloze $t = 0$. Kružnice a další polohy vektoru \vec{A} se nezakreslují.





Obr. 6.4

6.2 Lineární harmonický oscilátor

6.2.0.2 Rychlost a zrychlení lineárního harmonického oscilátoru

Lineární harmonický oscilátor je hmotný bod (těleso), který koná harmonické kmity na přímce (obr. 6.5). Zvolíme ji za osu Ox a budeme pro jednoduchost předpokládat, že výchylka je dána vztahem

$$x(t) = x_m \sin \omega t. \quad (6.8)$$

Polohový vektor $\vec{r}(t)$ oscilátoru leží v ose Ox , takže i jeho rychlost $\vec{v}(t)$ a zrychlení $\vec{a}(t)$ leží v ose Ox . Platí:

polohový vektor

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x_m \sin \omega t, \quad \begin{array}{l} \text{polohový vektor} \\ \text{harmonického oscilátoru} \end{array} \quad (6.9)$$

rychlost

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{i}A\omega \cos \omega t = \vec{i}x_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad \begin{array}{l} \text{rychlost} \\ \text{harmonického oscilátoru} \end{array} \quad (6.10)$$

zrychlení

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\vec{i}A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 \vec{r}(t) = -\vec{i}A\omega^2 \sin \omega t = \vec{i}A\omega^2 \sin(\omega t + \pi). \quad \begin{array}{l} \text{zrychlení har-} \\ \text{monického oscilátoru} \end{array} \quad (6.11)$$

6.2. LINEÁRNÍ HARMONICKÝ OSCILÁTOR

Průměty vektorů $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ do osy Ox , tj. veličiny $v_x(t)$, $a_x(t)$, se obvykle nazývají (poněkud nepřesně) rovněž rychlost a zrychlení a označují se $v(t)$, $a(t)$. Při tomto označení platí pro harmonický pohyb (6.8):

$$\{\text{kmit.1-7a}\} \quad v_x(t) = v(t) = A\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (6.12)$$

$$\{\text{kmit.1-7b}\} \quad a_x(t) = a(t) = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x. \quad (6.13)$$

Vektory $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ jsou v několika polohách oscilátoru vyznačeny v obr. 6.5.

6.2.0.3 Fázový posuv

O dvou harmonických pohybech o stejných frekvencích říkáme, že jsou navzájem fázově posunuty, jestliže pro jejich fázové konstanty α_1 , α_2 platí $\alpha_2 \neq \alpha_1$. Je-li $\alpha_2 - \alpha_1 = k2\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, říkáme, že oba pohyby jsou ve fázi. Je-li $\alpha_2 - \alpha_1 = (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, říkáme, že pohyby mají opačné fáze. Veličina $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ je fázový posuv druhého pohybu proti prvnímu. Je-li $\Delta\alpha$ ve vztahu $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$ kladné, říkáme, že druhý pohyb fázově předbíhá před prvním o $\Delta\alpha$.

Ze vztahů (6.12) a (6.13) respektive z předešlých vztahů pro rychlost a zrychlení plyne, že zrychlení $a_x(t)$ předbíhá před $v_x(t)$ o $\pi/2$ a před $x(t)$ o π .

6.2.0.4 Diferenciální rovnice harmonického pohybu

Nechť hmotný bod, konající harmonický pohyb znázorněný na obr. 6.5, má výchylku danou funkcí

$$\{\text{kmit.1-8}\} \quad x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (6.14)$$

Dvojím derivováním podle času t dostaneme $d^2x(t)/dt^2 = -A\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x(t)$. Platí tedy

$$\{\text{kmit.1-9}\} \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0. \quad \text{diferenciální rovnice harmonického pohybu} \quad (6.15)$$

{ram-136}

Každá rovnice, vyjadřující vztah mezi derivacemi nějaké funkce $F(t)$ (a většinou také onou funkcí samotnou), se nazývá diferenciální rovnice pro funkci $F(t)$. Rovnice (6.15) je diferenciální rovnice pro funkci (6.14). Nazývá se **diferenciální rovnice harmonického pohybu**. Každá funkce, která vyhovuje identicky (tj. pro všechna t určitého oboru) rovnici (6.15), se nazývá jejím řešením. Je zřejmé, že funkce (6.14) je řešením rovnice (6.15), ať jsou x_m a α jakékoliv konstanty. Naopak lze dokázat, že každé řešení rovnice (6.15) lze napsat (při vhodné volbě konstant x_m , α) ve tvaru (6.14).

6.2.0.5 Síly působící na lineární harmonický oscilátor

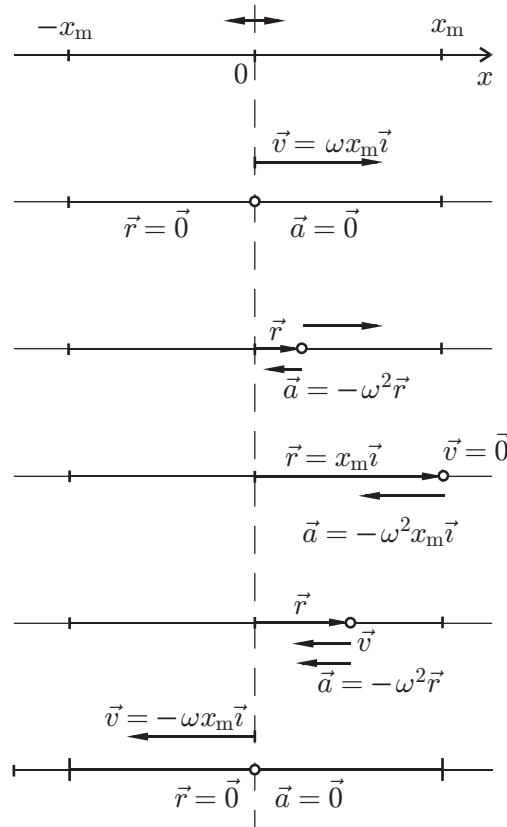
Na hmotný bod, který harmonicky kmitá na přímce, musí působit síly. Ať je tato síla jedna nebo ať jich je několik (obr. 6.6), pro jejich výslednici \vec{F}_v platí vždy (viz odstavec 2.4.2 pojednávající o druhém Newtonově pohybovém zákoně vyjádřeném rovnicí 2.36)

$$\vec{F}_v = m \vec{a},$$

kde \vec{a} je (zde proměnné) zrychlení hmotného bodu. Je-li polohový vektor

$$\{\text{kmit.1-10}\} \quad \vec{r}(t) = \vec{x}_m \sin(\omega t + \alpha), \quad (6.16)$$

6.2. LINEÁRNÍ HARMONICKÝ OSCILÁTOR



Obr. 6.5

je pak zrychlení dle rovnice 2.7

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \dots = -\omega^2 \vec{r}(t) \quad \begin{array}{l} \text{výsledné zrychlení} \\ \text{lineárního harmonického oscilátoru} \end{array} \quad (6.17)$$

{ram-137}

(obr. 6.6), takže platí

$$\vec{F}_v(\vec{r}) = -m\omega^2 \vec{r}(t) \Rightarrow F_{v,x}(x) = -m\omega^2 x. \quad \begin{array}{l} \text{výslednice sil působící} \\ \text{na lineární harmonický oscilátor} \end{array} \quad (6.18)$$

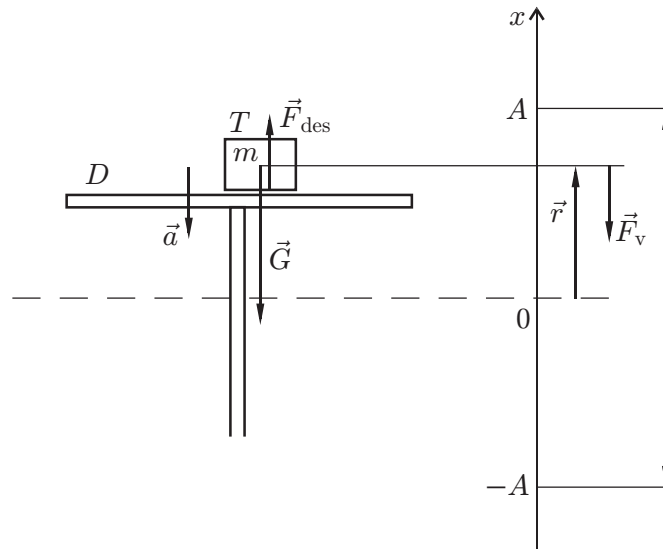
{ram-138}

Vlastnosti síly \vec{F}_v :

1. V rovnovážné poloze je \vec{F}_v rovna nule, jinde vždy míří do rovnovážné polohy (plyne z rovnice (6.18));
2. Velikost síly \vec{F}_v je úměrná výchylce (rovnice (6.18)).

{ } **KP 6-3** —————

Na obr. 6.6 je znázorněno těleso T o hmotnosti m na vodorovné desce D , která vykonává ve svislém směru harmonické kmity dané rovnicí (6.16). Na těleso působí dvě síly: tíha \vec{G} a síla



Obr. 6.6

\vec{F}_{des} od desky. Jejich výslednice $\vec{F}_v = \vec{G} + \vec{F}_{\text{des}}$ splňuje vztahy (6.18). Klademe-li si otázku, jaká je síla \vec{F}_{des} od desky, dostaneme

$$\vec{F}_{\text{des}} = \vec{F}_v - \vec{G} = -m\omega^2\vec{r} - m\vec{g},$$

a odsud

$$F_{\text{des},x}(t) = F_{v,x}(t) - G_x = -m\omega^2x(t) + G = -m\omega^2x_m \sin(\omega t + \alpha) + mg.$$

Síla $\vec{F}_{\text{des}}(t)$ se tedy periodicky mění v čase. Pokud platí $\omega^2x_m < g$, je vždy $F_{\text{des},x}(t) > 0$, tj. síla $\vec{F}_{\text{des}}(t)$ míří stále (tj. pro všechna t) vzhůru. Těleso může na desce ležet, nemusí být připoutáno. Platí-li však $\omega^2x_m > g$, je v některých časových intervalech $F_{\text{des},x}(t) < 0$, tj. $\vec{F}_{\text{des}}(t)$ v nich míří dolů. Těleso musí být k desce připevněno, jinak by odskakovalo a nekonalo by harmonický pohyb s deskou.

Kdyby na těleso nepůsobila tíhová síla, byla by síla $\vec{F}_{\text{des}}(t)$ dána vztahem $\vec{F}_{\text{des}}(t) = m\vec{a}(t) = -m\omega^2\vec{r}(t)$.

6.3 Vlastní kmity mechanických oscilátorů

6.3.1 Netlumené kmity tělesa na pružině

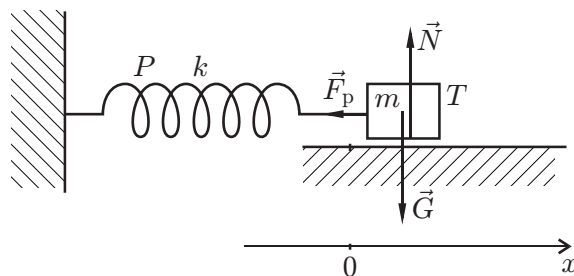
6.3.1.1 Těleso na pružině

Velmi jednoduchým příkladem lineárního harmonického oscilátoru, který koná vlastní kmity, je soustava skládající se z tělesa T a z pružiny P , k níž je těleso připevněno podle obr. 6.7. Je-li těleso vychýleno z rovnovážné polohy a puštěno, začne kmitat. Vodorovné uspořádání je uvažováno proto, aby se tíhová síla kompenzovala se silou od podložky a rozbor děje se zjednodušil.

O soustavě na obr. 6.7 budeme předpokládat:



6.3. VLASTNÍ KMITY MECHANICKÝCH OSCILÁTORŮ



Obr. 6.7

{obrkm1.1-7}

1. Pružina je ideální v tom smyslu, že splňuje Hookův zákon, tedy že její protažení a zkrácení je úměrné velikosti síly, která na ni působí — platí $F \sim l$. Dále, že pružina je dokonale pružná a že její hmotnost je zanedbatelně malá.
2. Podložka, na níž těleso leží, je dokonale hladká, tj. tření je nulové. Dále, že odpor vzduchu i vnitřní tření v pružině jsou zanedbatelně malá.

Uvažovaná soustava je modelem skutečných oscilátorů — oscilujících částic v pružných vlnách v látkách, elektronů v atomech, iontů v krystalech, atd.

6.3.1.2 Diferenciální rovnice kmitů

Dokážeme, že uvažovaný systém může vykonávat harmonické kmity a to tak, že napíšeme pohybovou rovnici pro těleso T a upravíme ji do tvaru diferenciální rovnice (6.15).

Zavedeme osu Ox podle obr. 6.7. Je-li m hmotnost tělesa T , zní jeho pohybová rovnice

{kmit.1-12}

$$m\vec{a} = \vec{F}_v, \quad (6.19)$$

kde \vec{a} je zrychlení tělesa, tj. $\vec{a}(t) = d^2\vec{r}(t)/dt^2$, přičemž $\vec{r}(t)$ je jeho polohový vektor, a kde \vec{F}_v je výslednice všech sil, které na těleso působí. Platí

$$\vec{F}_v = \vec{F}_p + \vec{G} + \vec{R}.$$

Zde je \vec{F}_p síla od pružiny, $\vec{F}_p = -k\vec{r}$, kde k je tuhost pružiny definovaná vztahem

$$k = \frac{\text{velikost síly působící na pružinu}}{\text{protažení (zkrácení) pružiny}} = \frac{F}{\Delta l}, \quad \text{tuhost pružiny}$$

{ram-139}

\vec{G} je tíhová síla působící na těleso, \vec{R} je síla od podložky. Podle předpokladu je tření zanedbatelné, takže \vec{R} je svislá. Ježto svislá složka zrychlení tělesa je rovna nule, platí $\vec{R} = -\vec{G}$.

Pohybovou rovnici (6.19) postupně upravíme:

$$m\vec{a} = \vec{F}_p, \quad m\vec{a} = -k\vec{r}, \quad ma_x(t) = -kx(t), \quad m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0.$$

Zde $x(t)$ je (zatím neznámá) funkce času, udávající souřadnici tělesa T , tj. jeho výchylku. Z předešlého vyplývá, že tato neznámá funkce vyhovuje diferenciální rovnici $d^2x(t)/dt^2 + (k/m)x(t) = 0$, tj. rovnici

{kmit.1-13a}

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2x(t) = 0, \quad \text{což lze přepsat jako: } \ddot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0, \quad (6.20)$$

6.3. VLASTNÍ KMITY MECHANICKÝCH OSCILÁTORŮ

kde

{kmit.1-13b}

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad \text{úhlová frekvence kmitů tělesa na pružině} \quad (6.21)$$

{ram-140}

Pohyb tělesa na pružině:

Ze srovnání rovnic (6.20) a (6.15) plyne, že výchylka $x(t)$ tělesa na pružině vyhovuje diferenciální rovnici harmonického pohybu. Těleso T tedy vykonává (pokud není v klidu) harmonické kmity o výchylce

{kmit.1-14}

$$x(t) = x_m \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right), \quad \text{výchylka tělesa na pružině} \quad (6.22)$$

{ram-141}

kde x_m a α jsou libovolné konstanty, jejichž hodnota závisí v konkrétním případě na počátečních podmínkách, tj. na tom, jakou výchylku a jakou rychlost mělo těleso v okamžiku $t = 0$ s.

Poznámky: —————

1. Frekvence kmitů nezávisí na amplitudě, závisí jen na pružných a setrvačných vlastnostech oscilátoru. Není-li však pružina ideální, např. neplatí-li pro ni Hookův zákon, frekvence kmitů na amplitudě závisí.

2. Lze dokázat, že kmitá-li těleso zavěšené na pružině v tíhovém poli, je ω opět dáno vztahem (6.21), tj. nezávisí na tíhovém zrychlení.

{kmit.5.1-123}

KP 6-4 —————

Těleso o hmotnosti $m = 3$ kg, upevněné k ideální pružině podle obr. 6.7, bylo vnější vodorovnou silou o velikosti $F = 45$ N vychýleno z rovnovážné polohy o 40 mm a pak v okamžiku $t = 0$ s uvolněno s nulovou počáteční rychlostí, takže začalo kmitat. Zanedbejte tření a odpory a řešte úkoly: 1. Zdůvodněte, proč kmity tělesa jsou harmonické; 2. Určete tuhost pružiny; 3. Napište vztah pro výchylku ve tvaru $x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha)$ a určete hodnoty veličin x_m , ω , α , f , T .

Řešení:

1. Postupem uvedeným v předešlém odstavci lze odvodit rovnici (6.20). Každé její netriviální řešení lze napsat ve tvaru (6.22). Kmity tělesa jsou tedy harmonické.

2. Tuhost k je definována vztahem $k = F/\Delta l$, tedy $k = 45 \text{ N}/0,04 \text{ m} = 1\,125 \text{ N m}^{-1}$.

3. $x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha)$, kde $x_m = 0,04 \text{ m}$, $\omega = \sqrt{k/m} = 19,4 \text{ rad s}^{-1}$.

Určení α : pro $t = 0$ s je $x(0) = x_m$, tedy $x_m \sin(\omega \cdot 0 + \alpha) = x_m \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{19,4}{2\pi} = 3,09 \text{ s}^{-1}, \quad T = f^{-1} = 0,32 \text{ s}.$$

6.3.1.3 Energie harmonického oscilátoru

Kmitající harmonický oscilátor, naznačený na obr. 6.7, má energii pohybovou (kinetickou) E_k , jejímž nositelem je těleso T , a pružnou (elastickou) E_p , jejíž nositelkou je pružina P . Při pohybu probíhají trvale přeměny $E_k \leftrightarrow E_p$. Je-li $x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha)$, je

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2x_m^2 \cos^2(\omega t + \alpha),$$



6.3. VLASTNÍ KMITY MECHANICKÝCH OSCILÁTORŮ

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \alpha).$$

Celková mechanická energie oscilátoru $E_m = E_k(t) + E_p(t)$ zůstává stálá. Sečtením² totiž dostaneme

$$\{kmit.1-15a\} \quad E_m = E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \cos^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \alpha), \quad (6.23)$$

což dává po dosazení

$$\{kmit.1-15\} \quad E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2. \quad \begin{array}{l} \text{celková mechanická energie} \\ \text{harmonického oscilátoru} \end{array} \quad (6.24)$$

{ram-142}

Vidíme, že celková energie harmonického oscilátoru, jehož výchylka se mění podle rovnice 6.22, je v čase konstantní veličina.

Poznámky: _____

1. Zcela analogické vztahy platí i pro energii jiných harmonických oscilátorů. Zejména je důležitý obecně platný vztah $E_m \sim \omega x_m^2$.

2. Kmitá-li na ideální pružině těleso tak, že je na ní zavěšeno v tíhovém poli, je energie tohoto oscilátoru rovna součtu $E_m = E_k + E_p + E_G$, kde $E_G = mgh$ je tíhová energie. Opět platí $E_k + E_p + E_G = \text{konst.}$

3. Mechanická energie skutečných oscilátorů, kterým se nepřivádí energie, trvale klesá a mění se v energii neuspořádaného pohybu molekul (tj. ve vnitřní energii) oscilátoru a jeho okolí.

4. Uvedeného oscilátoru (tělesa na pružině) lze užít k určení hmotnosti m tělesa T dynamickou metodou: změříme-li k a ω , vypočítáme $m = k/\omega^2$.

{ } **KP 6-5** _____

Těleso o hmotnosti $m = 0,8$ kg připevněné k pružině podle obr. 6.7, koná kmity o výchylce $x(t) = 0,05 \cos(40t - 6)$ [SI]. Určete: 1. Kinetickou energii oscilátoru jako funkci času; 2. Celkovou energii oscilátoru.

Řešení:

$$1. E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [-\sin(\omega t + \alpha)]^2. \text{ Dosazení } E_k = \frac{1}{2} 0,8 40^2 0,05^2 \sin^2(40t - 6) = 1,6 \sin^2(40t - 6) \text{ J;}$$

$$2. E_m = E_{k,\max} = 1,6 \text{ J.}$$

6.3.2 Fyzické a matematické kyvadlo:

ickeKyvadlo}

Co je fyzické kyvadlo?

Fyzické kyvadlo je každé těleso, které volně kmitá v tíhovém poli kolem osy, jež neprochází jeho hmotným středem (obr. 6.8). Osa otáčení je ve většině příkladů vodorovná. Zde budeme předpokládat, že je vodorovná. Je-li těleso v klidu v rovnovážné poloze, je jeho hmotný střed C pod osou otáčení. Vychýlíme-li je z rovnovážné polohy a uvolníme s nulovou rychlostí, vrátí se vlivem otáčivého momentu tíhových sil, které působí v celém jeho objemu, do rovnovážné polohy³. Jeho počáteční polohová energie se postupně mění v kinetickou. Ta dosáhne maximální hodnoty při průchodu tělesa rovnovážnou polohou. Těleso projde setrvačností na opačnou stranu



²A uvědomíme-li si, že $\omega^2 = k/m$.

³Pohybová rovnice tuhého tělesa rotujícího kolem pevné osy je popsán v odstavci 2.10.3 tohoto textu.

6.3. VLASTNÍ KMITY MECHANICKÝCH OSCILÁTORŮ

rovnovážné polohy, kde je jeho pohyb bržděn otáčivým momentem tíhových sil. Těleso ztrácí kinetickou energii a získává potenciální, nakonec se na okamžik zastaví v nejvyšší poloze a pak se začne vracet. Opět přejde rovnovážnou polohu atd. — těleso kmitá.



6.3.2.1 Diferenciální rovnice fyzického kyvadla:



Dokážeme, že kmity fyzického kyvadla jsou harmonické, jsou-li splněny tyto předpoklady:

1. Tíhové pole je homogenní;
2. Amplituda úhlové výchylky φ_m je tak malá, že platí $\sin \varphi(t) \doteq \varphi(t)$;
3. Síly tření a odpory jsou zanedbatelně malé.

Diferenciální rovnici pro výchylku $\varphi(t)$, která je funkcí času, odvodíme tak, že

- napíšeme pohybovou rovnici kyvadla (pohyb je otáčivý!),
- pohybovou rovnici upravíme do tvaru (6.15), tj. do tvaru diferenciální rovnice harmonického pohybu (tento příklad jsme již řešili viz KP 2.10-6). Označíme:

I moment setrvačnosti (definován např. v odst. 2.9.6 a rovnice (2.149) tohoto hypertextu) kyvadla vzhledem k ose o (viz obr. 6.8).

Definice:

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2,$$

Osu otáčení orientujeme směrem před nákresem, tj. volíme kladný smysl otáčení podle obr. 6.8. Kmitavý pohyb kolem pevné osy o je otáčivý pohyb diskutovaný v odst. 2.10.3, pohybová rovnice (2.179) tedy zní

$$I \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = M_o, \quad \text{pohybová rovnice tuhého tělesa rotujícího kolem pevné osy} \quad (6.25)$$

kde M_o je součet otáčivých momentů tíhových sil $\Delta \vec{G}$ působících na jednotlivé elementy vzhledem k orientované pevné ose o . Tento součet je, jak známo, roven momentu tíhové síly působící na celé těleso, tj. síly \vec{G} , umístěné v těžišti (hmotném středu). Pokud se omezíme na tzv. malé výchylky, tj. $\sin \varphi \doteq \varphi$, pak platí (viz obr. 6.8)

$$M_o = -Gd = -mga \sin \varphi \doteq -mga \varphi.$$

Dosazením do rovnice (6.25) a úpravou dostaneme postupně

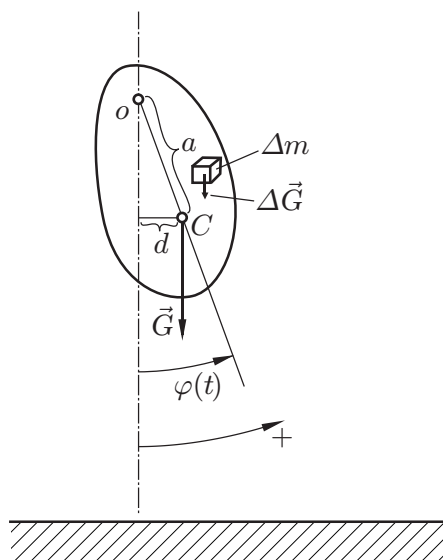
$$I \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -mga \varphi, \quad \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \frac{mga}{I} \varphi(t) = 0, \quad \ddot{\varphi}(t) + \frac{mga}{I} \varphi(t) = 0,$$

tj.

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0, \quad (6.26)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}. \quad \text{úhlová frekvence fyzického kyvadla konajícího malé kmity} \quad (6.27)$$



Obr. 6.8

{obrkm1.1-8}

6.3.2.2 Úhlová výchylka:

Rovnice (6.26) je diferenciální rovnice harmonického pohybu (srovnejte rovnice (6.15)). Za uvedených předpokladů malých kmitů kolem pevné osy vykonává tedy fyzické kyvadlo harmonické kmity o úhlové frekvenci ω dané vztahem (6.27). Úhlová výchylka je dána vztahem

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin \left(\sqrt{\frac{mga}{I}} t + \alpha \right), \quad \begin{array}{l} \text{úhlová výchylka tuhého tělesa} \\ \text{konajícího malé kmity} \end{array} \quad (6.28)$$

{ram-145}

kde φ_m je (nezáporná) amplituda úhlové výchylky, α je počáteční fáze pohybu. Obě určíme z počátečních podmínek, tj. ze znalosti $\varphi(0) = \varphi_0$ a $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$.

Poznámky: —————

1. Za uvedených podmínek je frekvence oscilátoru nezávislá na amplitudě φ_m . Je-li φ_m tak velké, že $\sin \varphi_m \doteq \varphi_m$, diferenciální rovnice (6.26) obsahuje ve druhém členu namísto veličiny φ funkci $\sin \varphi$. Vzniklá rovnice je složitější. Frekvence pak závisí i na φ_m .

2. Odvozených zákonitostí lze užít k experimentálnímu určení libovolného (tj. i nepravidelného) tělesa vzhledem k libovolné přímce: z tělesa vytvoříme fyzické kyvadlo, změříme m , a , ω (g známe) a ze vztahu (6.27) určíme I .

{ } KP 6-6 —————

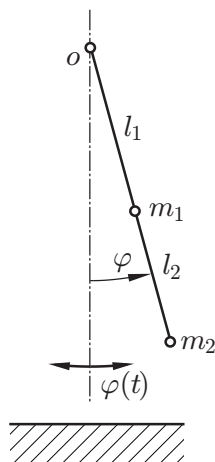
Fyzické kyvadlo je tvořeno tyčí se zanedbatelnou hmotností, na níž jsou podle obr. 6.9 upevněna dvě malá tělesa (hmotné body) o hmotnostech $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 0,4$ kg, přičemž $l_1 = 0,6$ m, $l_2 = 0,8$ m. Tyč koná malé netlumené kmity v homogenním tíhovém poli ($g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$) kolem vodorovné osy o ; Určete: 1. Moment setrvačnosti soustavy vzhledem k ose o ; 2. Polohu těžiště, tj. veličinu a ; 3. Periodu malých kmitů.

Řešení:

$$1. I = m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2)^2 = \dots = 1,504 \text{ kg m}^2;$$

$$2. a(m_1 + m_2) = m_1 l_1 + m_2 (l_1 + l_2) \Rightarrow a = \dots = 0,733 \text{ m};$$

6.3. VLASTNÍ KMITY MECHANICKÝCH OSCILÁTORŮ



Obr. 6.9

{obrkm1.1-9}

$$3. \omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}, \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} = \dots = 1,84 \text{ s.}$$

Doporučení: Vypočítejte hodnotu výrazu $(m_1 + m_2)a^2$ a srovnajte ji s I , Zjistíte, že $I \neq (m_1 + m_2)a^2$.

6.3.2.3 Matematické kyvadlo:

Matematické kyvadlo se skládá z malého tělíska (hmotného bodu) a z vlákna se zanedbatelnou hmotností, na kterém je tělíska zavěšeno a kmitá v tíhovém poli kolem rovnovážné polohy ve svislé rovině (obr. 6.10). Je zvláštním, jednoduchým případem fyzického kyvadla. Označíme-li délku vlákna l a hmotnost tělíska m , je úhlová frekvence malých kmitů (tj. $\sin \varphi_m \doteq \varphi_m$) matematického kyvadla dána vztahem (6.27), kde $a = l$, $I = ml^2$. Dosazením vychází



{kmit.1-18}

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T} \cdot \begin{array}{l} \text{úhlová frekvence malých kmitů} \\ \text{matematického kyvadla} \end{array} \quad (6.29)$$

{ram-146}

Poznámky: —————

1. Pro matematické kyvadlo platí obecné výsledky získaná pro obecné fyzické kyvadlo.
2. Matematickým kyvadlem, podobně jako fyzickým kyvadlem, lze určit experimentálně velikost tíhového zrychlení: Změří se l , ω a ze vztahu (6.29) se vypočte g .
3. Redukovaná délka L fyzického kyvadla je definována jako délka toho matematického kyvadla, které má stejnou dobu kmitu. Platí pro ni

{RedDelka}

$$\sqrt{\frac{mga}{I}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow L = \frac{I}{ma} \cdot \begin{array}{l} \text{redukovaná délka} \\ \text{fyzického kyvadla} \end{array} \quad (6.30)$$

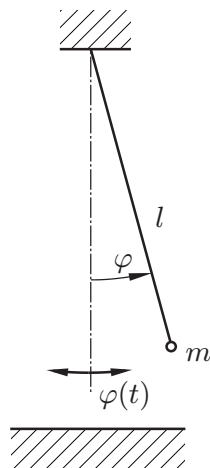
{ram-147}

{ } **KP 6-7** —————

Určete redukovanou délku fyzického kyvadla znázorněného na obr. 6.9.

Řešení:

6.3. VLASTNÍ KMITY MECHANICKÝCH OSCILÁTORŮ



Obr. 6.10

Z definice L a z ní plynoucího vztahu plyne

$$L = \frac{I}{ma} = \frac{1,504 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}{2,4 \text{ kg}\cdot 0,733 \text{ m}} = 0,85 \text{ m}.$$

6.3.3 Tlumené kmity mechanického oscilátoru:

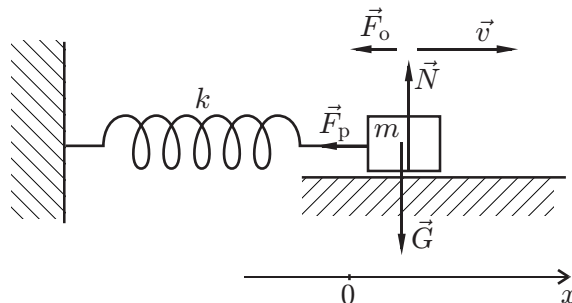
6.3.3.1 Vznik tlumení

Netlumený harmonický oscilátor, uvažovaný v předešlé části, je pouze přibližný model skutečných oscilátorů a představuje první přiblížení skutečnosti. Lepší aproximací skutečných oscilátorů je ideální tlumený oscilátor. U skutečných oscilátorů — tělesa na pružině, fyzického kyvadla atd. — závisí síly odporu na vlastnostech pružiny, vlastnostech okolního prostředí, tvaru oscilátoru atd., obecně složitým způsobem.

Při malých rychlostech oscilátoru má síla odporu \vec{F}_o velmi přibližné tyto vlastnosti: 1. Míří proti směru okamžité rychlosti; 2. Její velikost je úměrná velikosti rychlosti. Platí tedy $\vec{F}_o \sim -\vec{v}$. Tento vztah lze napsat ve tvaru

$$\vec{F}_o = -B\vec{v}, \quad (6.31)$$

kde B je tzv. součinitel odporu, definovaný vztahem $B = F_o/v$. Oscilátor, pro který platí vztah (6.31), budeme nazývat ideální tlumený oscilátor (obr. 6.11).



Obr. 6.11

6.3.3.2 Tlumené kmity tělesa na pružině



Těleso vykonávající tlumené kmity na pružině podle obr. 6.11, přičemž síla odporu \vec{F}_o je dána vztahem (6.31), je příkladem ideálního tlumeného oscilátoru. Při označení užitém dříve (viz obr. 6.7, rovnice (6.19) a další) dostaneme z pohybové rovnice (6.19) úpravou diferenciální rovnici pro výchylku $x(t)$ takto

$$m\vec{a} = \vec{F}_v, \quad \text{kde } \vec{F}_v = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_p + \vec{F}_o = \vec{F}_p + \vec{F}_o, \quad (\vec{G} + \vec{N} = \vec{0})$$

$$ma_x = F_{p,x} + F_{o,x}, \quad m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - Bv_x(t),$$

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0, \quad \text{pohybová rovnice harmonického oscilátoru s odporující silou} \quad (6.32)$$

{ram-148}

tj.

{kmit.1-20a}

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad \ddot{x}(t) + 2\beta \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t), \quad (6.33)$$

kde

{kmit.1-20b}

$$\beta = \frac{B}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.34)$$

Veličina $\beta = B/2m$ se nazývá konstanta útlumu, veličina $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ je tzv. vlastní úhlová frekvence, se kterou by oscilátor kmital, kdyby nebylo sil odporu. Diferenciální rovnice (6.33) se nazývá diferenciální rovnice tlumených kmitů.

6.3.3.3 Výchylka tlumeného oscilátoru

Jsou-li síly odporu relativně malé, a to tak malé, že platí $\beta < \omega_0$, je řešením diferenciální rovnice (6.33) funkce

{kmit.1-21}

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \sin \left(\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)} t + \alpha \right), \quad \text{výchylka tlumeného oscilátoru} \quad (6.35)$$

{ram-149}

kde x_0, α jsou libovolné konstanty. Graf funkce (6.35) je na obr. 6.12. Pohyb je v nepříliš dlouhém časovém intervalu přibližně harmonický. Má úhlovou frekvenci

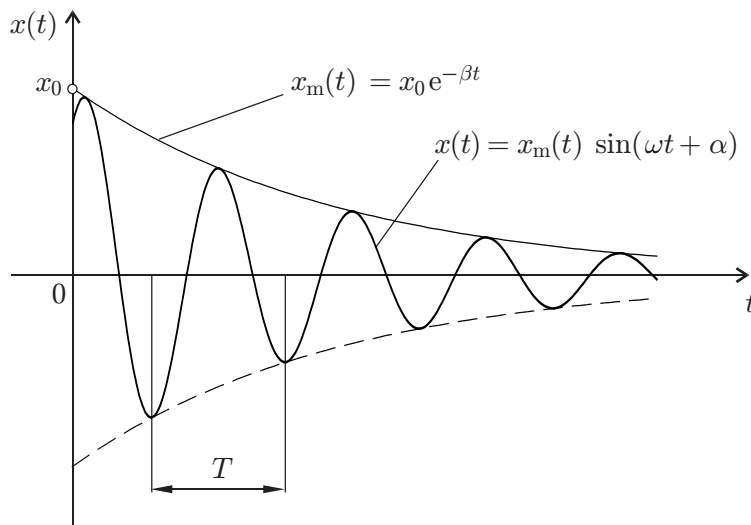
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (\doteq \omega_0 \text{ pro } \beta \ll \omega_0)$$

a okamžitou amplitudu

$$x_m(t) = x_0 e^{-\beta t},$$

kteřá klesá exponenciálně s časem. Důkaz, že funkce (6.35) je řešením diferenciální rovnice (6.33), lze provést dosazením. Není-li splněn vztah $\beta < \omega_0$, tj. není-li tlumení dostatečně malé, systém neosciluje. Vychýlíme-li jej z rovnovážné polohy a uvolníme, vrací se do ní, ale dosáhne jí teoreticky až po nekonečně dlouhém čase. Systém je buď přetlumen ($\beta > \omega_0$) anebo je kriticky tlumen ($\beta = \omega_0$).

Diferenciální rovnicí (6.33), (6.34) se řídí i pohyb jiných tlumených oscilátorů. Proto se nazývá **diferenciální rovnice tlumených kmitů**. Vyhovuje jí např. i úhlová výchylka $\varphi(t)$ při tlumených kmitěch fyzického kyvadla nebo torzního oscilátoru (obr. 6.1h) nebo proud v elektrickém oscilačním obvodu. Jejich časový průběh je dán funkcemi typu (6.35) a je znázorněn křivkami typu křivky na obr. 6.12.



Obr. 6.12

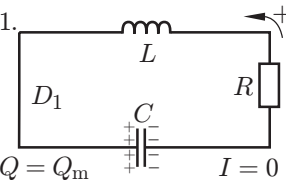
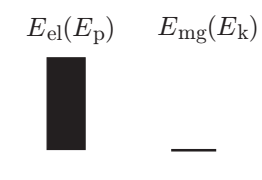
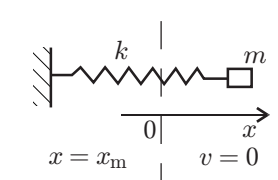
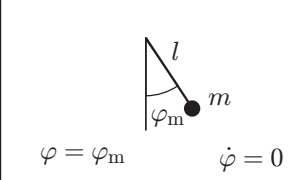
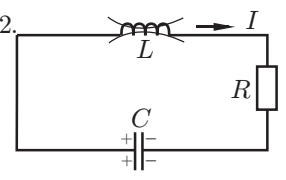

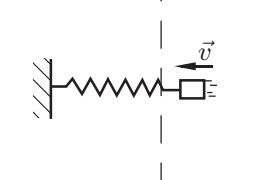

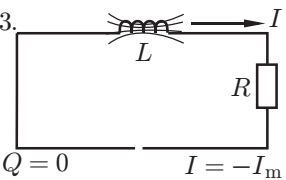

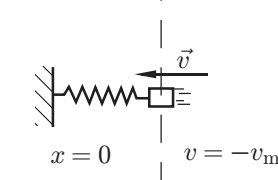
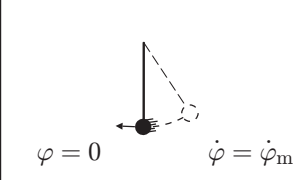
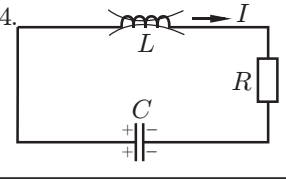
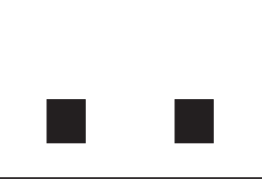
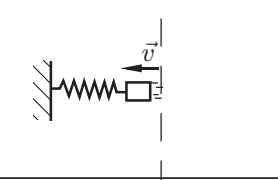
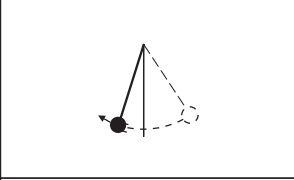
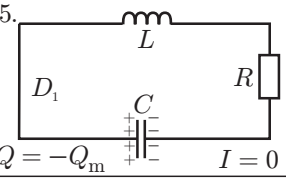

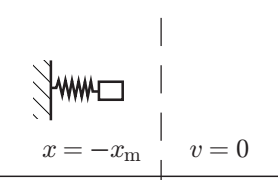
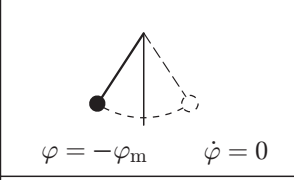
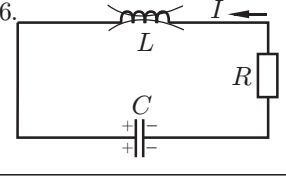
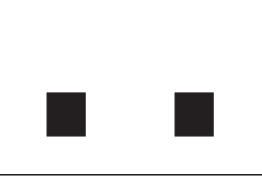
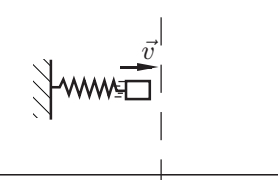
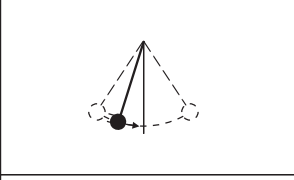
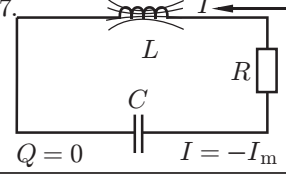

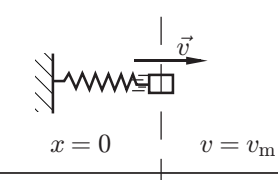
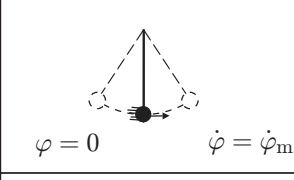
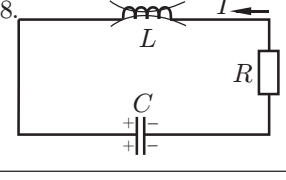
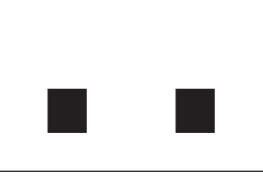
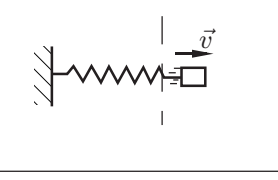
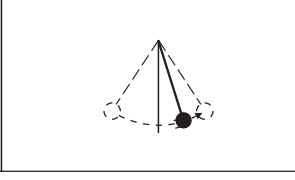
6.4 Netlumený elektrický oscilační obvod

Elektrický systém analogický mechanickému oscilátoru je elektrický obvod znázorněný na obr. 6.2a. Skládá se z kondenzátoru, cívky a vodiče s elektrickým odporem (neboli rezistoru) zařazených do série. Nazývá se obvykle sériový obvod RLC . Proud v obvodu může vzniknout např. tak, že se při rozpojení klíči K nabije kondenzátor a poté se klíč sepne. Kondenzátor se začne vybíjet a v obvodu vznikne proud. Jiný způsob vytvoření proudu spočívá v tom, že umístíme do blízkosti cívky jinou cívku a necháme jí projít proudový impuls. V obvodě se tím indukují elektromotorické napětí a začne jím procházet proud. Ukážeme, že tento proud má (při nepřilíš velkém R) oscilační průběh.

Fyzikální příčina vzniku oscilací je znázorněna na obr. 6.13e, v němž jsou vyznačeny jednotlivé fáze děje. V obr. 6.13b je vyznačena elektrická energie E_{el} a magnetická energie E_{mg} obvodu a současně i potenciální energie E_p a kinetická energie E_k mechanických oscilátorů naznačených v obr. 6.13c, d. V obr. 6.13 je zřejmá analogie mezi elektrickými a mechanickými kmity:

1. **fáze: (obr. 6.13a1)** Kondenzátor je nabit, elektrické pole v něm je mohutné a má energii $E_{el} = E_{el,max}$. Obvodem neprochází proud, $I = 0$, magnetické pole není vytvořeno, tedy $E_{mg} = 0$.
2. **fáze: (obr. 6.13a2)** Kondenzátor se vybíjí, v obvodu vzniká proud a magnetické pole v cívce. E_{el} klesá, E_{mg} roste. Při vzrůstu magnetického pole se v cívce indukují elektromotorické napětí ε_i , které brzdí nárůst proudu.
3. **fáze: (obr. 6.13a3)** Kondenzátor je zcela vybit, $E_{el} = 0$. Magnetická energie je tedy maximální, $E_{mg} = E_{mg,max}$. Cívkou prochází maximální proud. V následujícím okamžiku začne (dosud narůstající) magnetický indukční tok cívkou klesat. Tedy je $d\Phi_B/dt = 0$, tj. $\varepsilon_i = 0$.
4. **fáze: (obr. 6.13a4)** Proud klesá. Je udržován elektrickými silami indukovaného elektrického pole v cívce, které (podle Lenzova pravidla) posiluje klesající proud. Kondenzátor se znovu nabíjí, tentokrát s opačnou polaritou. E_{el} roste, E_{mg} klesá.
5. **fáze: (obr. 6.13a5)** Kondenzátor je maximálně nabit, $E_{el} = E_{el,max}$. Obvodem neprochází proud, $E_{mg} = 0$.

6.4. NETLUMENÝ ELEKTRICKÝ OSCILAČNÍ OBVOD

a) obvod RLC	b) energie	c) těleso na pružině	d) matematické kyvadlo
1.  $Q = Q_m$ $I = 0$	$E_{el}(E_p)$ $E_{mg}(E_k)$ 	 $x = x_m$ $v = 0$	 $\varphi = \varphi_m$ $\dot{\varphi} = 0$
2. 			
3.  $Q = 0$ $I = -I_m$		 $x = 0$ $v = -v_m$	 $\varphi = 0$ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_m$
4. 			
5.  $Q = -Q_m$ $I = 0$		 $x = -x_m$ $v = 0$	 $\varphi = -\varphi_m$ $\dot{\varphi} = 0$
6. 			
7.  $Q = 0$ $I = -I_m$		 $x = 0$ $v = v_m$	 $\varphi = 0$ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_m$
8. 			

brkmit.1-13}

Obr. 6.13

6.4. NETLUMENÝ ELEKTRICKÝ OSCILAČNÍ OBVOD

Od tohoto okamžiku začne probíhat děj podobný předešlému — kondenzátor se znovu vybíjí, roste proud v opačném směru atd. — až se obvod vrátí do stavu 1. Děj se pak opakuje jako celek.

Přitom se v rezistoru trvale vyvíjí teplo, energie elektromagnetického pole klesá, mění se trvale v energii neuspořádaného tepelného pohybu molekul. Je-li $R = 0$, nedochází k ohmickým ztrátám, celková elektromagnetická energie je (téměř) konstantní.

Proč „téměř“ konstantní?

Protože při oscilacích proudu a elektromagnetického pole vznikají elektromagnetické vlny, které se šíří z obvodu a odnášejí část elektromagnetické energie. Obvod vyzařuje. Ztráty vyzařováním jsou však při nízkých frekvencích oscilací ($f < 10^5$ Hz) zanedbatelně malé. Při vysokých frekvencích je však třeba s nimi počítat.

6.4.0.4 Diferenciální rovnice kmitů v sériovém obvodě RLC

V této části budeme zkoumat průběh proudu v obvodě znázorněném na obr. 6.13a.

Hlavní výsledky jsou:

1. Funkce času, udávající proud $I(t)$ v obvodě RLC na obr. 6.13a, vyhovuje diferenciální rovnici (6.40), tj. diferenciální rovnici tlumených kmitů.
2. V obvodě na obr. 6.13a vznikají tlumené proudové kmity — proud mění periodicky směr. Funkce udávající proud je dána vztahem (6.41).
3. V ideálním dokonale vodivém obvodě ($R = 0$) vznikají netlumené kmity o frekvenci f dané vztahem (6.44).

K provedení důkazu platnosti uvedených výsledků stačí odvodit diferenciální rovnici (6.39). Další tvrzení z ní vyplývají.

Orientujeme obvod podle obr. 6.13a a označíme $I(t)$ (časově proměnný) proud v obvodě a $Q(t)$ (časově proměnný) náboj na desce D_1 . Při průchodu proudu celková energie E elektromagnetického pole v obvodě trvale klesá a mění se v Jouleovo teplo s výkonem $P_z = RI^2$, kde R je odpor celého obvodu. Je-li C kapacita kondenzátoru a L indukčnost cívky, je

$$E = E_{\text{el}} + E_{\text{mg}}, \text{ kde } E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C}, \quad E_{\text{mg}} = \frac{1}{2} LI^2(t).$$

Jsou-li ztráty energie způsobené vyzařováním zanedbatelně malé ($f < 10^5$ Hz), plyne ze zákona zachování a přeměny energie vztah

{kmit.1-22}

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} LI^2(t) \right) = RI^2(t). \quad (6.36)$$

Provedeme-li derivaci na levé straně (derivujeme složené funkce!), dostaneme

{kmit.1-23}

$$-\frac{Q(t)}{C} \frac{dQ(t)}{dt} - LI(t) \frac{dI(t)}{dt} = RI^2(t). \quad (6.37)$$

Při orientaci obvodu podle obr. 6.13a platí $dQ = Idt$, tj. $dQ/dt = I(t)$. Užijeme-li tohoto vztahu v rovnici (6.37), dostaneme pro netriviální řešení ($I \neq 0$) vztah

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0.$$

6.4. NETLUMENÝ ELEKTRICKÝ OSCILAČNÍ OBVOD

Užijeme znovu vztah $I(t) = dQ/dt$ a nahradíme $I(t)$ veličinou $Q(t)$. Dostaneme rovnici

$$\{kmit.1-24a\} \quad L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = 0, \quad L \ddot{Q}(t) + R \dot{Q}(t) + \frac{1}{C} Q(t) = 0. \quad (6.38)$$

Tuto rovnici znovu zderivujeme podle času a po dosazení $I(t) = dQ/dt$ získáme diferenciální rovnici tlumených kmitů v obvodě RLC :

$$\{kmit.1-24b\} \quad L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0, \quad L \ddot{I}(t) + R \dot{I}(t) + \frac{1}{C} I(t) = 0. \quad \begin{array}{l} \text{diferenciální rovnice} \\ \text{tlumených kmitů v obvodě } RLC \end{array} \quad (6.39)$$

Když tuto rovnici (6.39) vydělíme veličinou L , pak zavedením označení $\beta = R/2L$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$ dostaneme pro funkci $I(t)$ diferenciální rovnici

$$\{kmit.1-25\} \quad \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0, \quad \ddot{I}(t) + 2\beta \dot{I}(t) + \omega_0^2 I(t) = 0, \quad (6.40)$$

kde

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Stejnou rovnici dostaneme z rovnice (6.38) pro funkci $Q(t)$. Rovnice (6.40) je shodná s rovnicí (6.33) pro tlumený kmitavý pohyb. Je-li $\beta < \omega_0$, je jejím řešením obdoba funkce (6.35), tj. funkce

$$\{kmit.1-26\} \quad I(t) = I_0 e^{-\beta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \alpha), \quad \text{tlumené kmity proudu v obvodu } RLC \quad (6.41)$$

(viz diskuze rovnice (6.35)). V obvodu RLC vznikají tlumené kmity (proudu), jejichž průběh je znázorněn v obr. 6.12.

6.4.0.5 Dokonale vodivý obvod LC ($R = 0$)

Diferenciální rovnici pro funkci $Q(t)$ udávající náboj a pro funkci $I(t)$ udávající proud dostaneme z rovnic (6.38), (6.39) dosazením $R = 0$. Výslednou diferenciální rovnici uvedeme pro srovnání současně s rovnicemi pro pohyb tělesa na pružině a pro pohyb fyzického kyvadla, v níž označíme moment setrvačnosti J , aby nedocházelo v tomto případě k záměně s označením časové závislosti proudu $I(t)$:

$$\{kmit.1.1-6\} \quad \begin{array}{l|l|l|l} \text{diferenciální rovnice} & \text{obecný tvar} & \omega_0 & \text{odpovídá si} \\ L \ddot{Q}(t) + \frac{1}{C} Q(t) = 0 & & \omega_0 = 1/\sqrt{LC} & L \quad 1/C \\ L \ddot{I}(t) + \frac{1}{C} I(t) = 0 & \ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 & \omega_0 = 1/\sqrt{LC} & L \quad 1/C \\ m \ddot{x}(t) + kx(t) = 0 & & \omega_0 = \sqrt{k/m} & m \quad k \\ J \ddot{\varphi}(t) + mga\varphi(t) = 0 & & \omega_0 = \sqrt{mga/J} & J \quad mga \end{array} \quad (6.42)$$

V ideálním oscilačním obvodě ($R = 0$) vznikají netlumené harmonické kmity náboje a proudu. Např. funkce $I(t)$ je dána vztahem

$$\{kmit.1-27a\} \quad I(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (6.43)$$

kde

{kmit.1-27b}

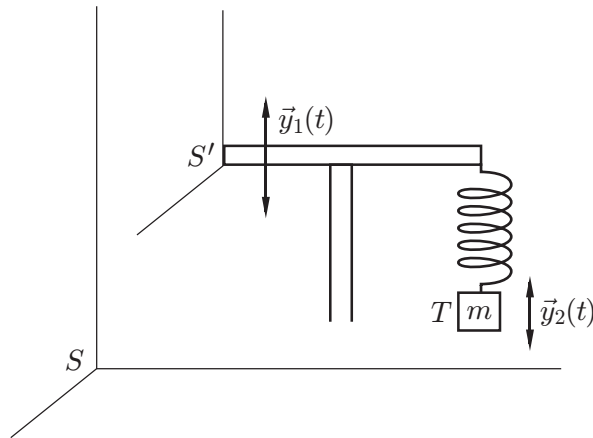
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \text{Thomsonův vztah} \quad (6.44)$$

Rovnice (6.44) se nazývá Thomsonův vztah.

6.5 Skládání kmitů

{nářadí kmitů}

V této části budeme vyšetřovat pohyb tělesa, které koná současně dva kmitavé pohyby. Co značí výrok „koná současně dva kmitavé pohyby“, je znázorněno v obr. 6.14. Těleso T koná kmity ve svislém směru na pružině upevněné na desce, která sama koná kmitavý pohyb ve svislém směru. Je-li $\vec{y}_1(t)$ funkce času, která udává výchylku desky ve vztahné soustavě S spojené se



Obr. 6.14

{brkmit.1-14}

Zemí, a je-li $\vec{y}_2(t)$ funkce udávající výchylku tělesa T ve vztahné soustavě S' spojené s deskou, pak výchylka tělesa T v soustavě S je dána funkcí $\vec{u}(t)$, danou vztahem

{kmit.1-28}

$$\vec{u}(t) = \vec{y}_1(t) + \vec{y}_2(t) \quad \text{skládání kmitavých pohybů} \quad (6.45)$$

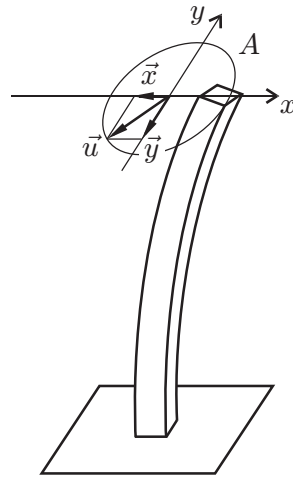
{ram-150}

a říkáme, že těleso T koná kmitavý pohyb složený ze dvou kmitavých pohybů o výchylkách $\vec{y}_1(t)$, $\vec{y}_2(t)$.

V uvedeném příkladě měly oba skládané pohyby stejný směr. Na obr. 6.15 je znázorněno skládání kmitavých pohybů navzájem kolmých. Konec pružné tyče (bod A) koná současně dva kmitavé pohyby. Je-li $\vec{x}(t)$ funkce udávající jeho výchylku při kmitání ve směru osy Ox a $\vec{y}(t)$ funkce udávající jeho výchylku ve směru osy Oy , pak jeho výsledná výchylka je opět dána vztahem (6.45). Trajektorie bodu A je (přibližně) rovinná křivka. Na obr. 6.16 jsou znázorněny tzv. spřažené oscilátory. Nebudeme vyšetřovat jejich pohyb, uvádíme je jen pro ilustraci skládání kmitavých pohybů. Lze totiž dokázat, že výchylku každého z obou kmitajících těles lze vyjádřit ve tvaru (6.45), kde $\vec{x}_1(t)$ a $\vec{x}_2(t)$ jsou harmonické funkce o jistých frekvencích (které závisí na tuhostech pružin a hmotnostech těles). Každý z oscilátorů tedy vykonává pohyb složený ze dvou stejnosměrných harmonických pohybů.

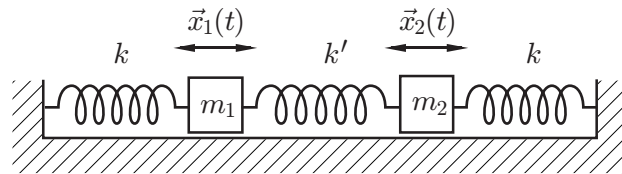


V technická praxi i v teoretických úvahách se nejčastěji vyskytuje skládání harmonických kmitavých pohybů. O skládání harmonických pohybů se hovoří i tehdy, když nějakou jinou veličinu než výchylku lze vyjádřit součtem harmonických funkcí. Např. napětí u_{AB} na svorkách cívky a napětí u_{DE} na svorkách odporu v obr. 6.2b jsou harmonické funkce času. Napětí



Obr. 6.15

u_{AE} je dáno vztahem $u_{AE} = u_{AB} + u_{DE}$, tj. vzniklo složením dvou harmonických „pohybů“. O významu teorie skládání harmonických pohybů svědčí i to, že každý periodický pohyb lze



Obr. 6.16

interpretovat jako pohyb vzniklý složením početného množství harmonických pohybů. Rozбором periodických (i neperiodických) dějů z hlediska jejich vyjádření harmonickými funkcemi se zabývá v matematice tzv. **harmonická analýza**.

V tomto textu se budeme zabývat pouze nejjednoduššími případy skládání harmonických kmitavých pohybů uvedenými v následujícím přehledu, v němž ω_1 a ω_2 jsou úhlové frekvence skládaných pohybů:

- skládané kmity
 - stejnosměrné:
 - * $\omega_1 = \omega_2 \rightarrow$ opět harmonický pohyb,
 - * $\omega_1 \doteq \omega_2$ ($\omega_1 \neq \omega_2$) \rightarrow zázračně,
 - * $\omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow$ obecný pohyb, někdy periodický,
 - navzájem kolmé:
 - * $\omega_1 = \omega_2 \rightarrow$ pohyb po elipse, kružnici, případně přímce,
 - * $\omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow$ obecný pohyb v rovině, někdy periodický (Lissajousovy křivky).

6.5.1 Skládání stejnosměrných harmonických pohybů o stejných frekvencích ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$)

Budeme uvažovat o hmotném bodu, který vykonává současně dva harmonické pohyby o frekvenci $f = \frac{\omega}{2\pi}$ podél osy Ox . Jeho výchylka $x(t)$ je dána vztahem



{kmit.1-29}

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad \begin{array}{l} \text{skládání kmitavých pohybů} \\ \text{podél osy } Ox \end{array} \quad (6.46)$$

{ram-151}

kde $x_1(t) = x_{m,1} \cos(\omega t + \alpha_1)$ a $x_2(t) = x_{m,2} \cos(\omega t + \alpha_2)$. Konstanty $x_{m,1}$, $x_{m,2}$ a α_1 , α_2 jsou amplitudy a fázové konstanty obou harmonických pohybů. Výsledný pohyb hmotného bodu je funkcí (6.46) plně popsán. V dalším provedeme pouze její rozbor a diskuzi. Ukážeme, že funkci (6.46) lze upravit do tvaru

{kmit.1-30}

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \alpha), \quad (6.47)$$

kde x_m a α , jsou vhodné konstanty. To značí: **Pohyb, vzniklý složením dvou stejnosměrných harmonických pohybů o stejných frekvencích, je opět harmonický a má stejnou frekvenci jako skládané pohyby.**

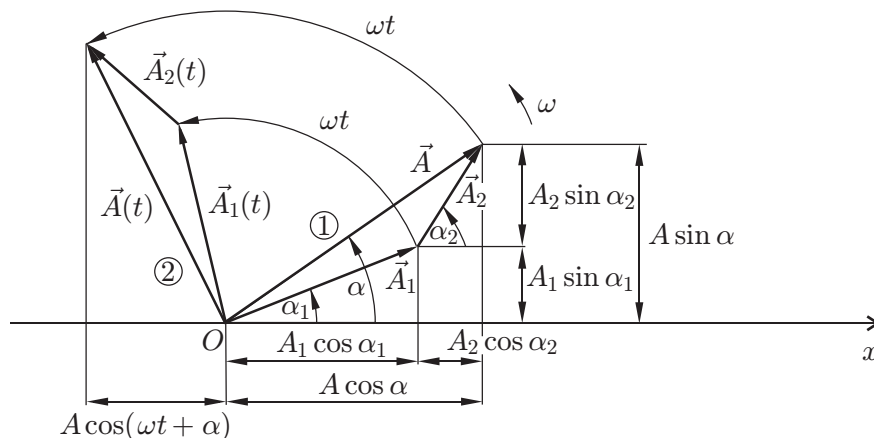
Důkaz lze provést tak, že se funkce (6.46) upraví do tvaru (6.47) s užitím trigonometrických vzorců. My zde však zvolíme postup, při němž uijeme grafického znázornění harmonických pohybů fázovými vektory. Grafické skládání harmonických pohybů (a s tím související užití komplexních funkcí) se totiž ve fyzice i v technické praxi objevuje velmi často, např. při výkladu interference vlnění, v elektrotechnice v teorii střídavých proudů, atd. Tedy osvojení si grafické metody skládání harmonických kmitů je právě tak důležité, jako znalost výsledku (6.47).

Vedeme orientovanou osu Ox podle obr. 6.17. Funkci $x_1(t)$ ve vztahu (6.46) znázorníme fázovým vektorem \vec{A}_1 , funkci $x_2(t)$ fázovým vektorem \vec{A}_2 . Pro $t = 0$ s mají vektory \vec{A}_1 , \vec{A}_2 polohy znázorněné v části označené ①. Průmět vektoru $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ do osy Ox v okamžiku $t = 0$ s je dán vztahem $A_x(0) = A_{1,x}(0) + A_{2,x}(0) = x_{m,1} \cos \alpha_1 + x_{m,2} \cos \alpha_2 = x_1(0) + x_2(0) = x(0)$, tj. je roven výchylce výsledného harmonického pohybu (6.46) v okamžiku $t = 0$ s.

Ježto frekvence skládaných harmonických pohybů jsou stejné, otáčejí se vektory \vec{A}_1, \vec{A}_2 se stejnou úhlovou frekvencí. Trojúhelník daný vektory $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A} (= \vec{A}_1 + \vec{A}_2)$ se tedy otáčí bez změny tvaru (obr. 6.17). V obecném okamžiku $t > 0$ je vektor \vec{A} v poloze ②. Jeho průmět do osy Ox je

$$A_x(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = x_{m,1} \cos(\omega t + \alpha_1) + x_{m,2} \cos(\omega t + \alpha_2) = x_1(t) + x_2(t) = x(t).$$

Hodnota funkce $x(t)$ dané vztahem (6.46) je tedy rovna průmětu rovnoměrně rotujícího vektoru



Obr. 6.17

\vec{A} do osy Ox . Proto lze funkci $x(t)$ vyjádřit ve tvaru (6.47). Hodnoty veličin x_m , α plynou z obr. 6.17 s užitím kosinové věty a definice funkce $\text{tg } \alpha$:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = \sqrt{x_{m,1}^2 + x_{m,2}^2 + 2x_{m,1}x_{m,2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = x_m, \quad (6.48)$$

{kmit.1-31}

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} = \frac{x_{m,1} \sin \alpha_1 + x_{m,2} \sin \alpha_2}{x_{m,1} \cos \alpha_1 + x_{m,2} \cos \alpha_2}. \quad (6.49)$$

Hlavní výsledky:

1. Kmitavý pohyb vzniklý složením dvou stejnosměrných harmonických pohybů o stejných frekvencích je opět harmonický a má stejnou frekvenci jako skládané harmonické pohyby.
2. Amplituda x_m výsledného harmonického ohybu závisí jak na $x_{m,1}$, $x_{m,2}$, tak i na fázovém rozdílu $\alpha_2 - \alpha_1$. Platí

$$|x_{m,2} - x_{m,1}| \leq x_m \leq x_{m,1} + x_{m,2}$$

(obr. 6.18a).

3. Při skládání harmonických pohybů o amplitudách stálé velikosti $x_{m,1}$, $x_{m,2}$ a o různých hodnotách fázového rozdílu $\alpha_2 - \alpha_1$ nabude x_m maximální hodnoty $x_{m,\max}$ tehdy, když vektory \vec{A}_1 , \vec{A}_2 mají stejnou orientaci. Platí

$$x_{m,\max} = x_{m,1} + x_{m,2} \quad \text{pro} \quad \alpha_2 - \alpha_1 = 2n\pi, \quad \text{kde} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Skládané harmonické pohyby mají v tomto případě stejné fáze, tj. jsou ve fázi (obr. 6.18b). Vektor \vec{A} má minimální velikost tehdy, když vektory \vec{A}_1 , \vec{A}_2 míří proti sobě, tj. když skládané harmonické pohyby mají opačné fáze (obr. 6.18c):

$$x_{m,\min} = |x_{m,2} - x_{m,1}| \quad \text{pro} \quad \alpha_2 - \alpha_1 = (2n + 1)\pi, \quad \text{kde} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Je-li v tomto případě navíc $x_{m,1} = x_{m,2}$, je $x_{m,\min} = 0$.

6.5.2 Skládání stejnosměrných harmonických pohybů o různých frekvencích, $\omega_1 \neq \omega_2$.

rmφnásk5t5C}

Nechť hmotný bod vykonává současně (ve smyslu dříve uvedeném) dva stejnosměrné harmonické pohyby o výchylkách



{kmit.1-32a}

$$x_1(t) = x_{m,1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad x_2(t) = x_{m,2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (6.50)$$

takže jeho výchylka $x(t)$ je dána vztahem

{kmit.1-32b}

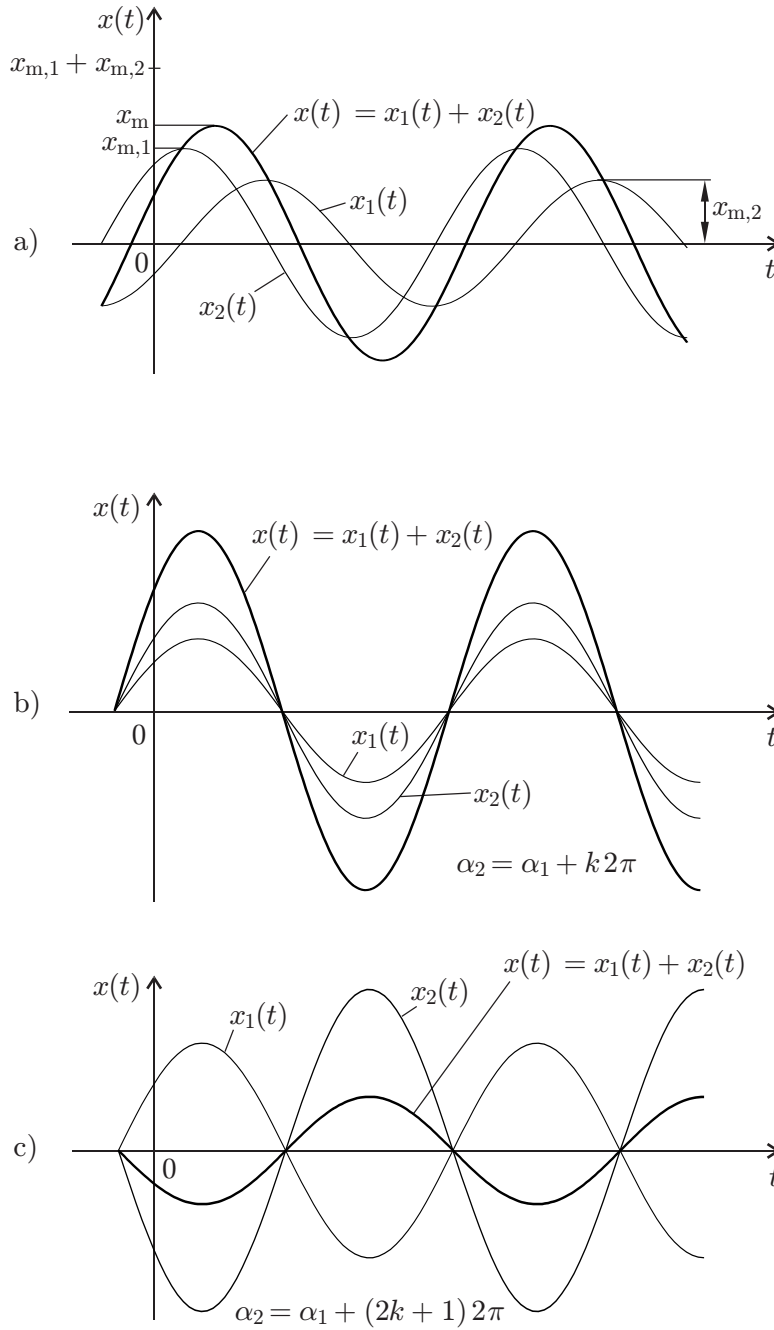
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (6.51)$$

Znázorníme-li harmonické pohyby (6.50) opět fázovými vektory $\vec{A}_1(t)$, $\vec{A}_2(t)$ (obr. 6.17), bude vektor $\vec{A}_1(t)$ rotovat s úhlovou rychlostí ω_1 a vektor $\vec{A}_2(t)$ s jinou úhlovou rychlostí ω_2 . Vektor $\vec{A}(t) = \vec{A}_1(t) + \vec{A}_2(t)$ bude trvale měnit svoji velikost a bude se otáčet nerovnoměrně. Ježto jeho průmět do osy Ox je opět roven $x(t)$, tj. platí $x(t) = A_x(t)$, není funkce $x(t)$ harmonická, tj. nelze ji vyjádřit ve tvaru (6.47). Výsledný pohyb není harmonický a obecně ani periodický.

6.5.2.1 Podmínka periodičnosti

Kdy je pohyb o výchylce $x(t)$, daný vztahy (6.50), (6.51), periodický? Tehdy, když oba vektory $\vec{A}_1(t)$, $\vec{A}_2(t)$ se v některých časech $t_1, t_2, \dots > 0$ dostanou současně do polohy, ve které byly v čase $t = 0$ s. Nejmenší z těchto časů, tedy t_1 , je perioda T složeného pohybu. Během periody

6.5. SKLÁDÁNÍ KMITŮ



{brkmit.1-18}

Obr. 6.18

T musí každý z vektorů vykonat celistvý počet otáček — vektor $\vec{A}_1(t)$ p -otáček a vektor $\vec{A}_2(t)$ q -otáček, kde p, q jsou jistá celá čísla. Platí tedy

$$\omega_1 T = 2\pi p, \omega_2 T = 2\pi q \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}, \frac{f_1}{f_2} = \frac{p}{q}, \frac{T_1}{T_2} = \frac{q}{p}. \quad \text{podmínka periodičnosti} \quad (6.52)$$

{kmit.1-33}

{ram-152}

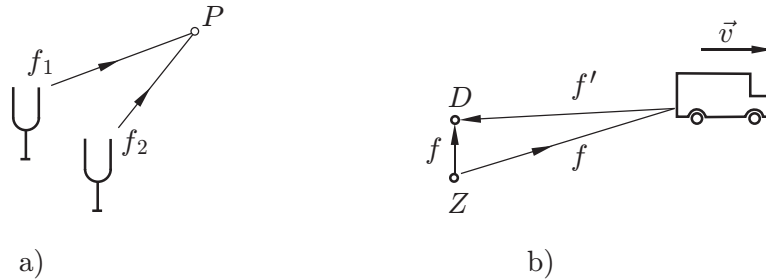
Pohyb složený ze dvou harmonických (a obecně periodických) pohybů je periodický právě tehdy,

6.5. SKLÁDÁNÍ KMITŮ

je-li splněna podmínka (6.52). Podobně lze dokázat, že složením většího počtu harmonických (a obecně periodických) pohybů vznikne periodický pohyb právě tehdy, jsou-li frekvence všech skládaných pohybů v poměru celých čísel, tj. platí-li $f_1 : f_2 : f_3 : \dots = p : q : r : \dots$

6.5.3 Skládání stejnosměrných harmonických pohybů o různých (blízkých) frekvencích, splňujících vztah $\omega_1 \doteq \omega_2$

V obr. 6.19 jsou znázorněny dva děje, při nichž dochází ke skládání harmonických pohybů s frekvencemi mírně se lišícími. V obr. 6.19a jsou znázorněny dvě nepatrně rozladěné ladičky (mohou to být např. i struny). Element vzduchu v bodě P , kterým se šíří současně akustické vlny z obou ladiček, koná současně harmonické kmity s frekvencemi f_1, f_2 splňujícími vztah $f_1 \doteq f_2$. V obr. 6.19b vysílá zdroj Z elektromagnetické vlny o frekvenci f směrem k vozidlu. Jestliže se vozidlo pohybuje směrem ke zdroji nebo od zdroje, detekuje detektor D v odražené vlně frekvenci $f' \neq f$. Složením elektrických kmitů o frekvencích f, f' vzniká kmitání o frekvenci $f_D = |f' - f|$, z níž lze určit rychlost vozidla. Složené kmitání o rozdílové frekvenci $|f' - f|$ se nazývá často **zázněje**.



Obr. 6.19

Vznik záznějů vysvětlíme s užitím fázových vektorů. Budeme zkoumat pohyb o výchylce $x(t)$ dané funkcí

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (6.53)$$

kde

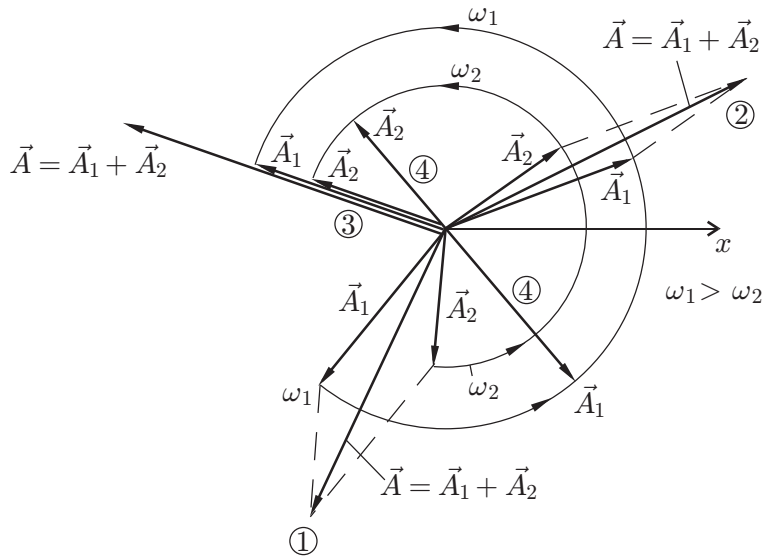
$$x_1(t) = x_{m,1} \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad x_2(t) = x_{m,2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \quad |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2 \quad (6.54)$$

Harmonické pohyby (6.54) znázorníme vektory $\vec{A}_1(t), \vec{A}_2(t)$, které rotují s úhlovými rychlostmi ω_1, ω_2 ve směru naznačeném v obr. 6.20. V části ① jsou vektory $\vec{A}_1(t), \vec{A}_2(t)$ (a jejich vektorový součet $\vec{A}(t) = \vec{A}_1(t) + \vec{A}_2(t)$) zakresleny v okamžiku $t = 0$ s, kdy svírají úhel $|\alpha_1 - \alpha_2|$. Předpokládejme pro určitost, že platí $\omega_1 > \omega_2$. Vektor $\vec{A}_1(t)$ se pak otáčí poněkud rychleji než vektor $\vec{A}_2(t)$ a „dohání“ jej. Úhel $\angle(\vec{A}_1(t), \vec{A}_2(t))$ se zmenšuje (poloha ②). V poloze ③ vektor $\vec{A}_1(t)$ dostihl vektor $\vec{A}_2(t)$. Velikost vektoru $\vec{A}(t)$ postupně vzrůstala a v poloze ③ nabyla největší hodnoty $|\vec{A}|_{\max} = A_1 + A_2 = x_{m,1} + x_{m,2}$. Pak se úhel $\angle(\vec{A}_1(t), \vec{A}_2(t))$ zvětšuje a $|\vec{A}(t)|$ se zmenšuje. V některém pozdějším okamžiku budou vektory $\vec{A}_1(t), \vec{A}_2(t)$ mířit proti sobě a $|\vec{A}(t)|$ bude mít nejmenší možnou hodnotu $|\vec{A}|_{\min} = |A_1 - A_2|$ (poloha ④). Poté bude $|\vec{A}(t)|$ znovu narůstat atd.

Ježto platí $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$ (tj. $\omega_1 \doteq \omega_2$), otáčí se vektor $\vec{A}(t)$ zřejmě téměř rovnoměrně, a to přibližně úhlovou rychlostí $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ($\doteq \omega_1 \doteq \omega_2$). Jeho velikost se pomalu mění tak, že platí $|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$. Jeho průmět do osy Ox (obr. 6.20) je v každém okamžiku roven příslušné hodnotě funkce $x(t)$, dané vztahy (6.53), (6.54).

Výsledný pohyb, popsáný funkcemi (6.53), (6.54), je proto téměř harmonický. Má frekvenci f ($\doteq f_1 \doteq f_2$) a (relativně) pomalu se měnící amplitudu $x_m(t)$, která se mění s jistou frekvencí f_z (a periodou T_z), nazývanou frekvence (perioda) záznějů. Frekvenci f_z určíme takto:

6.5. SKLÁDÁNÍ KMITŮ



Obr. 6.20

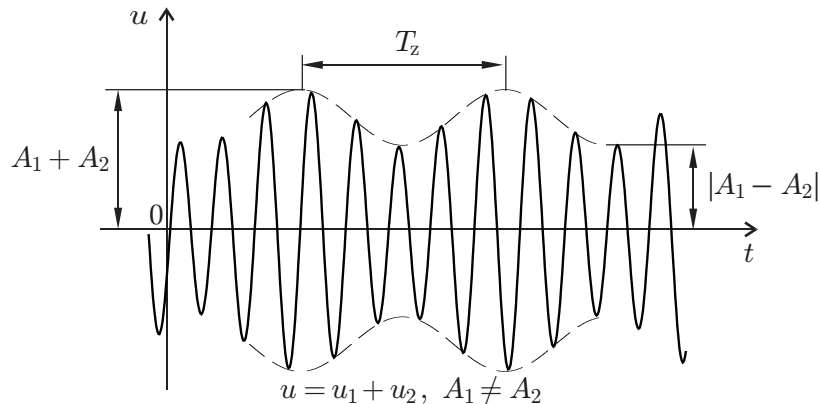
Perioda záznějů T_z je doba, která uplyne mezi jedním překrytím vektorů $\vec{A}_1(t)$, $\vec{A}_2(t)$ (obr. 6.20 poloha ③ $\vec{A}_1(t) \uparrow \vec{A}_2(t)$) a nejbližším dalším překrytím. Za tuto dobu vykoná vektor \vec{A}_1 počet otáček $f_1 T_z$ a vektor \vec{A}_2 počet $f_2 T_z$. Vektor \vec{A}_2 přitom vykoná buď o jednu otáčku méně (při $\omega_1 > \omega_2$) než vektor \vec{A}_1 , nebo o jednu otáčku více (při $\omega_1 < \omega_2$). Odtud plyne

$$|f_1 T_z - f_2 T_z| = 1 \Rightarrow |f_1 - f_2| = \frac{1}{T_z} \Rightarrow f_z = |f_1 - f_2|. \quad \text{frekvence záznějů} \quad (6.55)$$

Hlavní výsledek ———

Funkce daná vztahy (6.53), (6.54) popisuje (téměř) harmonický pohyb o frekvenci $f \doteq f_1 \doteq f_2$ a o amplitudě $x_m(t)$, která se mění relativně pomalu, a to periodicky, s frekvencí $f_z = |f_1 - f_2|$. **Kmitání tohoto typu se nazývá zázněje.**

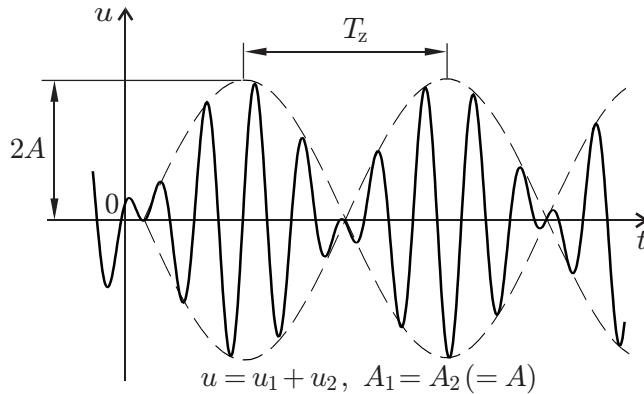
Na obr. 6.21 je znázorněna funkce $x(t)$ (rovnice 6.53) pro případ $A_1 \neq A_2$. Na obr. 6.22 je znázorněna tatáž funkce v případě, že platí $A_1 = A_2$.



Obr. 6.21

Důsledky a užití: Při poslechu dvou mírně rozladěných zvukových zdrojů (ladiček v obr. 6.19a) slyšíme tón o frekvenci přibližně rovné frekvenci obou ladiček. Amplituda kmitů, tj. i intenzita zvuku, kolísá periodicky s frekvencí f_z danou vztahem (6.55). Proto se hovoří o „záznějích“ neboli „rázech“. Zázněje vznikají vždy, když se skládají dva mechanické nebo i elektrické kmity o téměř stejných frekvencích.

Záznějů se využívá při sladování dvou oscilátorů tak, že měníme frekvenci jednoho z nich (nebo obou) a zkoumáme zázněje. Je-li f_z velké, oscilátory jsou silně rozladěny. Pro $f_z \rightarrow 0$ (tj. $T_z \rightarrow \infty$, velmi pomalé zázněje) je $f_2 \rightarrow f_1$.



Obr. 6.22

6.5.4 Skládání harmonických kmitů navzájem kolmých

V technické praxi se někdy setkáváme s pohybem vzniklým složením dvou přímočarých různosměrných kmitavých pohybů. Trajektorie bodu, který vykonává takový pohyb, je rovinná křivka. Základním typem takových pohybů je pohyb vzniklý složením (superpozicí) dvou navzájem kolmých harmonických pohybů. Takovýto pohyb vykonává např. konec nosníku obdélníkového průřezu naznačeného v obr. 6.1.

Vyšetříme uvedený pohyb v případech, že platí buď $\omega_1 = \omega_2$ (tj. frekvence skládaných pohybů jsou stejné) nebo $\omega_1 \neq \omega_2$ a současně $\omega_1 : \omega_2 = p : q$ kde p, q jsou celá čísla.

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$: Zavedeme pravoúhlý souřadnicový systém Oxy tak, že osy Ox, Oy míří ve směru skládaných pohybů (obr. 6.23). Vyšetříme pohyb bodu $P(x, y)$, jehož souřadnice jsou dány vztahy

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha), \quad (6.56)$$

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \beta). \quad (6.57)$$

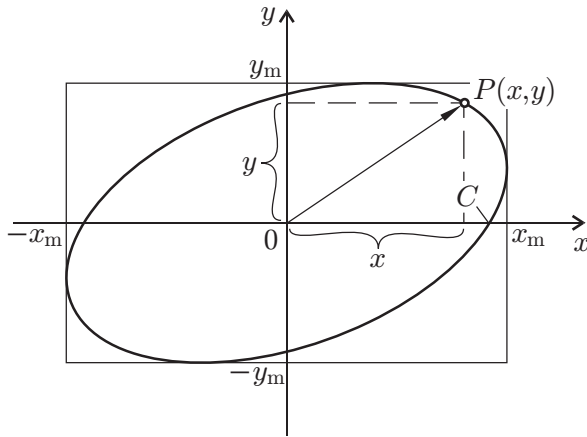
Oscilace mají stejné frekvence, ale mohou se lišit amplitudami a fázemi. Soustava (6.56), (6.57) udává trajektorii bodu P v parametrickém tvaru. Trajektorie leží v obdélníku o stranách délky $2x_m, 2y_m$ se středem v počátku souřadnic. Její tvar určíme z rovnice, kterou získáme vyloučením parametru t . Nejdříve přepíšeme (6.57) do tvaru

$$y(t) = y_m \sin[\omega t + \alpha - (\alpha - \beta)] = y_m \cos(\omega t + \alpha) \sin(\alpha - \beta) - y_m \sin(\omega t + \alpha) \cos(\alpha - \beta). \quad (6.58)$$

Zavedeme veličinu $\delta = \alpha - \beta$ a po dosazení za $\sin(\omega t + \alpha) = x/x_m$ do rovnice (6.58) dostaneme

$$y(t) = y_m \cos(\omega t + \alpha) \sin \delta - y_m \frac{x}{x_m} \cos \delta.$$

6.5. SKLÁDÁNÍ KMITŮ



Obr. 6.23

Pak už nezbývá, než si vzpomenout na vztah $\cos^2(\omega t + \alpha) = 1 - \sin^2(\omega t + \alpha) = 1 - \frac{x^2}{x_m^2}$, pomocí kterého dále horní vztah upravíme na

$$y(x) = y_m \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{x_m^2}\right)} \sin \delta - y_m \frac{x}{x_m} \cos \delta.$$

Což po osamostatnění výrazu s odmocninou a následném umocnění přejde na tvary

$$\frac{y}{y_m} + \frac{x}{x_m} \cos \delta = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{x_m^2}\right)} \sin \delta, \quad (6.59)$$

$$\frac{y^2}{y_m^2} + 2 \frac{y}{y_m} \frac{x}{x_m} \cos \delta + \frac{x^2}{x_m^2} \cos^2 \delta = \sin^2 \delta - \frac{x^2}{x_m^2} \sin^2 \delta.$$

Vynásobením celé rovnice výrazem $x_m^2 y_m^2$

$$x_m^2 y^2 + 2 x_m y_m x y \cos \delta + y_m^2 x^2 \cos^2 \delta = x_m^2 y_m^2 \sin^2 \delta - y_m^2 x^2 \sin^2 \delta.$$

Převedením členu $y_m^2 x^2 \sin^2 \delta$ z pravé strany rovnice na levou získáme po vytknutí

$$x_m^2 y^2 + 2 x_m y_m x y \cos \delta + y_m^2 x^2 (\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) = x_m^2 y_m^2 \sin^2 \delta,$$

což je rovnice

$$x_m^2 y^2 + 2 x_m y_m x y \cos \delta + y_m^2 x^2 = x_m^2 y_m^2 \sin^2 \delta. \quad \begin{array}{l} \text{obecný vztah pro složky} \\ \text{navzájem kolmých} \\ \text{skládaných kmitů} \end{array} \quad (6.60)$$

V dalším provedeme diskuzi této rovnice vzhledem k možným hodnotám fázového posuvu δ a poměru amplitud x_m a y_m (jednotlivé možné dále zmiňované případy jsou pro větší názornost uvedeny v obr. 6.24).

Je-li $\delta = \pm\pi/2$, pak $\cos(\pm\pi/2) = 0$ a zároveň $\sin^2(\pm\pi/2) = 1$ a (6.60) přejde v rovnici elipsy ve středovém tvaru

$$x_m^2 y^2 + y_m^2 x^2 = x_m^2 y_m^2 \rightarrow \frac{y^2}{y_m^2} + \frac{x^2}{x_m^2} = 1, \quad \delta = \pm\pi/2. \quad (6.61)$$

6.5. SKLÁDÁNÍ KMITŮ

Tvar elipsy — délka os, excentricita, sklon i směr oběhu bodu P po ní jsou závislé na velikosti amplitud x_m, y_m a na hodnotě fázové konstanty δ . Uvedený pohyb se někdy nazývá **eliptický harmonický pohyb**.

Jsou-li amplitudy obou kolmých pohybů stejné $x_m = y_m$, dostáváme z (6.61) speciální případ – rovnici kružnice ve středovém tvaru:

$$\text{kmit.1-3604a} \quad x^2 + y^2 = x_m^2, \text{ pro } x_m = y_m \text{ a } \delta = \pm\pi/2. \quad (6.62)$$


Snadno se lze přesvědčit, že v případě, kdy rozdíl jednotlivých počátečních fází bude $\delta = \pi/2$, bude bod P obíhat po kružnici po směru hodinových ručiček (pravotočivý systém oběhu), zatímco pro hodnotu $\delta = 270^\circ$ se bude pohybovat proti směru chodu hodin (levotočivý systém).

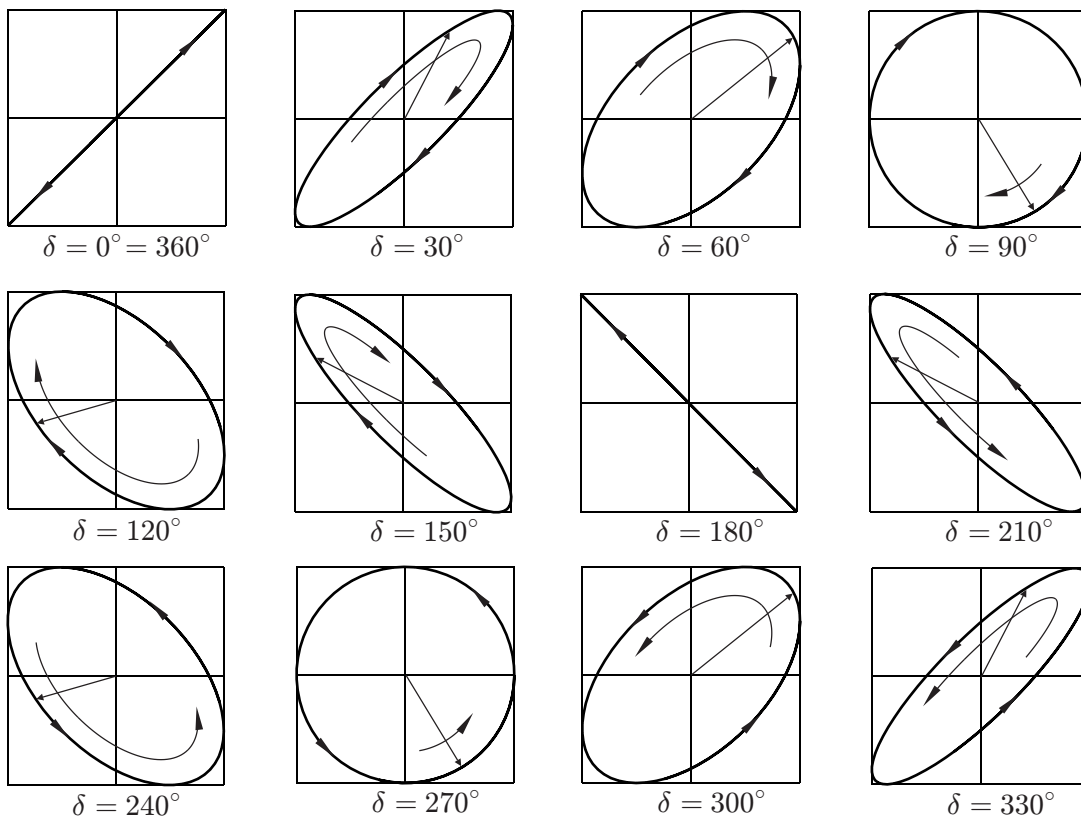
Jiný speciální případ výsledného složeného pohybu dostaneme pro nulový rozdíl fází, tedy případ $\delta = 0 \rightarrow \cos \delta = 1, \sin \delta = 0$. Pak rovnice (6.60) nabude tvaru

$$\text{kmit.1-3605} \quad y_m^2 x^2 - 2x_m y_m x y + x_m^2 y^2 = 0 \text{ pro } \delta = 0, \quad (6.63)$$

ve kterém poznáváme

$$\text{kmit.1-3606} \quad (y_m x - x_m y)^2 = 0, \quad (6.64)$$

což není nic jiného, než rovnice přímky (případně rovnice osy prvního a třetího kvadrantu, je-li $x_m = y_m$)  ?



Obr. 6.24

brkmit.1-24}

$$\text{kmit.1-3607} \quad y = \frac{y_m}{x_m} x \text{ pro } \delta = 0. \quad (6.65)$$

Obdobným způsobem pro $\delta = \pm\pi$ obdržíme rovnici

$$\text{kmit.1-3608} \quad y = -\frac{y_m}{x_m} x \text{ pro } \delta = \pm\pi, \quad (6.66)$$

6.6. PŘÍKLADY K ČÁSTI 6

což je opět rovnice přímky, tentokrát odpovídající ose kvadrantu druhého a třetího (za podmínky $x_m = y_m$).

Poznamenejme, že informaci o fázovém rozdílu dvou harmonických pohybů (6.56) lze získat proměřením elipsy, která vznikne jejich složením ve dvou směrech navzájem kolmých (obr. 6.23). Např. bod C má souřadnici $x_C = x_m |\sin \varphi|$. Změříme-li x_m, x_C , můžeme vypočítat $|\sin \varphi|$. Takto se postupuje např. při určování fázového posuvu dvou střídavých napětí.

$\omega_1 : \omega_2 = p : q$ (p, q celá čísla) Rovinný pohyb bodu

$$P(x, y) : x(t) = x_m \sin(\omega_1 t + \alpha), \quad y(t) = y_m \sin(\omega_2 t + \beta)$$

je za uvedeného předpokladu periodický (srovnejte odst. 6.5.2). Trajektorie jsou uzavřené křivky, které se nazývají **Lissajousovy křivky** (čti lisažusovy). Jejich tvar závisí na poměru ω_1/ω_2 a na fázovém posuvu $\delta = \alpha - \beta$ skládaných pohybů. V obr. 6.25 je naznačeno několik takových křivek pro různé hodnoty δ . Neznáme-li poměr $\omega_1 : \omega_2$, lze jej z Lissajousovy křivky určit.

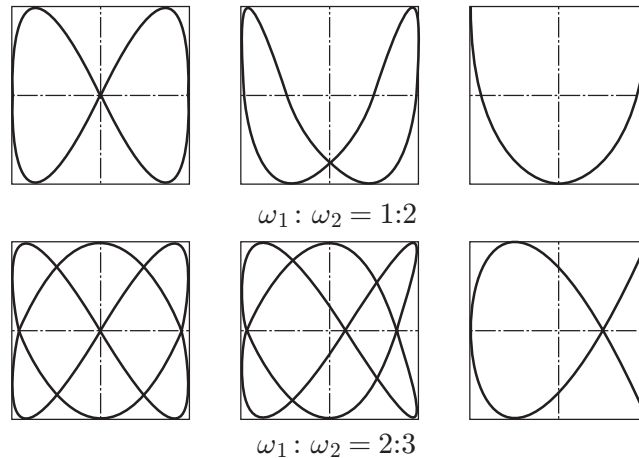


6.6 Příklady k části 6

{ladyKmitani}
{pr6.R-1}

KP 6-8

Těleso o hmotnosti m je zavěšeno na pružině o tuhosti k a kmitá na ní v homogenním tíhovém poli Země (obr. 6.26). Zanedbejte hmotnost pružiny a síly odporu a předpokládejte, že amplituda kmitů je malá. Dokažte, že těleso koná harmonický pohyb s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{k/m}$, tj. s frekvencí stejnou jako v případě znázorněném v obr. 6.7.



Obr. 6.25

{brkmit.1-25}

Řešení:

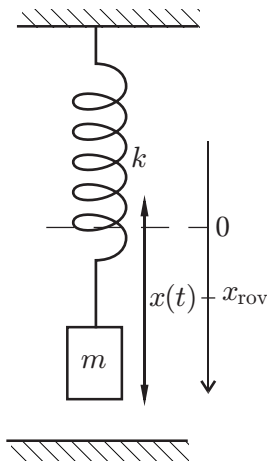
Volme osu Ox orientovanou podle obr. 6.26 s počátkem v bodě, v němž by byl konec nezatížené pružiny. Při pohybu působí na těleso dvě síly: tíha \vec{G} a síla \vec{F}_p od pružiny. Výchylka $x(t)$ tělesa je funkcí času, která vyhovuje diferenciální rovnici, kterou odvodíme stejným postupem jako rovnici (6.20): Vyjdeme z druhého Newtonova pohybového zákona pro těleso o hmotnosti m a postupně dostaneme

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_p, \quad ma_x = G_x + F_{p,x} \Rightarrow m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = mg - kx(t),$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = g \Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = g.$$

6.6. PŘÍKLADY K ČÁSTI 6

Obecným řešením této nehomogenní⁴ diferenciální rovnice je funkce



Obr. 6.26

{brkmit.1-26}

{rovpr6.R-1}

$$x(t) = \frac{mg}{k} + x_m \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right), \quad (6.67)$$

kde $x_m > 0$, α jsou libovolné konstanty — amplituda a fázová konstanta. Tím je důkaz proveden.

Zopakujeme výsledek: Těleso koná harmonický pohyb s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{k/m}$ kolem bodu o souřadnici $x_{rov} = mg/k$. To je však souřadnice rovnovážné polohy tělesa, tj. souřadnice tělesa zavěšeného v klidu na pružině. Amplituda x_m a fázová konstanta α závisí na počátečních podmínkách, tj. určíme je pomocí známých funkčních hodnot $x(t_0) = x(0) = x_0$ a $\dot{x}(t_0) = \dot{x}(0) = \dot{x}_0$, které známe. Je-li např. těleso v čase $t = 0$ upuštěno s nulovou počáteční rychlostí z místa, kde je pružina nenatažena (nedeformována), tj. $x_0 = 0$ a $\dot{x}_0 = 0$, pak fyzikální řešení (matematik je již uspokojen nalezením rovnice (6.67)), splňující zadané počáteční podmínky, lze získat z rovnic

$$0 = x_m \sin \alpha + \frac{mg}{k}, \quad 0 = x_m \omega \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ kde } n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.68)$$

Zvolme $n = 0$, pak $x_m = -\frac{mg}{k}$, tedy námi hledané řešení $x(t)$ je v konečném tvaru

{rovpr6.R-2}

$$x(t) = \frac{2mg}{k} (1 - \cos \omega t), \text{ kde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.69)$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit například dosazením vhodných okamžiků $t = t_0 = 0$, $t = t_1 = T/4 = \frac{2\pi}{4\omega}$, $t = t_2 = T/2 = \frac{2\pi}{2\omega}$, $t = t_3 = 3T/4 = \dots$ a $t = t_4 = T/2$, ve kterých výchylky $x(t_i)$ dokážeme stanovit jen na základě úvahy o jejich vztahu k úhlové frekvenci ω a době kmitu T .

{pr6.P-1}

KP 6-9 _____

Nakreslete graf funkce $x(t) = 0,02 \sin 4t$ v časovém intervalu od $t_0 = 0$ s do $t_1 = 2,5$ s.

⁴S nenulovou pravou stranou.

6.6. PŘÍKLADY K ČÁSTI 6

{pr6.P-2} **KP 6-10** _____

Výchylka tělesa o hmotnosti $m = 0,5$ kg, které koná harmonický kmitavý pohyb podél osy Ox , je dána vztahem $x(t) = 0,03 \sin(15t + 2)$ [SI]. Nakreslete náčrtek a určete (a lze-li to, rovněž do náčrtku zakreslete) veličiny: 1. Fázi v okamžiku $t_1 = 2$ s; 2. a) Periodu, b) frekvenci, c) amplitudu; 3. a) Polohový vektor, b) vektor rychlosti, c) vektor zrychlení v okamžiku $t_2 = 0$ s; 4. Výslednou sílu působící na těleso a) jako funkci času, b) při průchodu rovnovážnou polohou, c) v krajních polohách; 5. Upravte vztah pro výchylku do tvaru a) $x(t) = C_1 \cos(C_2 t + C_3)$, b) $x(t) = C_4 \sin \omega t + C_5 \cos \omega t$ (tj. určete hodnoty konstant C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 a ω).

{pr6.P-3} **KP 6-11** _____

Zobrazte graficky časový průběh a) výchylky, b) rychlosti, c) zrychlení tělesa, které koná harmonický pohyb o výchylce $y(t) = 0,02 \sin 4\pi t$ [SI].

{pr6.P-4} **KP 6-12** _____

Těleso o hmotnosti $m = 0,2$ kg kmitá harmonicky podél osy Oy tak, že vykoná 5 kmitů za 3 s. V čase $t = 0$ s byla jeho výchylka maximální a měla hodnotu $y_0 = y_m = 40$ mm. Sestrojte náčrtek a řešte úkoly: 1. Napište vztah vyjadřující výchylku jako funkci času; 2. Určete a) frekvenci, b) periodu pohybu; 3. Určete a) maximální velikost hybnosti tělesa a b) jeho maximální kinetickou energii; 4. Určete největší velikost výslednice sil působících na těleso. Zakreslete.

{pr6.P-5} **KP 6-13** _____

Píst o hmotnosti $m = 0,7$ kg koná ve válci kmitavý pohyb s frekvencí $f = 10$ Hz. Zdvih pístu je 120 mm. Považujte pohyb za harmonický, nakreslete náčrtek, do kterého postupně zakreslujte uvažované veličiny, a určete: 1. Maximální rychlost pístu; 2. a) Maximální kinetickou energii, b) maximální velikost hybnosti pístu; 3. Vektor zrychlení v krajních polohách; 4. Maximální sílu, kterou působí píst na ojnici při běhu naprázdno za předpokladu, že tlak plynu na obou stranách pístu je stejný a že tření je zanedbatelné.

{pr6.P-6} **KP 6-14** _____

Vodorovná deska koná harmonický pohyb o amplitudě 20 mm s periodou 0,1 s ve svislém směru. Na její horní straně je připevněno těleso o hmotnosti 3 kg. Sestrojte náčrtek a určete: 1. Směr a velikost maximálního zrychlení tělesa; 2. Směr a velikost maximální výsledné síly, působící na těleso; 3. Směr a velikost síly, kterou na těleso působí deska v nejvyšším a nejnižším bodě; 4. Rozhodněte, zda by těleso vykonávalo harmonický pohyb s deskou, kdyby k ní nebylo připevněno, nýbrž jen na ní bylo položeno.

{pr6.P-7} **KP 6-15** _____

Na pružině, která má v nezatíženém stavu délku $l_1 = 400$ mm, visí v klidu těleso o hmotnosti $m = 2$ kg. Pružina je přitom protažena na délku $l_2 = 430$ mm. Těleso vychýlíme z rovnovážné polohy směrem dolů o 20 mm a uvolníme s nulovou počáteční rychlostí. Zanedbejte hmotnost pružiny a síly odporu a počítejte s hodnotou $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Určete: 1. Tuhost pružiny; 2. Frekvenci kmitů; 3. Počet kmitů, které vykoná těleso za 1 minutu; 4. Amplitudu kmitů; 5. Rychlost, se kterou bude těleso procházet rovnovážnou polohou; 6. Sílu, kterou bude působit pružina, na těleso a) v horní, b) v dolní krajní poloze. Uvažované veličiny zakreslete do náčrtku (viz příklad KP 6-8).

{pr6.P-8} **KP 6-16** _____

Těleso o hmotnosti $m = 1,5$ kg je zavěšeno na pružině P a kmitá s amplitudou 30 mm tak, že

6.6. PŘÍKLADY K ČÁSTI 6

rovnovážnou polohou prochází rychlostí o velikosti 120 mm s^{-1} . Zanedbejte hmotnost pružiny a síly odporu a počítejte s hodnotou $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Určete: 1. a) Frekvenci a b) periodu pohybu; 2. Tuhost pružiny; 3. Sílu, kterou působí P na těleso při jeho průchodu a) rovnovážnou, b) horní krajní, c) dolní krajní polohou. Zakreslete do náčrtku.

{pr6.P-9} **KP 6-17** _____

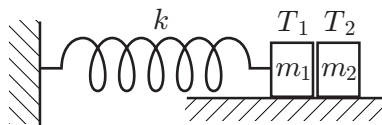
Na konec volně zavěšené pružiny o tuhosti $k = 50 \text{ N m}^{-1}$ připevníme těleso o hmotnosti $m = 0,5 \text{ kg}$ a držíme je v ruce, takže pružina není deformována. V okamžiku $t_1 = 0 \text{ s}$ těleso pustíme s nulovou počáteční rychlostí, takže začne kmitat ve svislém směru. Zanedbejte hmotnost pružiny a síly odporu a počítejte s hodnotou $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Sestrojte náčrtek a zakreslete do něho uvažované veličiny. Určete: 1. Sílu, kterou působí těleso na pružinu ihned po uvolnění, tj. např. v okamžiku $t_2 = 10^{-5} \text{ s}$; 2. Zrychlení, se kterým se začne těleso pohybovat; 3. Nejnižší bod trajektorie; 4. Sílu, kterou působí pružina na těleso a) v nejvyšším bodě trajektorie, b) v nejnižším bodě trajektorie, c) v rovnovážné poloze; 5. Zrychlení tělesa v nejnižší poloze; 6. a) Frekvenci a b) amplitudu kmitů.

{pr6.P-10} **KP 6-18** _____

Těleso o hmotnosti $m = 0,6 \text{ kg}$, zavěšené na pružině, koná kmity s frekvencí $f = 0,5 \text{ Hz}$. Poté oddělíme od pružiny její jednu čtvrtinu a na zbytek zavěsíme totéž těleso. Zanedbejte hmotnost pružiny a síly odporu. Určete: 1. Tuhost původní pružiny; 2. Tuhost zkrácené pružiny; 3. Frekvenci kmitů tělesa na zkrácené pružině.

{pr6.P-11} **KP 6-19** _____

Na pružině o tuhosti $k = 120 \text{ N m}^{-1}$ je připevněno těleso T_1 o hmotnosti $m_1 = 1,5 \text{ kg}$. K němu přiléhá volně těleso T_2 o hmotnosti $m_2 = 1,0 \text{ kg}$ (obr. 6.27). Silou \vec{F} působící na T_2 zprava se tělesa posunou doleva a pružina se stlačí o délku $d = 80 \text{ mm}$. Poté přestane síla \vec{F} působit a tělesa se začnou z klidu pohybovat doprava. Zanedbejte hmotnost pružiny a podložku považujte za dokonale hladkou. Určete: 1. energii stlačené pružiny; 2. Rychlost, se kterou se bude pohybovat těleso T_2 po odpoutání. Zakreslete; 3. Frekvenci kmitů tělesa T_1 ; 4. Amplitudu kmitů tělesa T_1 ; 5. Sílu, kterou bude působit těleso T_1 na těleso T_2 na začátku pohybu. Zakreslete.



Obr. 6.27

brkmit.1-27}

{pr6.P-12} **KP 6-20** _____

Na jednom konci tuhé tyče délky $l = 1 \text{ m}$ je upevněno těleso T_1 o hmotnosti $m_1 = 0,4 \text{ kg}$, na druhém konci malé těleso T_2 o hmotnosti $m_2 = 0,6 \text{ kg}$. Tyč koná malé kmity kolem vodorovné osy, která je kolmá na osu tyče a která prochází bodem P na ose tyče ve vzdálenosti $l = 0,3 \text{ m}$ od tělesa T_2 . Zanedbejte hmotnost tyče a síly odporu, tělesa T_1, T_2 považujte za hmotné body a počítejte s $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Nakreslete náčrtek. Pro uvedenou soustavu určete: 1. Polohu hmotného středu; 2. Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení; 3. a) Úhlovou frekvenci, b) frekvenci, c) periodu kmitů.

{pr6.P-13} **KP 6-21** _____

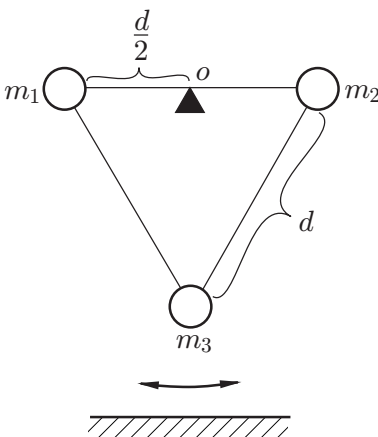
Řešte příklad **KP 6-20** za předpokladu, že ve vzdálenosti $d = 0,4 \text{ m}$ od tělesa T_1 bylo k tyči

6.6. PŘÍKLADY K ČÁSTI 6

přípevněno další malé těleso (hmotný bod) T_3 o hmotnosti $m_3 = 1$ kg.

{pr6.P-14} **KP 6-22** _____

Soustava, sestávající ze tří malých těles T_1 , T_2 , T_3 o hmotnostech $m_1 = m_2 = m_3 = 0,4$ kg spojených tuhými tyčemi stejných délek $d = 0,5$ m, koná malé kmity kolem vodorovné osy o (obr. 6.28). Zanedbejte hmotnost tyčí a síly odporu, tělesa považujte za hmotné body a počítejte s $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Pro uvedenou soustavu určete: 1. Polohu hmotného středu. Zakreslete; 2. Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení; 3. a) Úhlovou frekvenci, b) frekvenci, c) periodu malých kmitů.



Obr. 6.28

brkmit.1-28}

{pr6.P-15} **KP 6-23** _____

Řešte příklad [KP 6-22](#) pro hodnoty $m_1 = m_2 = 0,4$ kg, $m_3 = 0,8$ kg.

{pr6.P-16} **KP 6-24** _____

Těleso nepravidelného tvaru o hmotnosti $m = 4$ kg koná malé kmity kolem vodorovné osy o s periodou $T = 2$ s. Jeho hmotný střed je ve vzdálenosti $a = 0,5$ m od osy o . Zanedbejte síly odporu a počítejte s $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Určete: 1. Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose o ; 2. Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k přímce jdoucí jeho hmotným středem rovnoběžně s osou o .

{pr6.P-17} **KP 6-25** _____

Homogenní kruhová deska o poloměru $r = 0,4$ m a o hmotnosti $m = 2$ kg koná malé kmity kolem vodorovné osy o (obr. 6.29). Zanedbejte síly odporu, počítejte s $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ a užitě vztahu $I_C = 0,5mr^2$, kde I_C je moment setrvačnosti desky vzhledem k přímce jdoucí kolmo na desku jejím hmotným středem⁵. Určete: 1. Moment setrvačnosti desky vzhledem k ose o ; 2. Periodu malých kmitů.

{pr6.P-18} **KP 6-26** _____

Řešte příklad [KP 6-25](#) za předpokladu, že v bodě A je k desce přípevněno malé těleso (hmotný bod) o hmotnosti $m_1 = m = 2$ kg.

⁵Uvedený vztah se odvodí z definičního vztahu pro I užitím integrálního počtu.

6.6. PŘÍKLADY K ČÁSTI 6

{pr6.P-19} **KP 6-27** _____

Řešte příklad KP 6-25 za předpokladu, že v bodě B je k desce připevněno malé těleso (hmotný bod) o hmotnosti $m_2 = m = 2$ kg.

{pr6.P-20} **KP 6-28** _____

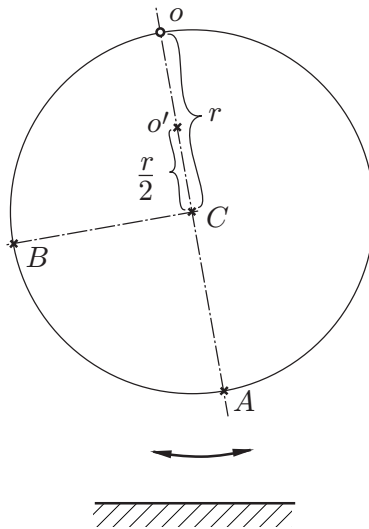
Řešte příklad KP 6-25 za předpokladu, že v desce o původní hmotnosti $m = 2$ kg se vyřízne kruhový otvor o poloměru $r_1 = r/2$ se středem v C , takže deska má tvar mezikruží o poloměrech r_1, r .

{pr6.P-21} **KP 6-29** _____

Určete redukovanou délku fyzického kyvadla uvažovaného v příkladě KP 6-25.

{pr6.P-22} **KP 6-30** _____

Pro desku uvažovanou v příkladě KP 6-25 určete periodu malých kmitů kolem osy o' rovnoběžné s přímkou o (obr. 6.29).



Obr. 6.29

{pr6.P-23} **KP 6-31** _____

Předpokládejte, že na obr. 6.29 je znázorněna obruč o poloměru $r = 0,4$ m a hmotnosti $m = 2$ kg. Zanedbejte síly odporu a počítejte s $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Určete: 1. Moment setrvačnosti vzhledem k ose o ; 2. Periodu malých kmitů; 3. Redukovanou délku tohoto kyvadla.

{pr6.P-24} **KP 6-32** _____

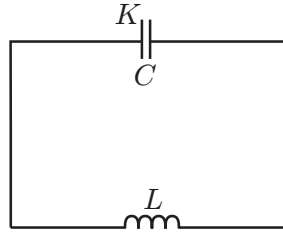
Fyzické kyvadlo umístěné v klidném výtahu koná malé kmity s periodou $T_0 = 2\text{s}$. Zanedbejte síly odporu a počítejte s $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Odvoďte pohybovou rovnici pro toto kyvadlo a vypočítejte periodu kmitu ve výtahu, který právě: 1. Rovnoměrně a) stoupá, b) klesá s rychlostí o velikosti $v = 1,5 \text{ m s}^{-1}$; 2. a) Klesá, b) stoupá se stálým zrychlením \vec{a}_1 o velikosti $a_1 = 2 \text{ m s}^{-2}$ orientovaným dolů; 3. a) Klesá, b) stoupá se stálým zrychlením \vec{a}_2 o velikosti $a_2 = 2 \text{ m s}^{-2}$ orientovaným vzhůru. Doporučení: Užijte vztažného systému spojeného s kabinou výtahu.

{pr6.P-25} **KP 6-33** _____

Ideální (bezztrátový) oscilační obvod LC , v němž je kondenzátor K a cívka o vlastní indukčnosti

6.6. PŘÍKLADY K ČÁSTI 6

$L = 2\text{mH}$ (obr. 6.30), kmitá s frekvencí $f = 1000\text{ Hz}$. Maximální napětí na kondenzátoru přitom je $U_m = 100\text{ V}$. Určete: 1. Kapacitu kondenzátoru; 2. Maximální náboj kondenzátoru; 3. Maximální elektrickou energii obvodu; 4. Celkovou elektromagnetickou energii obvodu; 5. Maximální magnetickou energii obvodu; 6. Maximální proud v obvodu.



Obr. 6.30

{brkmit.1-30}

{pr6.P-26} **KP 6-34** _____

Určete frekvenci oscilačního obvodu, který vznikne z obvodu na obr. 6.30, jestliže do něho zapojíme další kondenzátor shodný s kondenzátorem K a) do serie, b) paralelně ke kondenzátoru K .

{pr6.P-27} **KP 6-35** _____

Určete s užitím grafického skládání amplitudu harmonického pohybu, který vznikne složením dvou stejnosměrných harmonických pohybů, z nichž jeden má výchylku danu (v soustavě SI) vztahem $x_0 = 0,04 \sin 200t$ a druhý vztahem 1. $x_1 = 0,03 \cos 200t$; 2. $x_2 = 0,02 \sin 200t$; 3. $x_3 = 0,04 \sin(200t + \pi/4)$; 4. $x_4 = 0,04 \cos(200t - \pi/4)$; 5. $x_5 = 0,05 \sin(200t + 0,5)$.

{pr6.P-28} **KP 6-36** _____

Určete amplitudu harmonického pohybu, který vznikne složením tří stejnosměrných harmonických pohybů o výchylkách (v soustavě SI): $x_1 = 0,03 \sin 100t$, $x_2 = 0,04 \cos 100t$, $x_3 = 0,06 \cos(100t + \pi/4)$.

{pr6.P-29} **KP 6-37** _____

Složením dvou stejnosměrných harmonických pohybů o stejných frekvencích, z nichž první má výchylku danou vztahem $x_1 = 0,03 \sin 500t$ [SI], vznikne harmonický pohyb o výchylce $x = 0,05 \cos 500t$ [SI]. Určete funkci udávající výchylku druhého pohybu.

{pr6.P-30} **KP 6-38** _____

Tři stejnosměrné harmonické pohyby mají frekvence v poměru $f_1 : f_2 : f_3 = 2 : 3 : 4$. Druhý z nich má frekvenci $f_2 = 120\text{ Hz}$. Určete periodu harmonického pohybu vzniklého složením 1. Pohybu 1 a 2; 2. Pohybu 2 a 3; 3. Pohybů 1, 2, 3.

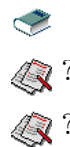
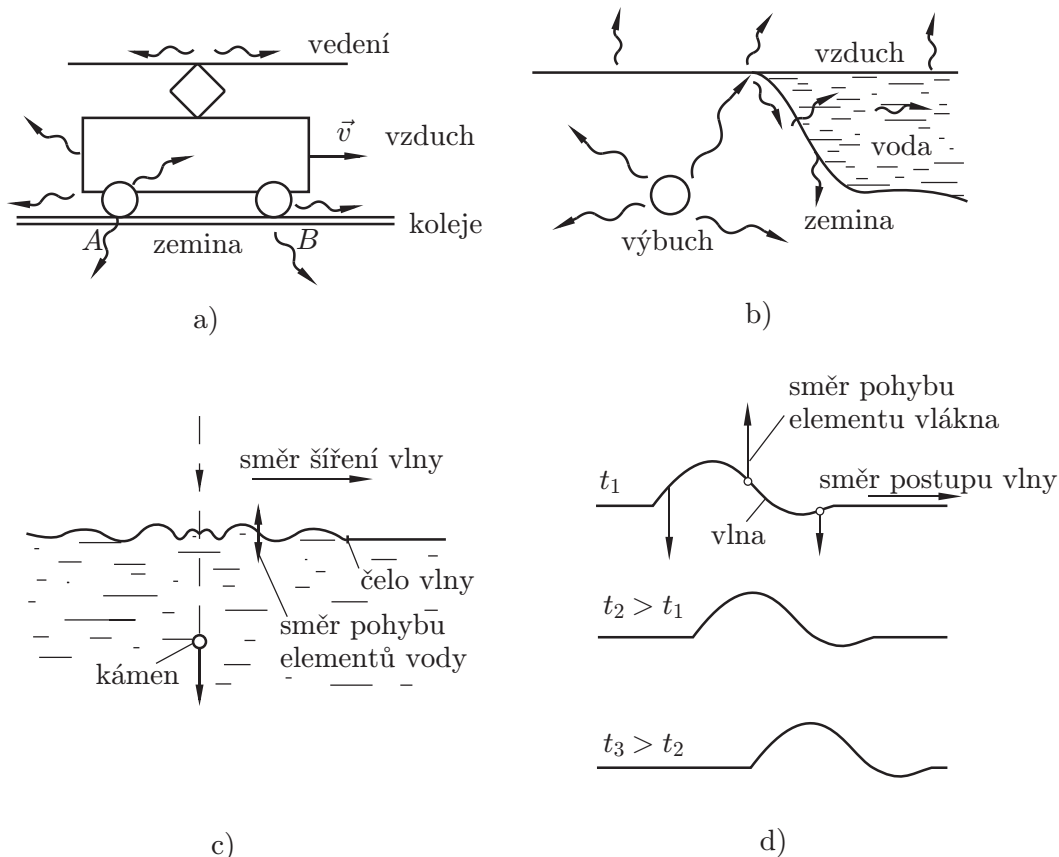
7. Vlnění

{Vlneni}

7.1 Postupné mechanické vlnění

7.1.1 Co je to vlnění?

Vlnění, neboli vlny, je děj, jehož příklady jsou znázorněny na obr. 7.1a-d. Obr. 7.1a znázorňuje



{obrvln.2-1}

Obr. 7.1

děj, který vzniká při jízdě elektrické lokomotivy. Nárazy kol na kolejnice se mírně deformují kolejnice i kola v místě styku (body A, B). Odtud se deformace šíří konečnou rychlostí jak kolejnicemi, tak koly. Z nich se přenášejí do všech látek, s nimiž jsou kola a kolejnice ve styku. Z kol do ložisek, z nich postupně na hřídel, karoserii, do vzduchu atd. Z kolejnic do podloží, do vzduchu atd. Tento děj — přenášení deformace, pohybu a energie mezi sousedními elementy látek — se nazývá **mechanické vlnění** nebo **mechanické vlny**.

7.1.1.1 Co je charakteristické pro mechanické vlny?

1. Mechanické vlnění je formou (nebo „druhem“) pohybu látkového prostředí. **Elementy látky se při průchodu vlny vychylují ze svých rovnovážných poloh a pohybují kolem nich většinou zcela nepatrně.** Např. ve zvukové vlně ve vzduchu mají výchylky

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

elementů vzduchu velikosti mnohdy pouhých 10^{-9} m, podobně i v kapalinách a pevných látkách. Proto je nelze prostým okem většinou pozorovat.

2. **Změna deformace a napětí, tj. mechanický rozruch, postupuje od jednoho elementu k druhému.** Proto se toto vlnění nazývá mnohdy **postupné vlnění**. Rychlost postupu rozruchu v prostředí se nazývá **rychlost vlnění** a značí se obvykle c (nebo v). Závisí na setrvačných vlastnostech látky (tj. na její hustotě) a na silách, kterými na sebe působí navzájem sousední elementy látky při deformaci (např. u vln, podmíněných pružností látky, závisí rychlost vlnění na jejich modulech pružnosti). Typické hodnoty rychlostí c : vzduch ... 340 m/s, voda ... 1 450 m/s, ocel... 5 000 m/s (viz tabulky 10).

Mechanické vlnění současně přenáší i energii, hybnost. atd.

7.1.1.2 Různé druhy vlnění

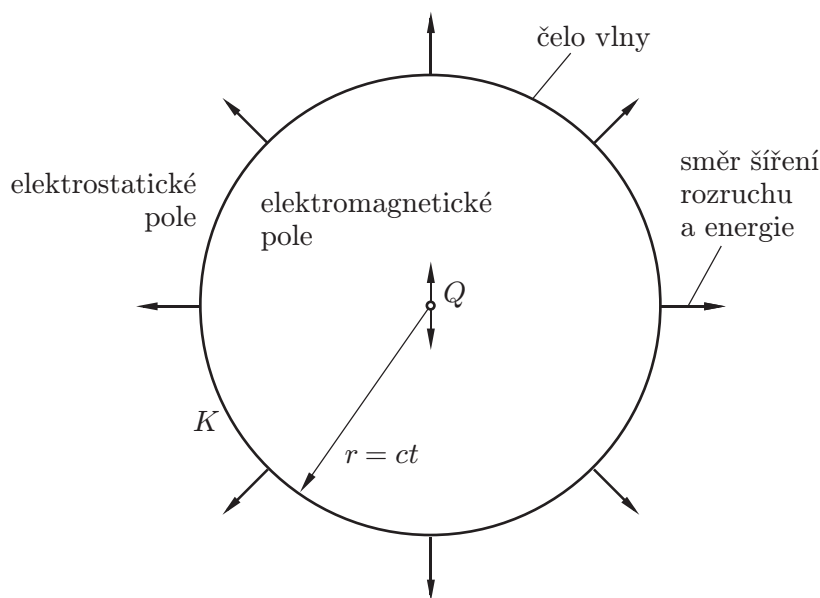
1. **Pružné (elastické) vlny** jsou mechanické vlny podmíněné pružností látek (pevných, kapalných i plynů). Jsou znázorněny na obr. 7.1a, b.
2. **Tíhové vlny na povrchu kapaliny** jsou znázorněny na obr. 7.1c. Jsou podmíněny tíhovými silami působícími na elementy kapaliny.
3. **Kapilární vlny** se šíří na povrchu kapalin. Jsou podmíněny kapilárními jevy.
4. **Příčné vlny na vlákně** jsou podmíněny ohebností vlákna a silou, kterou je vlákno napínáno (obr. 7.1d).
5. **Elektromagnetické vlny** jsou znázorněny na obr. 7.2. Elektrický náboj Q , který byl až do okamžiku $t = 0$ s v klidu, začne kmitat. Tím se začne měnit pole, čelo vlny, které vytváří ve svém okolí: až do okamžiku $t = 0$ s bylo pole v celém prostoru elektrostatické. Při pohybu náboje se pole začne měnit, vzniká i složka magnetická. Tato změna pole se šíří do prostoru rychlostí $c \doteq 3 \cdot 10^8$ m/s⁻¹, takže v určitém okamžiku $t > 0$ je vně koule K o poloměru $r = ct$ ještě pole elektrostatické a uvnitř již pole elektromagnetické. Tento děj, tj. šíření změny elektromagnetického pole, se nazývá elektromagnetické vlnění. Při šíření elektromagnetického pole se šíří a přenáší, podobně jako při šíření mechanických vln, i energie a hybnost. Kulovou vlnu, znázorněnou na obr. 7.2, lze vytvořit např. přeskokem jiskry. V praxi vznikají elektromagnetické vlny periodickým pohybem nábojů ve vodičích — anténách nebo pohybem nábojů v atomech a molekulách.
6. **Gravitační vlny** vznikají šířením změn gravitačního pole, podobně jako vlny elektromagnetické.

7.1.2 Co se děje v pružné vlně?

Šíření pružné vlny v tyči. Na obr. 7.3 je znázorněno šíření pružné vlny v tyči. Tyč si myslíme rozdělenou na malé stejně velké elementy (obr. 7.3a) a předpokládáme, že na první element začne působit zleva proměnná síla \vec{F} v naznačeném směru. Pak:

1. Element 1 se začne pohybovat doprava a současně se stlačí (obr. 7.3b).
2. S nepatrným zpožděním se začne pohybovat i element 2 vlivem síly $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ od elementu 1 a síly $\vec{F}_{3 \rightarrow 2}$ od elementu 3. Současně se začne i deformovat (stlačovat) (obr. 7.3c).

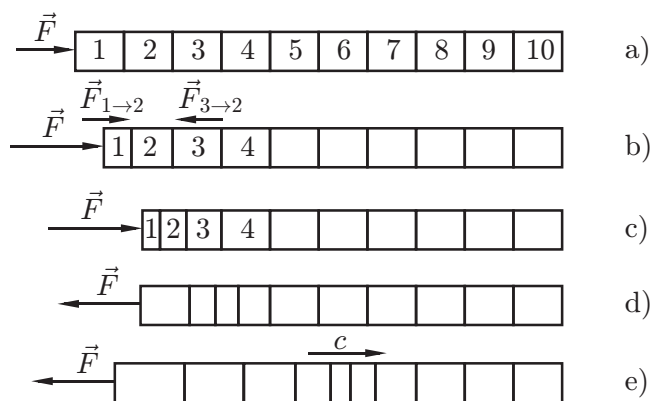
7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ



Obr. 7.2

{obrvln.2-2}

3. Další pohyb elementů tyče je zřejmý z obr. 7.3d, e. Elementy si předávají deformaci. Deformace, tj. vlna, postupuje doprava rychlostí, která závisí na látce, v níž se vlna šíří, a nezáleží na tom, jak jsou elementy deformovány.



Obr. 7.3

{obrvln.2-3}

Poznámky: —————

1. Je zřejmé, že začne-li působit na tyč délky 1 síla \vec{F} podle obr. 7.3 (uhodíme-li do ní nebo jejím koncem pohneme rukou), vznikne v tyči vlna, která dorazí na druhý konec tyče až po uplynutí doby $t = l/c$. Do té doby je druhý konec v klidu. Tyč se nepohne najednou jako celek.

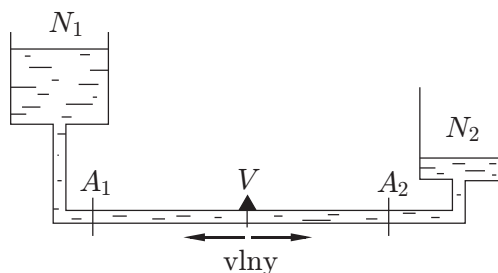
2. Podobně jako vlny v tyči šíří se vlny i potrubím naplněným kapalinou nebo plynem (vodní potrubí, výfukové potrubí). Při vyšetřování neustáleného proudění v potrubí a při návrzích příslušných zařízení je nutno k existenci vln přihlídnout.

{ **KP 7-1** —————

Na obr. 7.4 je znázorněno vodní potrubí spojující vzdálené nádrže N_1 , N_2 . Ventil V je zpočátku uzavřen, pak jej v okamžiku $t = 0$ s otevřeme. Popište děj, který nastane v potrubí. Určete,

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

v kterém okamžiku se začne voda pohybovat v místě A_1 vzdáleném o $l_1 = 2$ km od ventilu a v místě A_2 vzdáleném o $l_2 = 1,5$ km od ventilu.



{obrvln.2-4}

Obr. 7.4

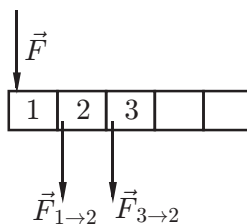
Řešení:

Po otevření ventilu klesne tlak nalevo od ventilu a stoupne napravo od něj. Směrem k bodu A_1 se šíří snížení tlaku, tj. dilatační vlna, směrem k bodu A_2 kompresní vlna. Do bodu A_1 dorazí vlna v okamžiku $t_1 = l_1/c$, kde $c = 1450 \text{ ms}^{-1}$ je rychlost vln ve vodě (z tabulek). Tedy $t_1 = 2000 \text{ m}/(1450 \text{ ms}^{-1}) = 1,38$ s. Do bodu A_2 dorazí vlna v okamžiku $t_2 = l_2/c = 1,03$ s. Až do okamžiků t_1, t_2 je voda v bodech A_1, A_2 v klidu, teprve pak se začne pohybovat.

7.1.2.1 Podélné a příčné vlny

Podélné (neboli longitudinální) **vlny** jsou takové vlny, při nichž se elementy prostředí pohybují (většinou kmitají) ve směru a proti směru postupu rozruchu. Příkladem podélné vlny je vlna v tyči znázorněná na obr. 7.3 nebo vlna v potrubí na obr. 7.4. Podélné vlny se mohou šířit v plynech, kapalinách i v pevných látkách.

Příčné (neboli transversální) **vlny** jsou takové vlny, v nichž se elementy prostředí vychylují a pohybují kolmo na směr šíření vlny. Uhodíme-li např. do tyče ve směru kolmém na její osu (obr. 7.5), budou elementy tyče na sebe působit smykovými silami (síly $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}, \vec{F}_{2 \rightarrow 3}$ atd.). Všechny elementy tyče se budou pohybovat ve směru kolmém na osu tyče, tj. kolmém na směr šíření vlny. Přitom se budou deformovat smykovými silami, aniž by měnily objem. Takovéto vlny se nazývají příčné. Pružné příčné vlny jsou podmíněny existencí smykových sil. Mohou se tedy šířit pevnými látkami, nikoliv však kapalinami a plyny. Rychlosti příčné a podélné vlny v pevné látce jsou různé. **Další typy příčných vln** jsou příčné vlny na vláknech (obr. 7.1d) nebo



{obrvln.2-5}

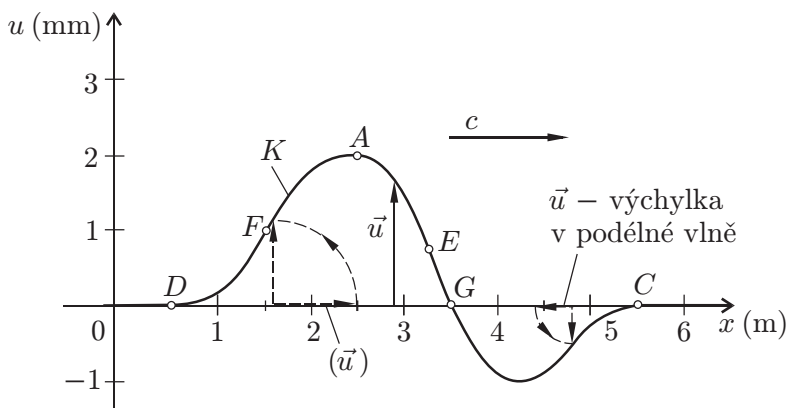
Obr. 7.5

elektromagnetické vlny šířící se ve volném prostoru v dosti velké vzdálenosti od zdrojů. Např. v rovinné elektromagnetické vlně jsou vektory \vec{E}, \vec{B} , které charakterizují elektromagnetické pole ve vlně, kolmé na směr šíření vlny (viz odstavec 8.1.1.1).

7.1.3 Výhyška, rychlost částic, rychlost vlnění, čelo vlny, vlnoplocha

1. **Výhyška** \vec{u} je vektor, který udává směr a velikost posunutí elementu prostředí jako celku z rovnovážné polohy při průchodu vlny. Výhyška \vec{u} je funkcí polohy a času, tj. $\vec{u}(P; t)$ nebo $\vec{u}(x, y, z; t)$, kde P je obecný bod o souřadnicích x, y, z . Šíří-li se vlna na vlákně nebo v jiném jednorozměrném prostředí, zavedeme osu Ox (nebo Oy atd.) ve směru vlákna. Výhyška \vec{u} pak závisí jen na z a na t .

Je-li vlna šířící se podél osy Ox příčná, tj. platí-li $\vec{u} \perp Ox$ a leží-li výhyšky všech bodů (elementů prostředí) v jedné rovině (jdoucí osou Ox), nazývá se **vlna lineárně polarizovaná**. Taková vlna je znázorněna na obr. 7.6. Obvykle se zavádí osa Ou a namísto o vektoru \vec{u} se uvažuje o jeho průmětu do osy Ou , který se označuje u a který se nazývá rovněž **výhyška**. Platí $u \geq 0$. Křivka K udává výhyšku u v určitém čase t jako funkci veličiny x . Podélnou vlnu znázorníme tak, že vektor \vec{u} otočíme o 90° , tak jak je zřejmé



Obr. 7.6

z obr. 7.6, který znázorňuje i výhyšku v podélné vlně postupující ve směru osy Ox . Body z intervalu (D, G) jsou vychýleny ve směru osy Ox , body z intervalu (G, C) ve směru opačném. Otočený vektor výhyšky opět promítneme do osy Ou a průmět u opět nazýváme výhyška.

Ve zvukové harmonické vlně se veličina u nazývá **akustická výhyška**.

2. **Rychlost elementu** \vec{v} je dána (podle definice rychlosti) vztahem $\vec{v} = \partial\vec{u}/\partial t$. V podélné nebo příčné lineárně polarizované vlně leží vektory \vec{u} , \vec{v} v jedné přímce. V podélné vlně platí $\vec{u} \parallel \vec{v} \parallel Ox$, v příčné $\vec{u} \parallel \vec{v} \perp Ox$. V obou případech pak rychlostí elementu nazýváme i skalární veličinu

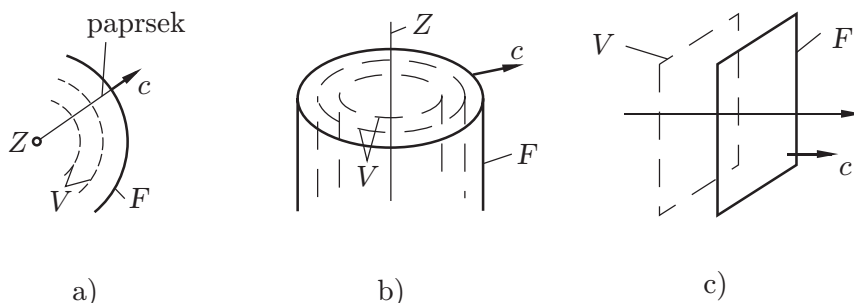
$$v = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Je-li např. $v > 0$, pohybuje se element v podélné vlně ve směru osy Ox a v příčné vlně ve směru osy Ou . Je-li $v < 0$, je směr pohybu opačný. Ve zvukové harmonické vlně se veličina v nazývá **akustická rychlost**.

3. **Tlak ve vlně** je veličina, která je důležitá při šíření vln v kapalinách a plynech. Při šíření harmonické zvukové vlny se nazývá přírůstek tlaku proti původnímu tlaku ve vlně **akustický tlak**. Značí se p a platí pro něj $p \geq 0$.
4. **Rychlost vlnění** c je název pro velikost rychlosti, se kterou postupuje rozruch. Závisí na vlastnostech prostředí. Pozor: **nezaměňovat** c s rychlostí pohybu elementu v !

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

5. **Čelo vlny** je souhrn bodů, ohraničujících vlnu, tj. oddělujících ji od té části prostoru, do níž vlna ještě nepronikla. Šíří-li se rozruch v trojrozměrném prostředí všemi směry stejnou rychlostí, je čelo vlny z bodového zdroje koule (obr. 7.7a), z lineárního zdroje válcová plocha (obr. 7.7b). Ve velké vzdálenosti od zdroje je čelo vlny přibližně rovinné (obr. 7.7c).



Obr. 7.7

6. **Vlnoplocha.** Jestliže zdroj Z kmitá periodicky, zavádíme pojem vlnoplochy jako plochy, jejíž všechny body kmitají se stejnou fází (plochy V v obr. 7.7). Podle tvaru vlnoploch se vlny nazývají kulové, válcové, rovinné. Obecná vlna má vlnoplochy obecného tvaru.
7. **Paprsek** je křivka, podél níž se šíří ve vlně energie (mechanická, elektrická). V izotropním prostředí (např. ve vzduchu, ve vodě, v oceli, nikoliv však v krystalech) jsou paprsky kolmé na vlnoplochy.

7.1.4 Zákon superpozice vlnění

Zákon superpozice vlnění zní: Nechť v pružném prostředí budí zdroj Z_1 vlnu, v níž je výchylka dána funkcí $\vec{u}_1(x, y, z; t)$ (obr. 7.8). Nechť zdroj Z_2 budí vlnu o výchylce $\vec{u}_2(x, y, z; t)$. Pak oba zdroje současně budí vlnu o výchylce

$$\vec{u}(x, y, z; t) = \vec{u}_1(x, y, z; t) + \vec{u}_2(x, y, z; t). \quad (7.1)$$

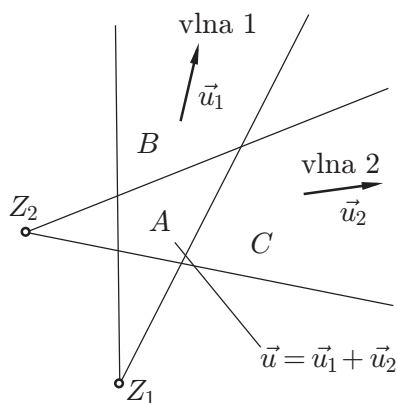
Podobně výchylka ve vlnění vzbuzeném větším počtem zdrojů je rovna vektorovému součtu výchylek ve vlnách z jednotlivých zdrojů.

Zákon superpozice vlnění platí v pružném prostředí za podmínky, že výchylky a deformace jsou tak malé, že platí Hookův zákon, tj. že deformace je lineárně závislá na napětí. Zákon superpozice lze považovat buď za přímý výsledek experimentů, nebo jej lze odvodit z diferenciální rovnice vlnění (rovnice (7.29)). Ta je ovšem rovněž odvozena na základě výsledků experimentů.

Příklady a důsledky zákona superpozice. Pro šíření vln, znázorněné na obr. 7.8, v němž se vlny z (vhodných) zdrojů Z_1, Z_2 šíří pouze do určitých směrů, platí: V oblasti A , kde se vlny překrývají, platí $\vec{u}(x, y, z; t) = \vec{u}_1(x, y, z; t) + \vec{u}_2(x, y, z; t)$, kde $\vec{u}_1(x, y, z; t) \neq \vec{0}$, $\vec{u}_2(x, y, z; t) \neq \vec{0}$. V oblasti B , v níž je $\vec{u}_2(x, y, z; t) = \vec{0}$, je $\vec{u}(x, y, z; t) = \vec{u}_1(x, y, z; t)$, tj. výchylka $\vec{u}(x, y, z; t)$ je právě taková, jako kdyby zdroj Z_2 nezařil. Setkání s vlnou 2 v oblasti A vlnu 1 vůbec neovlivnilo. Analogicky v oblasti C platí $\vec{u}(x, y, z; t) = \vec{u}_2(x, y, z; t)$. V důsledku platnosti zákona superpozice se přenášejí vzduchem zvukové signály (řeč, hudba) tak, že nejsou ovlivněny (deformovány) jinými zvukovými vlnami, se kterými se při šíření setkala.

Podobně jako pro elastické (tj. i zvukové) vlny platí zákon superpozice i pro vlny elektromagnetické. Rovněž elektromagnetické vlny se při šíření většinou neovlivňují. Z mnoha elektromagnetických vln, které se šíří prostorem a dopadají na anténu rozhlasového přijímače, lze oddělit selektivním přijímačem jednu. Signál, který tato vlna přenáší (řeč, hudba) není přítom jinými

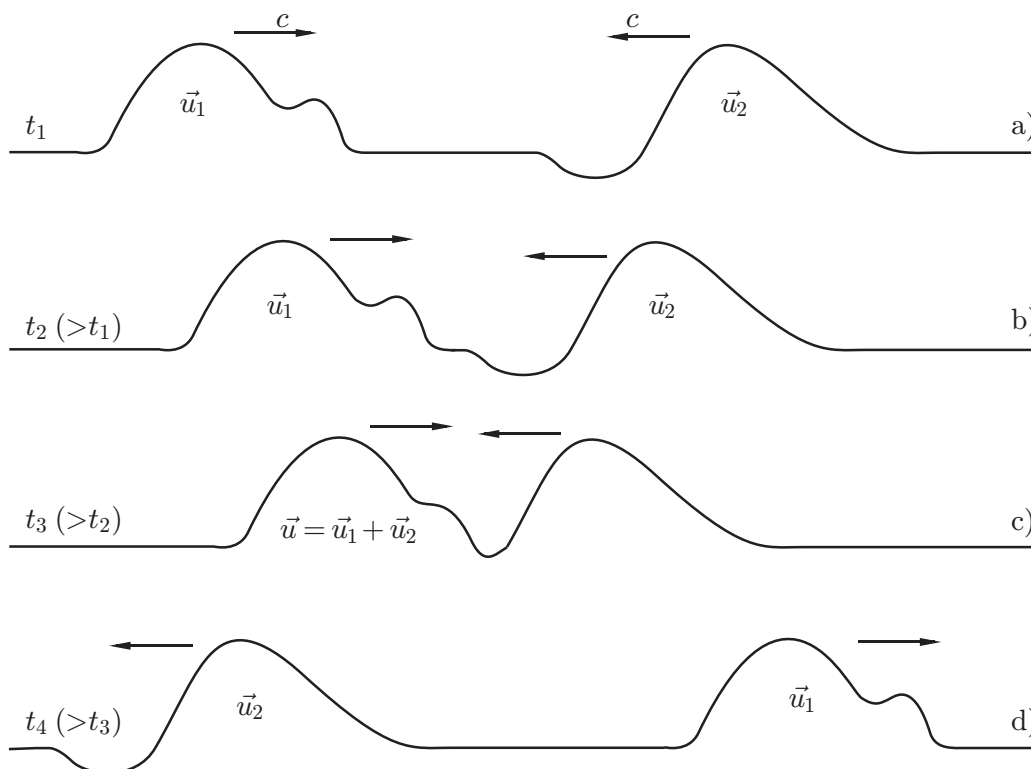
7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ



Obr. 7.8

{obrvln.2-8}

vlňami ovlivněn, tj. zkreslen. Jiný příklad superpozice je znázorněn na obr. 7.9. Dvě prostorově



Obr. 7.9

{obrvln.2-9}

ohraničené lineárně polarizované příčné vlny na vlákne se šíří proti sobě beze změny tvaru (okamžiky t_1, t_2). V určitém časovém intervalu se obě vlny překrývají (např. okamžik t_3) a výchylka ve výsledném vlnění je dána vztahem $\vec{u}(x, y, z; t) = \vec{u}_1(x, y, z; t) + \vec{u}_2(x, y, z; t)$. V pozdějším okamžiku (t_4) jsou vlny opět odděleny a postupují dál, přičemž zachovaly svůj tvar.

7.1.5 Matematické vyjádření postupující vlny

{capt515E}

Vlny na vlákne, v trubcích a tyčích i vlny rovinné se šíří ve většině případů téměř beze změny tvaru (obr. 7.9a, b). Zcela beze změny tvaru by se šířily v uvedených případech vlny jen tehdy,

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

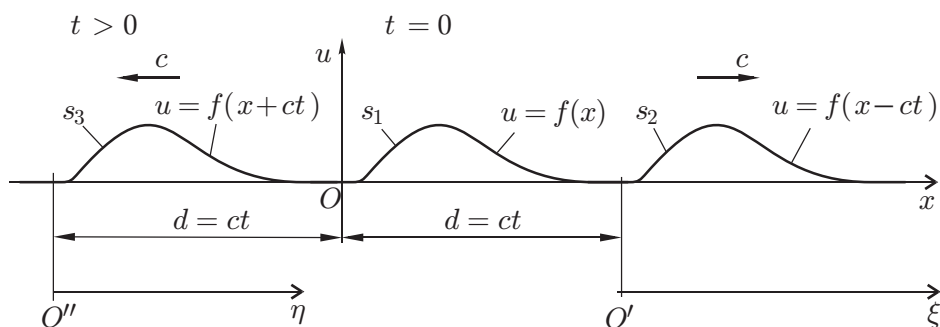
kdyby v prostředí, jímž se vlna šíří, nebylo vnitřního tření. Jeho vlivem se mechanická energie vlny postupně mění v energii tepelného pohybu molekul, tj. ve vnitřní energii látky a vlna se tlumí.

Šíření těchto vln bez změny tvaru lze považovat buď za experimentální fakt nebo za důsledek vlnové rovnice (7.28).

V dalším odvodíme vztah pro výchylku u ve vlně obecného tvaru postupující beze změny tvaru rychlostí c podél osy Ox , a to pro dva případy:

- je znám tvar vlny, tj. výchylka u , v určitém okamžiku, např. v okamžiku $t = 0$ s, tj. je dáno $u(x; t = 0) = f(x)$;
- je známa závislost výchylky na čase v určitém bodě, např. v bodě o souřadnici $x = 0$ m, tj. je dáno $u(x = 0; t) = F(t)$. V bodě $x = 0$ m může být např. umístěn zdroj vlnění.

Je dáno $u(x; t = 0) = f(x)$ Výchylka u ve vlně, postupující podél osy Ox buď v jejím směru nebo ve směru opačném, je funkcí veličin x, t . V okamžiku $t = 0$ s je tato funkce známa, je dána funkcí $f(x)$, tj. platí $u(x; t = 0) = f(x)$. V obr. 7.10 je tato funkce znázorněna křivkou K_1 .



Obr. 7.10

Vlna postupující ve směru osy Ox V okamžiku $t > 0$ je vlna znázorněna křivkou K_2 , která vznikne posunutím křivky K_1 o úsek délky $d = ct$ ve směru osy Ox . Výchylka u je dána vztahem

$$u = f(\xi), \quad (7.2)$$

kde význam veličiny ξ je zřejmý z obr. 7.10. Platí $x(t) = d + \xi = ct + \xi \Rightarrow \xi = x - ct$. Dosadíme-li odsud do vztahu (1), dostaneme

$$u(t) = f(x - ct). \quad \text{vlna ve směru osy } Ox \quad (7.3)$$

Tímto vztahem je vyjádřena výchylka ve vlně jako funkce veličin x, t .

Vlna postupující proti směru osy Ox V okamžiku $t > 0$ bude vlna znázorněna křivkou K_3 , která vznikne posunutím křivky K_1 o úsek délky $d = ct$ proti směru osy Ox . Vyjádříme-li výchylku v tomto okamžiku pomocí veličiny η (obr.7.10), platí $u = f(\eta)$. Ježto platí $\eta = d + x = ct + x$, dostaneme

$$u = f(x + ct). \quad \text{vlna proti směru osy } Ox \quad (7.4)$$

7.1. POSTUPNĚ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

{ KP 7-2 —————

Vyjádřete výchylku ve vlně postupující rychlostí c ve směru osy Oy , jestliže v okamžiku $t = 0$ s je výchylka dána funkcí $u(y, 0) = A \sin ky$, kde A a k jsou konstanty.

Řešení:

Podle předešlého nahradíme ve funkci $A \sin ky$ proměnnou y veličinou $y - ct$. Dostaneme

$$u(y, t) = A \sin k(y - ct)$$

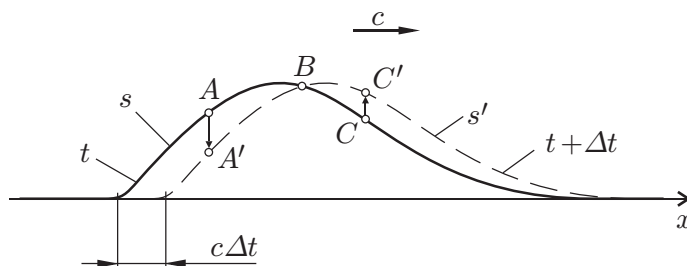
To je hledaný vztah pro výchylku.

Pro výchylku ve vlně, postupující opačným směrem, dostaneme podobně

$$u(y, t) = A \sin k(y + ct)$$

{ KP 7-3 —————

Křivka K v obr. 7.11 nechť znázorňuje tvar vlákna, kterým se šíří příčná lineárně polarizovaná vlna, v okamžiku t . Úkoly: 1. Nakreslete tvar vlákna v okamžiku o něco pozdějším, tj. v okamžiku $t + \Delta t$, kde $\Delta \ll 1$. 2. Rozhodněte, kterým směrem se pohybují v okamžiku t body, které jsou v poloze A, B, C .



Obr. 7.11

obrvln.2-11}

Řešení:

1. V okamžiku $t + \Delta t$ má vlákno tvar daný křivkou K' , která vznikne posunutím křivky K o úsek délky $c\Delta t$ ve směru osy Ox (obr. 7.11).
2. Vlna je podle předpokladu příčná. Všechny body, které se právě pohybují, pohybují se kolmo na osu Ox . Bod vlákna, který byl v okamžiku t v poloze A , bude v okamžiku $t + \Delta t$ v poloze A' , pohybuje se tedy směrem dolů. Bod v poloze B je právě v klidu, bod C se pohybuje svisle vzhůru. Je také zřejmé, že bod v A se pohybuje rychleji, než bod v C .

Je dáno $u(x = 0; t) = F(t)$ Předpokládáme, že ve vlně, která se šíří podél osy Ox , je dána výchylka v bodě $O(x = 0)$ jako funkce času, tj. že je dáno $u(x = 0; t) = F(t)$ (obr. 7.12). V bodě O může být např. zdroj vlnění. Jaká bude výchylka v bodě o obecné souřadnici $x \neq 0$?

Vlna postupující ve směru Ox Do bodu P o souřadnici $x > 0$ dorazí vlna v čase $t = x/c$. Od tohoto okamžiku se bude bod P pohybovat tak, jak se pohyboval dříve bod O . Pohyb bodu P bude vzhledem k pohybu bodu O zpožděn o dobu t . Jeho výchylka. bude tedy dána vztahem

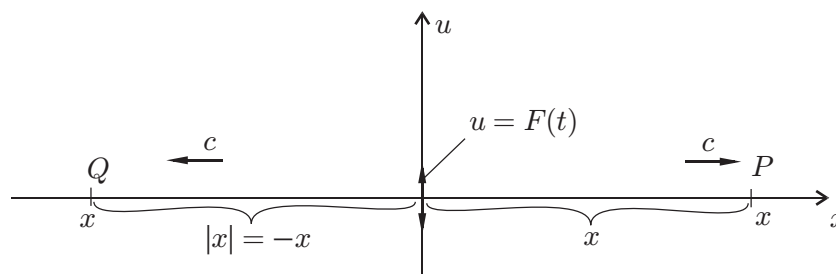
{kmit.2-4}

$$u(x; t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad \text{vlna ve směru osy } Ox \quad (7.5)$$

{ram-157}

Tento vztah vyjadřuje výchylku v obecném bodě x jako funkci času t .

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ



Obr. 7.12

Vlna postupující proti směru Ox Vlna postupující proti směru osy Ox dostihne bod Q o souřadnici $x < 0$ v okamžiku $\tau = |x|/c$. Pohyb bodu Q bude vzhledem k pohybu bodu O zpožděn o τ , jeho výchylka tedy bude dána vztahem $u = F(t - \tau) = F(t - |x|/c)$, tj.

{kmit.2-5}

$$u(x; t) = F\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad \text{vlna proti směru osy } Ox \quad (7.6)$$

neboť $|x| = -x$.

Diskuse: _____

1. Jestliže zdroj vlnění není umístěn v bodě $O(x = 0)$, nýbrž v obecném bodě $Z(x = x_0)$ a jestliže výchylka ve vlně, kterou vysílá podél osy Ox , je v bodě Z dána funkcí $u(x_0; t) = F(t)$, pak výchylka v obecném bodě P o souřadnici x na jedné nebo druhé straně bodu Z je dána vztahem

$$u(x; t) = F\left(t - \frac{|x - x_0|}{c}\right).$$

2. Podobnými vztahy jako vztahy (7.3)–(7.6) je dána i rychlost částic ve vlně, v , (tj. akustická rychlost ve zvukové vlně), jejich zrychlení a , akustický tlak p atd.

3. Vztahy (7.3)–(7.6) vyjadřují i výchylku v obecné rovinné vlně šířící se podél osy Ox .

7.1.5.1 Sinusové (neboli harmonické) vlny

{iHarmonicke}

Sinusové neboli harmonické vlny jsou velmi častým typem vln užívaných v technické praxi. Vznikají tak, že zdroj vln — pružných, zvukových, elektromagnetických — koná harmonické kmity. Každý bod ve vlně, šířící se neohrazeným prostředím, pak koná rovněž harmonické kmity o stejné frekvenci jako zdroj.

Sinusové vlny v akustice přenášejí (nebo vytvářejí) čisté tóny. Ve sdělovací technice se přenášejí sinusovými elektromagnetickými vlnami signály v rozhlasu, televizi, v radarové a laserové technice. Harmonická elektromagnetická vlna o frekvenci $f = (10^{14} - 10^{15})$ Hz představuje monochromatické světlo. Nadto lze každou vlnu obecného tvaru vyjádřit jako součet harmonických vln o vhodných amplitudách, frekvencích a fázích (Fourierova analýza v matematice).

V této části budou studovány základní vlastnosti harmonických vln postupujících v jednorozměrném prostředí, tj. i vln rovinných. Tzv. stojaté harmonické vlny budou studovány v odstavci 8.1.2.

7.1.5.2 Matematické vyjádření postupující harmonické vlny

{cast521E}

Nechť na velmi dlouhé (teoreticky nekonečné) struně, nebo v trubici, nebo v jiném jednorozměrném prostředí, se šíří podél osy Ox oběma směry rychlostí c vlny ze zdroje Z , umístěného

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

v bodě $x = 0$ m, vykonávajícího sinusové kmity. Výchylka ve vlně necht' je v tom bodě dána vztahem

$$u(0; t) = U_m \sin(\omega t + \alpha),$$

kde U_m je **amplituda výchylky**, ω **úhlová frekvence kmitů**, α **počáteční fáze** (neboli fázová konstanta) a $\varphi = \omega t + \alpha$ je **fáze**. Vztah pro výchylku v obecném bodě o souřadnici x dostaneme užitím rovnic (7.5), (7.6):

{kmit.2-6}

$$u(x; t) = U_m \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right], \quad \text{vlna ve směru } Ox \quad (7.7)$$

{ram-158}

{kmit.2-7}

$$u(x; t) = U_m \sin \left[\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]. \quad \text{vlna proti směru } Ox \quad (7.8)$$

{ram-159}

Vztah (7.7) vyjadřuje výchylku v harmonické vlně postupující ve směru osy Ox (tj. akustickou výchylku ve zvukové vlně) nejen pro $x > 0$, nýbrž pro všechna x . Podobné tvrzení platí i o vztahu (7.8).

7.1.5.3 Jak se pohybují částice v sinusové vlně?

Uvažujme o vlně postupující ve směru osy Ox , dané vztahem (7.7). Bod P o souřadnici x_P koná kmity o výchylce

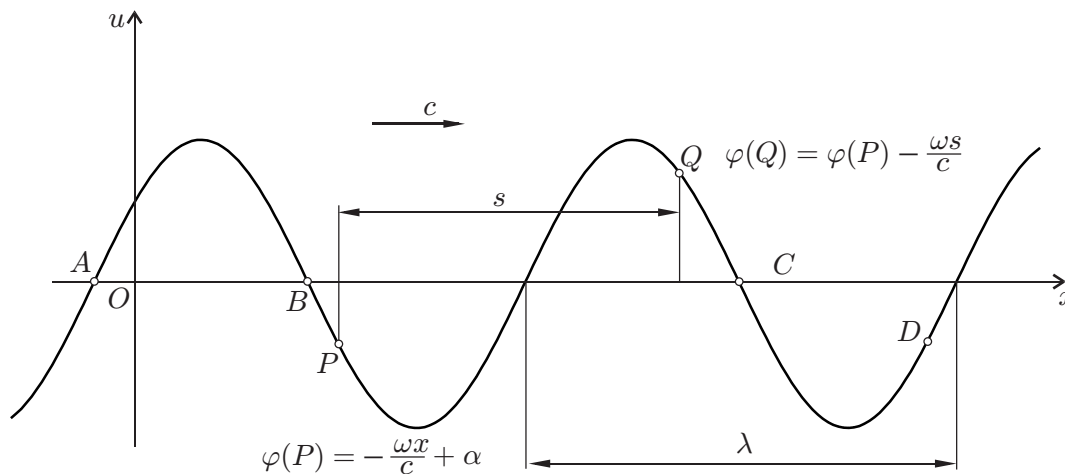
$$u(x_P; t) = U_m \sin \left(\omega t - \frac{x_P}{c} + \alpha \right),$$

tj. koná harmonický pohyb o amplitudě U_m (nezávislé na x), o úhlové frekvenci ω (nezávislé na x) a o fázové konstantě $\varphi = -\omega x_P/c + \alpha$, která závisí na x_P , a která je tedy pro každý bod jiná.

Bod Q ve vzdálenosti s od bodu P ve směru postupu vlny (obr. 7.13) kmitá s fázovou konstantou $\varphi' = -\omega(x + s)/c + \alpha$, která se od φ liší o

$$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = -\frac{\omega s}{c} = -\frac{2\pi s}{Tc}.$$

Délka vlny λ je definována pro harmonickou vlnu jako vzdálenost, do které dospěje vlna



{obr.vln.2-13}

Obr. 7.13

(rychlostí c) za jednu periodu, tj. za dobu $t = T$. Platí tedy

{kmit.2-8}

$$\lambda = Tc. \quad \text{definice vlnové délky} \quad (7.9)$$

{ram-160}

Dosadíme-li odsud do předešlého vztahu, dostaneme $\Delta\varphi = -2\pi s/\lambda$. Vyjádříme tento výsledek přehledně:

Dráze s uražené vlnou odpovídá změna fáze

{kmit.2-9}

$$\Delta\varphi = -2\pi \frac{s}{\lambda}. \quad (7.10)$$

Je-li $s = \pm\lambda$, je $\Delta\varphi = \mp 2\pi$. To značí: Vlnová délka je vzdálenost nejbližších dvou bodů, jejichž fáze se liší o 2π , tj. které kmitají se stejnou fází (poznámka: tímto výrokem lze rovněž vlnovou délku definovat).

{} **KP 7-4** _____

Sinusovka v obr. 7.13 nechť znázorňuje výchylku v příčné vlně o vlnové délce $\lambda = 0,5$ m postupující rychlostí $c = 20 \text{ ms}^{-1}$ ve směru osy Ox a to v jistém okamžiku t . Určete: 1. Dva body, které kmitají se stejnou fází; 2. Dva body, které kmitají s opačnými fázemi; 3. Frekvenci, se kterou kmitají body ve vlně; 4. Fázi kmitů bodu D , který má souřadnici $x_D = x_B + h$, kde $h = 0,3$ m.

Řešení:

1. Body B, C ;
2. Body A, C ;
3. $f = ?$ Platí $f = \frac{1}{T}$, kde T je dáno vztahem (7.9). Tedy

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} = \frac{20 \text{ ms}^{-1}}{0,5 \text{ m}} = 40 \text{ Hz};$$

4. $\varphi(D) = ?$ Fáze kmitů bodu B , tj. veličina $\varphi(B) = \omega t - \frac{\omega x_B}{c} + \alpha$, má v uvažovaném okamžiku nulovou hodnotu, neboť bod B má nulovou výchylku a výchylka roste (do kladných hodnot). Podle vztahu (7.10) má bod D fázi $\varphi(D) = \varphi(B) - 2\pi h/\lambda$, tj.

$$\varphi(D) = -2\pi \frac{h}{\lambda} = -2\pi \frac{0,3 \text{ m}}{0,5 \text{ m}} = -1,2\pi \text{ radiánů}.$$

7.1.5.4 Různé vyjádření harmonických vln

{cast521F}

Vztahy (7.7), (7.8) lze upravit s užitím vztahu $\omega = 2\pi/T$ a vztahu $\lambda = Tc$ takto:

$$u(x;t) = U_m \sin \left[\omega \left(t \mp \frac{x}{c} \right) + \alpha \right] = U_m \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(t \mp \frac{x}{c} \right) + \alpha \right],$$

$$\{5210\} \quad u(x;t) = U_m \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha \right]. \quad - \text{ ve směru } Ox, + \text{ proti směru } Ox \quad (7.11)$$

Jiný užitečný tvar je

$$\{5211\} \quad u(x;t) = U_m \sin (\omega t \mp kx + \alpha), \quad - \text{ ve směru } Ox, + \text{ proti směru } Ox \quad (7.12)$$

kde veličina $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ se nazývá **vlnové číslo**.

7.1. POSTUPNĚ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Velmi často se vyjadřuje výchylka v harmonické vlně v komplexním tvaru s užitím známého vztahu

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \operatorname{Re} e^{i\alpha}, \quad \sin \alpha = \operatorname{Im} e^{i\alpha}.$$

Zde i je imaginární jednotka. Symboly $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ označují reálnou a imaginární část komplexní funkce f . Funkci (7.12) pak lze napsat ve tvaru

$$u(x; t) = U_m \sin(\omega t \mp kx + \alpha) = \operatorname{Im} U_m e^{i(\omega t \mp kx + \alpha)}.$$

V odborné literatuře pojednávající o šíření vlnění se obvykle symboly Im , Re vynechávají a píše se

$$u(x; t) = U_m e^{i(\omega t \mp kx + \alpha)}.$$

{ KP 7-5 _____

Výchylka v lineárně polarizované příčné vlně na vlákne je dána vztahem $u(y; t) = 2 \cdot 10^{-2} \cos(200t + 4y - 1)$ [SI]. Určete: 1. Amplitudu vlny; 2. Směr šíření vlny; 3. Frekvenci vlny f ; 4. Rychlost šíření vlny c ; 5. Vlnovou délku λ ; 6. Výchylku bodu P o souřadnici $y = 7$ m v okamžiku $t = 1$ s; 7. Velikost a směr rychlosti bodu Q o souřadnici $y = 0$ m v okamžiku $t = 0$ s.

Řešení:

1. $U_m = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m};$

2. Vlna se šíří proti směru osy Oy ;

3. $f = \omega/2\pi = 200/2\pi = 31,8 \text{ s}^{-1};$

4. $c = ?$ Upravíme: $u(y; t) = 2 \cdot 10^{-2} \cos[200(t + \frac{y}{50}) - 1]$ [SI]. Srovnáme se vztahem (7.8). Vychází $c = 50 \text{ ms}^{-1};$

5. $\lambda = ?$

$$\lambda = Tc = \frac{c}{f} = \frac{50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{31,8 \text{ s}^{-1}} = 1,57 \text{ m};$$

6. $u(y = 7; t = 1) = 2 \cdot 10^{-2} \cos(200 \cdot 1 + 4 \cdot 7 - 1) \text{ m} = 2 \cdot 10^{-2} \cos(227) \text{ m} = 1,39 \cdot 10^{-2} \text{ m};$

7. $\vec{v} = ?$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 200 \cdot [-\sin(200t + 4y - 1)] \text{ ms}^{-1}.$$

Dosadíme: $y = 0, t = 0 \dots v = -2 \cdot 10^{-2} \cdot 200 \sin(-1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,37 \text{ ms}^{-1};$

Rychlost \vec{v} má velikost $|\vec{v}| = 3,37 \text{ ms}^{-1}$ a je orientována ve směru osy Ou .

7.1.5.5 Fázová rychlost

Rychlost c ve vztahu (7.7) pro výchylku v harmonické vlně se nazývá **fázová rychlost**, a to z tohoto důvodu:

Veličina $\varphi = \omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha$ se nazývá, jak známo, fáze kmitů. Položme si tuto otázku: Jakou rychlostí v se musíme pohybovat ve směru osy Ox , abychom byli stále v místech, v nichž má fáze φ ve vlně (7.7) určitou hodnotu, např. φ_1 . Odpověď: Pohybujeme-li se rychlostí v , má naše souřadnice hodnotu $x(t) = vt + K$, kde K je nějaká konstanta. Fáze pak má hodnotu

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha = \omega \left(t - \frac{vt + K}{c} \right) + \alpha = \omega \frac{t(c - v) + K}{c} + \alpha.$$

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Má-li φ být stálé, tj. na čase nezávislé, musí být $v = c$. Rychlost c je tedy rychlost, se kterou se musíme v harmonické vlně pohybovat, abychom zastihli každý bod ve stejné fázi kmitů. Proto se tato rychlost nazývá fázová.

V analogii s tímto výsledkem nazývá se i veličina c ve vztazích (7.3) – (7.6), vyjadřujících výchylku ve vlně postupující bez změny tvaru, rychlost fázová. Argumenty, tj. výrazy $x \mp ct$ a $t \mp \frac{x}{c}$, se nazývají fáze pohybu.

Poznamenejme, že v některých látkách se vlny nešíří beze změny tvaru, nýbrž tvar vlny se mění, vlna se „deformuje“. Pak je nutno rozlišovat rychlost čela vlny, fázovou rychlost sinusových vln, rychlost šíření energie atd. Tyto rychlosti jsou obecně různé. Tento jev se nazývá **disperze vlnění**.

7.1.6 Dopplerův jev

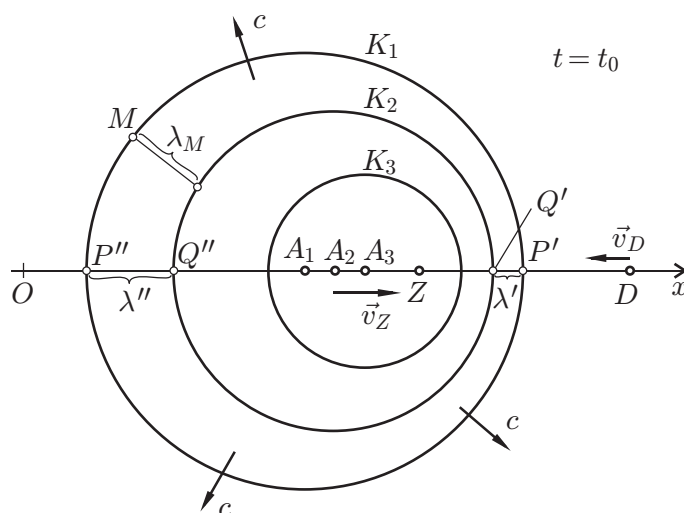
DopplerůvJev}



Co je to Dopplerův jev? Jestliže zdroj Z periodických vln koná kmity s frekvencí f_Z , pak detektor těchto vln, např. posluchač v případě vln akustických, přijímá vlny s frekvencí f_D , která je rovna f_Z jen tehdy, jestliže se vzdálenost detektoru od zdroje nemění. Jestliže se tato vzdálenost mění, tj. jestliže se zdroj a detektor vůči sobě pohybují, jsou frekvence f_D , f_Z různé, $f_D \neq f_Z$. Tento jev se nazývá **Dopplerův jev** a projevuje se jak u vln mechanických, tak u vln elektromagnetických.

7.1.6.1 Příklady Dopplerova jevu

1. Přijíždí-li motocykl, jehož výfukové plyny proudí z výfukového potrubí periodicky s frekvencí f_Z , pak člověk, který stojí u silnice, slyší zvuk o frekvenci $f_1 > f_Z$. Jestliže se motocykl vzdaluje, slyší člověk zvuk o frekvenci $f_2 < f_Z$.
2. Vysílá-li elektromagnetické vlny o frekvenci f_Z zdroj (radiový vysílač) umístěný v družici Země nebo v kosmické sondě, pak frekvence f_D , kterou zaznamená přijímač na Zemi, není (obecně) rovna f_Z . Je-li frekvence f_Z známa a změřil-li se f_D , lze určit radiální složku rychlosti družice vzhledem k Zemi (měření rychlosti družic).
3. Jedoucí vozidlo, na které dopadá radarová vlna (tj. elektromagnetická vlna o vlnové délce řádu 10^{-2} m), se stává sekundárním zdrojem odražených elektromagnetických vln. Detektor odražených vln, umístěný obvykle poblíž zdroje, zaznamená jinou frekvenci než má zdroj (měření rychlosti vozidel — viz příklad KP 7-7).
4. Vlnová délka světla, vysílaného atomy pohybujícími se v plynové výbojce, závisí (zcela nepatrně) na velikosti a směru jejich rychlosti (tzv. Dopplerova širka spektrálních čar).
5. Frekvence světla, které k nám přichází ze vzdálených oblastí vesmíru, je menší než frekvence světla vysílaného atomy stejného druhu na Zemi (tzv. rudý posuv ve spektru hvězd — světlo hvězd má nepatrně větší vlnovou délku a příslušné spektrální čáry jsou posunuty směrem k červenému okraji spektra ve srovnání se spektrem pozemských zdrojů). Svědčí to o expanzi vesmíru.
6. Jede-li po silnici stálou rychlostí kolona vozidel stejně od sebe vzdálených, je perioda, se kterou vozy míjí pozorovatele pohybujícího se proti ní, menší než perioda, se kterou míjí klidného pozorovatele.



Obr. 7.14

{obr.vln.2-14}

7.1.6.2 Zdroj v pohybu — vlnová délka

Budeme uvažovat o mechanických vlnách, např. o vlnách akustických, vyzařovaných všemi směry bodovým zdrojem o frekvenci f , který se pohybuje stálou rychlostí \vec{u} vzhledem ke vzduchu. Budeme předpokládat, že platí $u < c$, kde c je rychlost zvuku ve vzduchu. Šíření vln je naznačeno v obr. 7.14 pro určitý okamžik t_0 . Kulové vlnoplochy K_1, K_2, K_3 byly vyslány zdrojem Z v okamžicích $t_1 = 0$ s, $t_2 = T$, $t_3 = 2T$, kde T je perioda kmitů. V těchto okamžicích byl zdroj postupně v bodech A_1, A_2, A_3 , které jsou od sebe vzdáleny o uT . Kulové vlnoplochy expandují rychlostí c . Vzdálenost sousedních vlnoploch, měřená kolmo na vlnoplochu, je vlnová délka v příslušném místě ($\lambda', \lambda'', \lambda_M$ atd.). Nejmenší vlnová délka (λ') je před zdrojem, největší (λ'') za zdrojem. Hodnoty veličin λ' a λ'' určíme takto:

Z bodu A_1 se šířila vlna do bodu P' po dobu t_0 , platí tedy $A_1P' = ct_0$. Vlnoplochu K_2 vyslal zdroj v bodě A_2 v okamžiku $t_2 = T$, platí tedy $A_2Q' = c(t_0 - T)$. Z obr. 7.14 je zřejmé, že platí

$$\lambda' = A_1P' - A_1Q' = A_1P' - (A_1A_2 + A_2Q') = ct_0 - [uT + c(t_0 - T)] = (c - u)T = \left(1 - \frac{u}{c}\right) \lambda,$$

kde $\lambda = cT$ je vlnová délka vln šířících se z klidného zdroje. Podobně dostaneme vztah $\lambda'' = (c + u)T$. Zavedeme-li osu Ox vždy tak, že ji orientujeme od zdroje Z do místa, kde vlnovou délku zjišťujeme, lze oba odvozené (respektive uvedené) vztahy vyjádřit ve tvaru $\lambda'(\lambda'') = (c - u_x)T$. Zde u_x je průmět rychlosti \vec{u} do osy Ox ($u_x \geq 0$).

Frekvenci kmitů, kterou zaznamená detektor D , pohybující se vzhledem ke vzduchu rychlostí \vec{v} ($v < c$) buď směrem ke zdroji Z , nebo směrem opačným, označíme f' . Určíme ji: Zavedeme osu Ox orientovanou od Z k D . Relativní rychlost vlnění vzhledem k detektoru c' je pak dána vztahem $c' = c - v_x$. Frekvence kmitů f' , které zaznamená zdroj, je číselně rovna počtu vln (o délce λ'), které jej minou během 1 s. Označíme-li Δt délku libovolného časového intervalu, v němž zkoumaný děj probíhá, platí

$$f' = \frac{c' \Delta t}{\lambda'} \frac{1}{\Delta t} = \frac{c - v_x}{(c - u_x)T}, \quad \text{tj.}$$

{5212}

$$f' = \frac{c - v_x}{c - u_x} f. \quad (7.13)$$

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Význam užitých symbolů: f — frekvence zdroje Z ; f' — frekvence zachycená detektorem D ; u_x — průmět rychlosti \vec{u} zdroje Z do osy Ox , orientované od Z k D ; v_x — průmět rychlosti \vec{v} detektoru D do Ox (obr. 7.14).

Pohybuje-li se navíc i vzduch vzhledem k Zemi stálou rychlostí \vec{V} ležící ve spojnici (Z , D), jsou rychlosti zdroje a detektoru vzhledem k Zemi (\vec{u}_0 a \vec{v}_0), dány vztahy

$$\vec{u}_0 = \vec{u} + \vec{V}, \quad \vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{V}.$$

Pro průměty rychlostí do osy Ox odtud plyne $u_x = u_{0x} - V_x$, $v_x = v_{0x} - V_x$. Dosadíme-li do vztahu (7.13), dostaneme

$$\{5213\} \quad f' = \frac{c + V_x - v_{0x}}{c + V_x - u_{0x}} f. \quad (7.14)$$

Význam užitých symbolů: c — rychlost zvuku ve vzduchu, V_x — průmět rychlosti vzduchu vzhledem k Zemi do osy Ox , orientované od Z k D , u_{0x} — průmět rychlosti zdroje vzhledem k Zemi do Ox , v_{0x} — průmět rychlosti detektoru vzhledem k Zemi do Ox .

Diskuse vztahu (7.14): -

1. Vztah (7.14) zahrnuje v sobě i vztah (7.13) ($V_x = 0 \rightarrow u_{0x} = u_x$, $v_{0x} = v_x$).
2. Jestliže se zdroj a detektor k sobě přibližují, je $u_{0x} > v_{0x}$, tedy $f' > f$. Jestliže se zdroj a detektor od sebe vzdalují, je $f' < f$.
3. Je-li vzdálenost zdroje a detektoru stálá, je $f' = f$ pro jakékoliv V_x . Pouhý pohyb vzduchu — vítr — nemá tedy vliv na přijímanou frekvenci.

Zjednodušený vztah pro frekvenci Mají-li zdroj a detektor tak malé rychlosti, že platí $u \ll c$, $v \ll c$, lze vztah (7.13) upravit:

$$f' = \frac{c - v_x}{c - u_x} f = \frac{1 - \frac{v_x}{c}}{1 - \frac{u_x}{c}} f = \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \left(1 + \frac{u_x}{c} - \dots\right) f,$$

kde jsme užili rozvoje funkce $(1 - u_x/c)^{-1}$. Vynásobíme-li výrazy v závorkách a zanedbáme-li nevypsáné členy i člen $u_x v_x / c^2$, dostaneme přibližné vztahy

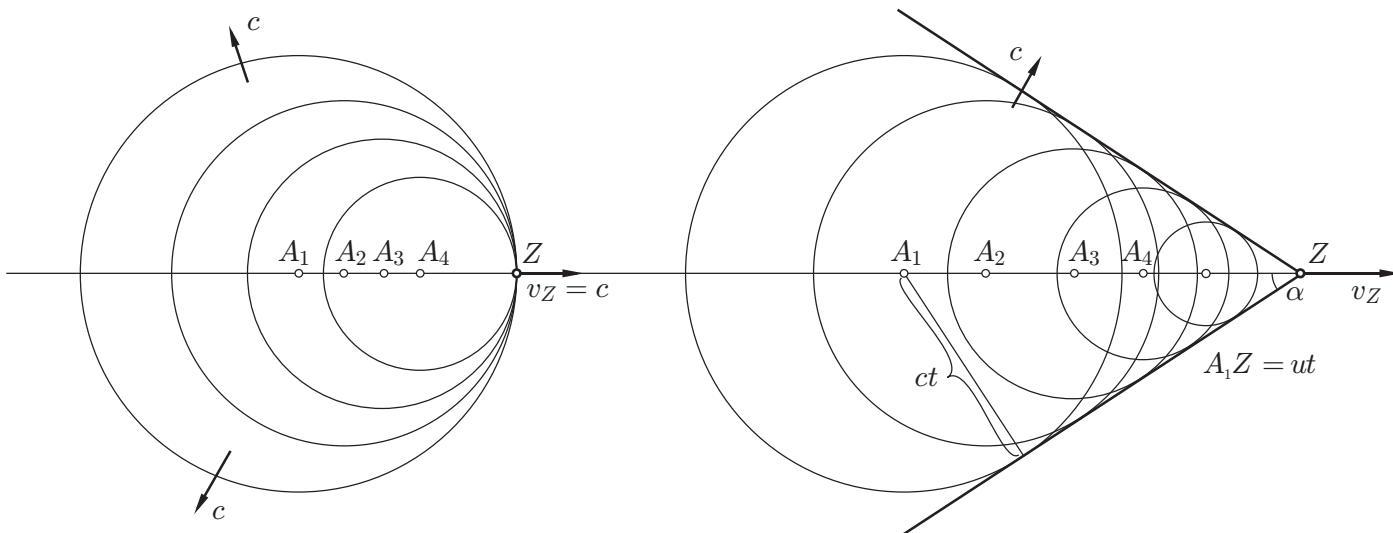
$$\{5214a\} \quad f' = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) f, \quad Z \text{ a } D \text{ se k sobě přibližují} \quad (7.15)$$

$$\{5214b\} \quad f' = \left(1 + \frac{v'_r}{c}\right) f. \quad Z \text{ a } D \text{ se od sebe vzdalují} \quad (7.16)$$

Zde je $v_r = u_x - v_x$, respektive $v'_r = v_x - u_x$ relativní rychlost, se kterou se zdroj a detektor k sobě přibližují, respektive od sebe vzdalují.

Dopplerův jev pro elektromagnetické vlny Elektromagnetické vlny se šíří i vakuem, neboť na rozdíl od mechanických vln nemusejí mít nositele — látková prostředí. K odvození vztahu pro přijímanou frekvenci při vzájemném pohybu zdroje a detektoru nelze užít úvahy provedené pro mechanická vlny. Relativistická teorie elektromagnetického pole vede ke vztahu $f' = (c \pm v_r)^{1/2} \cdot (c \mp v_r)^{-1/2} f$, kde v_r je rychlost, se kterou se zdroj a detektor k sobě přibližují (horní znaménka) nebo od sebe vzdalují (dolní znaménka) a kde c je rychlost světla ve vakuu. Je-li $v_r \ll c$, je přijímaná frekvence dána přibližnými vztahy (7.15) a (7.16) shodnými se vztahy pro mechanické vlny.

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

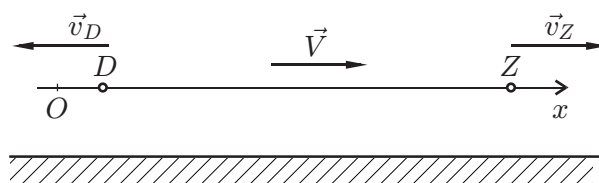


{obr5215}

Obr. 7.15

Balistická vlna Vzroste-li rychlost zdroje vzhledem ke vzduchu tak, že nabude rychlosti zvuku ve vzduchu, budou mít vlnoplochy vzájemnou polohu naznačenou na obr. 7.15a. Při dalším vzrůstu rychlosti zdroje předbíhá zdroj čelo zvukové vlny a vytvoří se tzv. Machův kužel. Je to obálka kulových čel vln, vyslaných v předchozích fázích pohybu. Tato vlna se obvykle nazývá balistická vlna. Pro úhel (obr. 7.15) platí $\operatorname{tg} \alpha = c/u$, kde c je rychlost zvuku ve vzduchu a u rychlost zdroje. Termodynamické děje ve vzduchu — změny tlaku, teploty atd. — v balistické vlně, která vzniká při pohybu nadzvukových objektů, se podstatně liší od dějů v akustických vlnách.

Tvar balistické vlny lze nejlépe pozorovat ve vlnění, které vzniká na vodní hladině za rychle jedoucí motorovou lodí.



{obr5216}

Obr. 7.16

{ KP 7-6 —————

Akustický zdroj, detektor a vzduch se pohybují rychlostmi o velikostech $u = 10 \text{ ms}^{-1}$, $v = 6 \text{ ms}^{-1}$, $V = 15 \text{ ms}^{-1}$ směrem naznačeným na obr. 7.16. Detektor registruje frekvenci 450 Hz. Jakou frekvenci má zdroj? Rychlost zvuku ve vzduchu je 331 ms^{-1} .

Řešení:

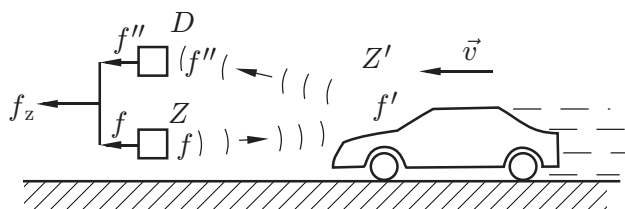
Zavedeme osu Ox podle obr. 7.16. Závislost mezi frekvencí zdroje f a frekvencí f' přijímanou detektorem je vyjádřena vztahem (7.14), kde

$$c = 331 \text{ ms}^{-1}, \quad u_{0x} = -10 \text{ ms}^{-1}, \quad v_{0x} = 6 \text{ ms}^{-1},$$

pak

$$f = \frac{c + V_x - u_{0x}}{c + V_x - v_{0x}} = \frac{331 - 15 + 10}{331 - 15 - 6} 450 \text{ Hz} = 473 \text{ Hz}.$$

7.1. POSTUPNĚ MECHANICKÉ VLNĚNÍ



{obr5217}

Obr. 7.17

{radar} **KP 7-7** _____

Klidný zdroj Z vyzařuje radarové vlny o vlnové délce $\lambda = 30$ mm proti osobnímu automobilu přijíždějícímu na dálnici (obr. 7.17). Od něj se vlny odrážejí a dopadají na detektor umístěný u zdroje. Složením elektrických kmitů o frekvenci f ze zdroje a kmitů o frekvenci f'' z detektoru vznikají zázněje o frekvenci $f_z = 2000$ Hz. Řešte úkoly: 1. Vysvětlete vznik záznějů; 2. Určete frekvenci zdroje f ; 3. Určete obecně frekvenci f' , se kterou dopadá vlnění na automobil; 4. Určete obecně frekvenci f'' , kterou zaznamená detektor; 5. Rozhodněte, zda řidič porušil předpis o nejvyšší dovolené rychlosti.

Doplňující úkol: Řešte příklad za předpokladu, že v zadání se změní pouze slovo „přijíždějící“ na „odjíždějící“.

Řešení:

- Automobil přijíždí ke zdroji Z . Elektromagnetické vlny na něj dopadají s frekvencí f' , která je větší než frekvence f zdroje. Vlny se od automobilu odrážejí. Tím se stává čelo automobilu sekundárním zdrojem Z' , který vysílá (tj. odráží) vlny s frekvencí f' a který se pohybuje k detektoru D . Detektor, který je v klidu, přijímá frekvenci $f'' > f'$. Složením elektrických kmitů ze zdroje (frekvence f) a kmitů o frekvenci f'' z detektoru (elektrické impulsy z antény, zesílené v zesilovači) vznikají elektrické zázněje o rozdílové frekvenci $f_z = |f - f''|$.

2.

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{-2}} = 1 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

- Automobil se přibližuje ke zdroji Z rychlostí $v \ll c$, kde c je rychlost světla ve vakuu. Podle vztahu (7.15) a odstavce, který po něm následuje, je frekvence f' , se kterou na něj dopadají vlny, rovna

$$f' = \left(1 - \frac{v}{c}\right) f.$$

- Automobil je současně sekundárním zdrojem Z' o frekvenci f' , který se pohybuje k detektoru. Opět podle vztahu (7.15) platí pro přijímanou frekvenci f''

$$f'' = \left(1 - \frac{v}{c}\right) f' = \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 f.$$

- Určíme rychlost automobilu. Známe frekvenci záznějů f_z , pro kterou platí

$$f_z = |f - f''| = f'' - f = \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 f - f \doteq \left(1 + 2\frac{v}{c}\right) f - f = 2\frac{v}{c} f.$$

Odtud plyne

$$v = \frac{cf_z}{2f} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 2000}{2 \cdot 1 \cdot 10^{10}} = 30 \text{ ms}^{-1} = 108 \text{ kmh}^{-1}$$

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Nejvyšší dovolená rychlost na dálnici je 130 km/h. Nemělo-li vozidlo předepsanou menší maximální rychlost, řidič neporušil předpisy.

Poznámka: Stupnice přístroje, ukazujícího rozdílovou frekvenci, je cejchována přímo v km/h. Doplňující úkol řešte samostatně.

7.1.7 Akustické vlnění

Akustickým vlněním se nazývá vlnění šířící se v plynech a kapalinách (a někdy i podélné vlnění v pevných látkách), a sice to vlnění, které obsahuje (nebo které lze rozložit na) harmonické vlny o frekvencích z intervalu (16; 20 000) Hz. Toto vlnění vyvolává u člověka zvukové neboli akustické vjemy, člověk slyší zvuk.

Kmitů (nebo pohyb) elementů látky, jíž se šíří obecná akustická vlna, mají většinou obecný neperiodický průběh. Takovéto vlny jsou člověkem vnímány jako obecné zvuky.

Zvuk s periodickým časovým průběhem se nazývá **tón**. Zvuk s harmonickým časovým průběhem se nazývá **jednoduchý tón**. Každou periodickou vlnu, tj. i každý tón (podobně jako každé periodické kmitání), lze rozložit na spočetné množství harmonických vln, tj. jednoduchých tónů. Nejnižší z frekvencí obsažených v tónu udává (tj. podmiňuje) jeho **výšku** a nazývá se **základní frekvence**. Jednoduché tóny ostatních (větších) frekvencí se nazývají **vyšší harmonické tóny**. Udávají **barvu** tónu.

Mohutnost a kvalita zvukového počítku závisí na energii, kterou zvuková vlna přenáší a na frekvencích harmonických vln ve zvukové vlně obsažených. Soubor frekvencí ve zvukové vlně obsažených se nazývá **frekvenční spektrum**. Jeho rozbořením se zabývá zvuková **spektrální analýza**. Zkoumáním vlastností zvuku z hlediska fyzikálních zákonitostí, které se uplatňují při jeho buzení, šíření a detekci, se zabývá **fyzikální akustika**. Zkoumáním účinku vlnění na lidský sluch se zabývá **fyzilogiká akustika**.

Vlnění, obsahující pouze harmonické složky o frekvencích nižších než 16 Hz, se nazývá **infrazvuk**. Vlnění, obsahující pouze harmonické složky o frekvencích vyšších než 20 000 Hz, se nazývá **ultrazvuk**. Zvuková vlna s obecným časovým průběhem obsahuje většinou i infrazvukové a ultrazvukové složky.

Hlavní fyzikální zákonitosti dějů, které probíhají ve vlnách s různým časovým průběhem šířících se různými plyny a kapalinami, jsou většinou shodné, nebo jsou si velmi podobné. Jsou důležité jak z hlediska jejich zvukových účinků, tak i z hlediska jejich vlivu na děje, které probíhají v různých technických zařízeních. Proto budou předmětem našich dalších úvah.

7.1.7.1 Diferenciální rovnice vlnění

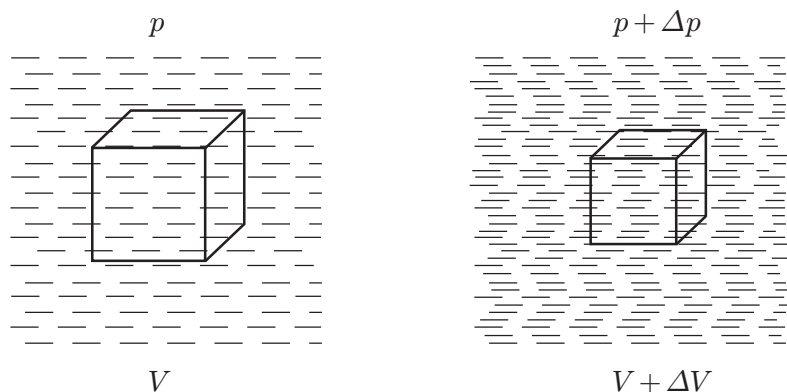
Pružné vlny v kapalinách a plynech V kapalinách a plynech se mohou šířit pouze podélné pružné vlny (viz odstavec 7.1.2). Z nich nejdůležitější jsou rovinné vlny. Mohou se šířit jednak v neohrazeném prostředí, jednak v trubicích (tj. v potrubí) tak, že všechny elementy látky se pohybují v přímkách rovnoběžným se směrem postupu vlny (v trubici je to směr její osy).

Odvodíme současně dva důležité výsledky: 1. **Diferenciální rovnice vlnění** (7.28), tj. parciální diferenciální rovnice, které vyhovuje výchylka (nebo tlak) elementů; 2. **Vztah pro výpočet rychlosti podélné vlny** z parametrů, charakterizujících prostředí (rovnice (7.27)).

Předpoklady o látce, kterou se šíří vlny. Budeme předpokládat, že tekutina (kapalina, plyn), kterou se šíří vlnění, je spojité a homogenní prostředí a že má zanedbatelné vnitřní tření, takže nedochází k disipaci energie (tj. k nevratné přeměně mechanické energie v energii tepelného

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

pohybu). Původní hustota prostředí necht' je ρ_0 , původní tlak necht' je p_0 (např. barometrický tlak ve vzduchu).



{obr5218}

Obr. 7.18

Pružné vlastnosti kapalin a plynů jsou charakterizovány **modulem objemové pružnosti** K , definovaným takto (obr. 7.18): Necht' tlak p v tekutině se nepatrně změní na $p + \Delta p$. Pak element, který měl při tlaku p objem V , nabude objemu $V + \Delta V$ (je-li $\Delta p > 0$, je $\Delta V < 0$).

Definice modulu objemové pružnosti K zní:

{5215}

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad \text{modul objemové pružnosti} \quad (7.17)$$

Jednotka: $1 \text{ Nm} = 1 \text{ Pa}$. Látky málo stlačitelné mají $\Delta V/V$ malé, tj. K velké. **Definice stlačitelnosti** γ zní:

$$\gamma = \frac{1}{K} \quad \text{stlačitelnost}$$

Předpoklady o vlně. Budeme uvažovat o rovinné vlně, která může být buď neohraničená, anebo omezená na trubici. Všechny elementy prostředí se přitom pohybují v přímce dané směrem šíření vlny. Zavedeme osu Ox ve směru (nebo proti směru) šíření vlny. Pro průmět vektoru posunutí z rovnovážné polohy \vec{u} do osy Ox , tj. pro výchylku u , platí $u \geq 0$. Připomeňme, že v harmonické zvukové vlně se veličina u nazývá **akustická výchylka**. Při průchodu vlny bude u funkcí veličin x, t : $u = u(x; t)$. Budeme předpokládat, že $|u|$ je velmi malá veličina a že funkce $u(x; t)$ má spojitě derivace třetího řádu.

Každý element prostředí se při průchodu vlny posunuje jako celek (jeho výchylka z původní polohy je u) a současně se deformuje — stlačuje nebo prodlužuje (viz obr. 7.19). Současně se mění i tlak v látce. Celkový tlak p_c v látce při průchodu vlny napíšeme ve tvaru

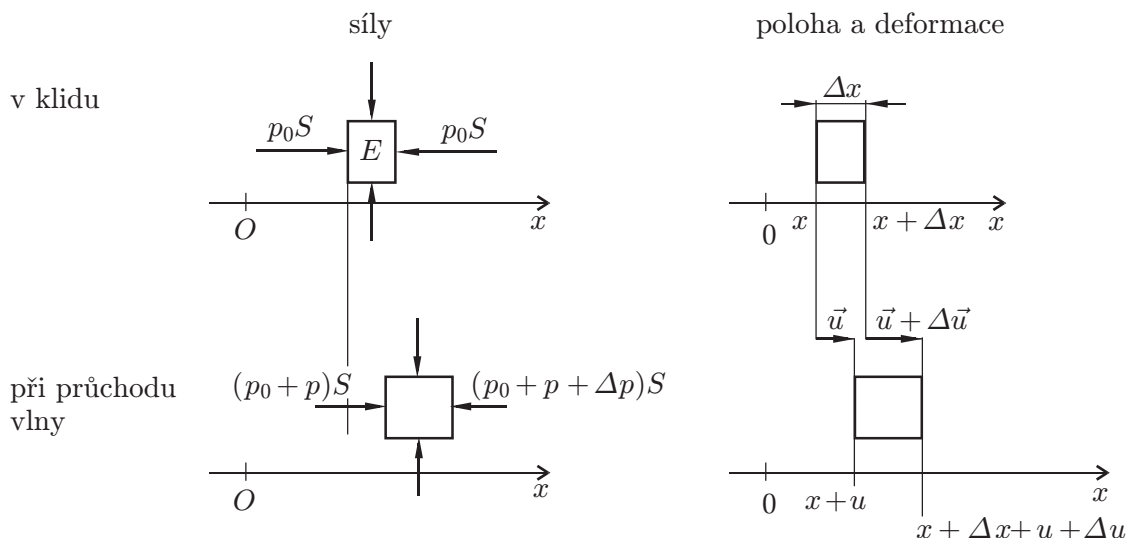
$$p_c = p_0 + p(x, t).$$

V harmonické zvukové vlně se veličina p nazývá **akustický tlak**. Platí $p \geq 0$. Ve slyšitelných akustických vlnách, tj. ve vlnách, jež je možno vnímat bez pocitu bolesti nebo bez poškození sluchových orgánů, je $|p| \ll p_0$.

Odvození diferenciální rovnice vlnění. Diferenciální rovnici vlnění pro výchylku $u(x; t)$ v **celé vlně**, tj. v celém prostředí, odvodíme tak, že budeme uvažovat o ději probíhající v **jediném malém elementu** a v jeho nejbližším okolí. Tato metoda odvozování diferenciálních rovnic je běžná v teorii pružnosti, hydromechanice, elektromagnetismu atd.

Na obr. 7.19 je naznačen v horní části libovolně vybraný malý element E látky v původní

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ



{obr5219}

Obr. 7.19

poloze. Jeho průřez je S , jeho levá stěna má souřadnici x , pravá souřadnici $x + \Delta x$. Tloušťka elementu Δx je velmi malá ve srovnání s výchylkou u . Při průchodu vlny se element posunul jako celek a současně se deformoval (dolní část obr. 7.19, element je nakreslen prodloužen). Na levé straně má tlak velikost $p_0 + p$ a tlaková síla velikost $(p_0 + p)S$. Na pravé straně mají tyto veličiny velikost $p_0 + p + \Delta p$, $(p_0 + p + \Delta p)S$. Tlakové síly působící na element E ve směrech kolmých na Ox mají výslednici nulovou, neboť element se pohybuje podél osy Ox .

Pohybová rovnice elementu zní

$$\{5216\} \quad \Delta m \vec{a} = \Delta \vec{F}, \quad (7.18)$$

kde $\Delta \vec{F}$ je výsledná síla působící na element, jehož hmotnost je Δm a kde \vec{a} je jeho zrychlení. Hmotnost elementu se během pohybu nemění, je rovna $\Delta m = \rho_0 \Delta x S$. Z vektorové rovnice (7.18) dostaneme rovnici skalární promítnutím do osy Ox : $\Delta m a_x = \Delta F_x$. Zde je $a_x = \frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial t^2}$ (symbolu pro parciální derivaci jsme užili proto, že u je funkcí dvou proměnných). Dále zřejmě platí $\Delta F_x = (p_0 + p)S - (p_0 + p + \Delta p)S$. Dosazením dostaneme vztah

$$\rho_0 \Delta x S \frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial t^2} = (p_0 + p)S - (p_0 + p + \Delta p)S$$

a z něho vztah

$$\{5217\} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial t^2} = -\frac{\Delta p}{\Delta x}. \quad (7.19)$$

Nyní provedeme limitní přechod $\Delta x \rightarrow 0$. Levá strana rovnice (7.19) se přitom nemění, pro pravou dostaneme (až na znaménko)

$$\{5218\} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x + \Delta x, t) - p(x, t)}{\Delta x} = -\frac{\partial p(x;t)}{\partial x}. \quad (7.20)$$

Čas t je při tomto limitním procesu neměnný parametr. Rovnice (7.19) nabude tvaru

$$\{5219\} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(x;t)}{\partial x}. \quad (7.21)$$

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

V této rovnici jsou dvě neznámé veličiny: $u(x, t)$, $p(x, t)$. Jednu z nich, např. $p(x, t)$, vyjádříme pomocí druhé takto: Napíšeme vztah (7.17) pro element E , který při změně tlaku z p_0 na $p_0 + p$ změnil objem z $S\Delta x$ na $S(\Delta x + \Delta u)$:

$$K = -\frac{p}{\frac{\Delta V}{V}} = -\frac{p}{\frac{S \cdot \Delta u}{S \cdot \Delta x}} \Rightarrow p = -K \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

V limitě pro $\Delta x \rightarrow 0$ dostaneme

$$\{5220\} \quad p(x; t) = -K \frac{\partial u(x; t)}{\partial x}. \quad (7.22)$$

Dosadíme-li odsud do rovnice (7.21), dostaneme po úpravě rovnici

$$\{5221a\} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (7.23)$$

To je hledaná parciální diferenciální rovnice pro výchylku $u(x; t)$. Původní hustotu prostředí jsme zde označili namísto ρ_0 symbolem ρ .

Shodnou rovnici pro akustický tlak dostaneme tak, že rovnici (7.23) derivujeme parciálně podle x , na pravé straně zaměníme pořadí derivování podle t a x (což je dovoleno podle předpokladu o spojitosti třetí derivace) a užijeme vztahu (7.21). Dostaneme

$$\{5221b\} \quad \frac{\partial^2 p(x; t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 p(x; t)}{\partial t^2} = 0. \quad (7.24)$$

Co plyne z rovnic (7.23), (7.24)? Řešením rovnice (7.23) jsou funkce

$$\{5222a\} \quad u(x; t) = f\left(x - \sqrt{\frac{K}{\rho}}t\right), \quad (7.25)$$

$$\{5222b\} \quad u(x; t) = F\left(x + \sqrt{\frac{K}{\rho}}t\right), \quad (7.26)$$

kde $f(y)$ a $F(y)$ jsou libovolné funkce, které mají druhou derivaci (podle y). Nebudeme uvádět, jak se na to přijde, dokážeme však, že jsou řešením. Položíme $y = x - \sqrt{\frac{K}{\rho}}t$ a derivujeme:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{\partial y(x; t)}{\partial t} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \left(-\sqrt{\frac{K}{\rho}}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2} \cdot \frac{K}{\rho};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{\partial y(x; t)}{\partial x} = \frac{df(y)}{dy} \cdot 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2}.$$

Dosazením do (7.23) se přesvědčíme, že funkce (7.25) tuto rovnici splňuje identicky, tj. že je jejím řešením. Podobně to plyne pro funkci (7.26).

Funkce (7.25), (7.26) však vyjadřují výchylku ve vlnách, které postupují beze změny tvaru ve směru a proti směru osy Ox rychlostí c , kde

$$\{5223\} \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad \text{rychlost podélné vlny} \quad (7.27)$$

(viz odstavec 7.1.5.2). Rovněž rovnice (7.24) pro akustický tlak má řešení dané vztahy (7.25), (7.26). Obě rovnice (7.23), (7.24) lze tedy napsat ve tvaru

{5224}

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 0. \quad \text{vlnová diferenciální rovnice} \quad (7.28)$$

Tato rovnice, jejímž řešením jsou funkce $f(x-ct)$ a $f(x+ct)$, se nazývá (jednorozměrná) **vlnová diferenciální rovnice** (nebo také **D'Alembertova vlnová rovnice**).

Hlavní výsledek: V kapalině nebo v plynu se mohou šířit rovinné vlny beze změny tvaru. Jejich rychlost je dána vztahem (7.27).

Poznámky: —————

1. Beze změny tvaru vlny se šíří výchylka i akustický tlak. 2. Při odvození rovnice (7.23) jsme vůbec nepoužili předpokladu, že pohyb prostředí je vlnění, tj. že se deformace šíří konečnou rychlostí beze změny tvaru. Možnost existence vlny vyplynula teprve z toho, že funkce (7.25), (7.26) jsou řešením rovnice (7.23).

Diskuse: —————

1. Akustický tlak a akustická výchylka vyhovují stejné diferenciální rovnici. Je-li známa funkce, udávající výchylku ve vlně, určí se akustický tlak ze vztahu (7.22).

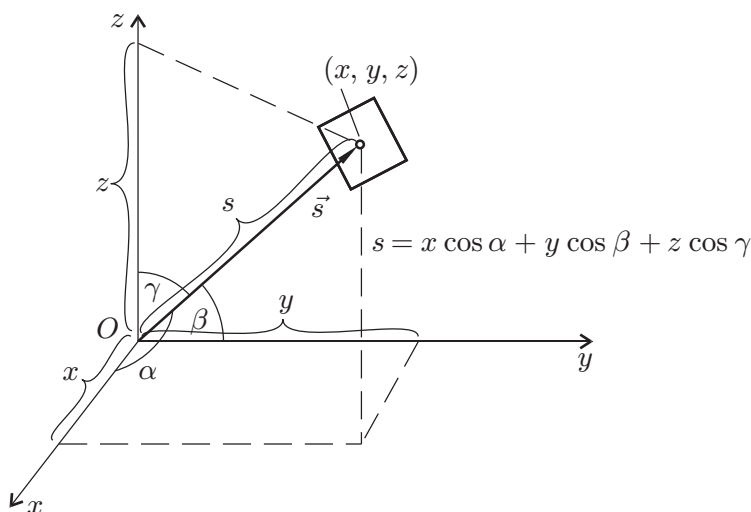
2. Rovnici (7.23) vyhovují nejen funkce (7.25), (7.26), nýbrž i jejich lineární kombinace, tj. funkce

$$u(x;t) = C_1 f\left(x - \sqrt{\frac{K}{\rho}} t\right) + C_2 F\left(x + \sqrt{\frac{K}{\rho}} t\right),$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty. Pro $C_1 = 1, C_2 = 1$ vyjadřuje tento vztah zákon superpozice (viz odstavec 7.1.4).

3. D'Alembertově vlnové rovnici (7.28) vyhovují i veličiny, které charakterizují i rovinné vlny příčné, vlny na vlákně, rovinné vlny elektromagnetické atd., neboť také tyto vlny se šíří beze změny tvaru.

4. Šíření vln lze užít k určování pružných vlastností látky. Změříme-li např. rychlost vlnění c ve vodě, můžeme určit její modul objemové pružnosti K ze vztahu (7.27).



{obr5220}

Obr. 7.20

7.1. POSTUPNĚ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

D'Alembertova vlnová rovnice Šíří-li se pružným prostředím beze změny tvaru obecným směrem Os (obr. 7.20) rovinná vlna rychlostí c , je výchylka \vec{u} dána vektorovou funkcí

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{f}(s - ct),$$

kde

$$s = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

Derivováním funkce f a dosazením lze dokázat, že \vec{u} vyhovuje rovnici

$$\{5225a\} \quad \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad \text{D'Alembertova vlnová rovnice} \quad (7.29)$$

neboli

$$\{5225b\} \quad \Delta \vec{u} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad (7.30)$$

kde jsme zavedli Laplaceův diferenciální operátor $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Funkce $u_r(x, y, z; t)$, udávající průmět vektoru \vec{u} do libovolného směru \vec{r} , nebo tlak $p(x, y, z; t)$ ve vlně šířící se v plynu nebo v kapalině, vyhovuje skalární diferenciální rovnici

$$\{5225c\} \quad \Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (7.31)$$

Každá z rovnic (7.29)–(7.31) se nazývá (obecná) D'Alembertova vlnová rovnice. Rovnice (7.23), (7.24), (7.28) jsou jejím zvláštním případem.

D'Alembertova rovnice má velmi rozsáhlé aplikace. Vyhovují jí nejen veličiny, charakterizující pružné vlny, nýbrž i veličiny, charakterizující vlny elektromagnetické atd., a to nejen vlny rovinné, nýbrž i vlny kulové, válcové i vlny obecného tvaru.

7.1.7.2 Vlnění v plynech, tyčích a vláknech

Vlnění v plynech Při šíření vlnění v plynech, jež je důležité zejména z hlediska akustiky, platí všechny obecné zákonitosti a vztahy uvedené v předešlém odstavci. Hlavním cílem této části bude odvození vztahů (7.34), (7.35) pro výpočet rychlosti šíření zvuku v plynu. Rychlost šíření vlnění v plynu je dána obecným vztahem (7.27), kde modul objemové pružnosti K je definován vztahem (7.17). Tento vztah však nedefinuje veličinu K pro plyny jednoznačně. Na rozdíl od kapalin závisí totiž změna objemu plynu jak na změně jeho tlaku, tak (a to podstatně) na změně jeho teploty, neboť veličiny p , V , T jsou vázány stavovou rovnicí (4.4). Jestliže se např. při změně objemu plynu jeho teplota nemění, platí vztah $pV = \text{konst.}$. Avšak v akustických vlnách jsou změny objemu a tlaku relativně rychlé, takže během nich téměř nedochází k výměně tepla mezi sousedními elementy plynu. Nejsou to děje izotermické, nýbrž přibližně **adiabatické**. Mění se při nich jak objem a tlak, tak i teplota jednotlivých elementů, plynu. Při kompresi se zahřívají, při expanzi ochlazují. Objem jednotlivých elementů souvisí s tlakem plynu podle vztahu $pV^\kappa = \text{konst.}$, kde $\kappa = c_p/c_V$ je Poissonova konstanta (rovnice (5.14)).

K určení veličiny K podle vztahu (7.17) je nutno znát vztah mezi změnou tlaku plynu dp při průchodu vlny a změnou objemu elementu dV . Dostaneme jej diferencováním vztahu

$$\{5226\} \quad p_c V^\kappa = \text{konst.}, \quad (7.32)$$

kde $p_c = p_0 + p$ je celkový tlak, p_0 původní tlak a p akustický tlak, tj. přírůstek celkového tlaku. Nechť V_0 značí původní objem plynu. Pak platí

$$\left[\frac{\partial(p_c V^\kappa)}{\partial p_c} \right]_{p_0, V_0} dp_c + \left[\frac{\partial(p_c V^\kappa)}{\partial V} \right]_{p_0, V_0} dV = 0, \quad \text{tj.}$$

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

$$V_0^\kappa dp_c + \kappa p_0 V_0^{\kappa-1} dV = 0, \quad \text{tj. } dp_c + \kappa p_0 V_0^{-1} dV = 0.$$

Z posledního vztahu a ze vztahu (7.17) plyne

$$K = -\frac{dp_c}{dV/V_0} = \kappa p_0.$$

Dosazením do vztahu (7.27) pro rychlost vlnění dostaneme

$$\{5227\} \quad c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}, \quad (7.33)$$

kde jsme označili původní tlak plynu, dosud označený p_0 , symbolem p . Pro ideální plyn lze vztah (7.33) upravit s užitím **stavové rovnice** $pV = (m/M)RT$ a vztahu $\rho = m/V$ do tvaru

$$\{5228\} \quad c = \sqrt{\frac{\kappa R}{M}} T. \quad (7.34)$$

Zde je R molární plynová konstanta a M molární hmotnost plynu.

Rychlost zvuku v ideálním plynu tedy závisí jen na teplotě. Užitečný vztah dostaneme, jestliže označíme rychlost zvuku při určité (libovolné) teplotě T_0 symbolem c_0 . Ze vztahu (7.34) pak plyne, že rychlost zvuku c při libovolné teplotě T je dána vztahem

$$\{5229\} \quad c = c_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (7.35)$$

Rychlost vlnění ve skutečných plynech, např. rychlost zvuku ve vzduchu, je dána přibližně vztahy, které platí pro ideální plyny. Hodnoty rychlosti zvuku ve vzduchu za různých podmínek (při různé vlhkosti atd.) v ostatních plynech i v pevných látkách je udána v tabulkách.

Vlnění v tyči Působí-li na konci tyče tahová nebo tlaková síla, šíří se podél osy tyče vlna. Ježto při protahování nebo stlačování elementů tyče se mění i její průřez, deformují se jednotlivé body tyče nejen ve směru podélném, nýbrž i ve směru příčném. Rozhodujícím parametrem charakterizujícím pružné vlastnosti tyče při šíření těchto vln je **modul pružnosti v tahu** E , definovaný vztahem

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Zde F je tahová nebo tlaková síla působící v průřezu tyče o plošném obsahu S a x je původní délka elementu tyče a u jeho prodloužení nebo zkrácení. Úvahami analogickými úvahám v odstavci B lze dokázat, že podélná výchylka v tyči vyhovuje opět rovnici (7.28). Přitom rychlost vlnění c je dána vztahem

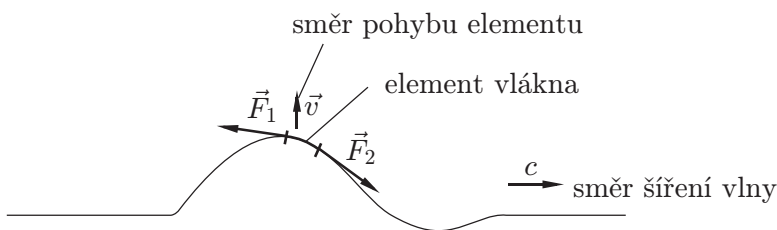
$$\{5230\} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (7.36)$$

Zde je E modul pružnosti v tahu ($[E] = \text{Nm}^{-2}$), ρ hustota tyče.

Vlnění na vlákně Podél vláken se mohou šířit vlny podélné i příčné. Podélné vlny nejsou příliš časté. Jejich rychlost je dána vztahem (7.36). Příčné vlny se vyskytují častěji, zejména na strunách, lanech atd. Jednotlivé elementy se po hybují kolmo na směr vlákna vlivem sil od sousedních elementů (síly \vec{F}_1, \vec{F}_2 v obr. 7.21). Lze dokázat, že výchylka $u(x, t)$ vyhovuje opět diferenciální rovnici (7.28), při čemž rychlost vln je dána vztahem

$$\{5231\} \quad c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (7.37)$$

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ



{obr5221}

Obr. 7.21

Zde je F velikost síly, kterou je napínáno vlákno a μ je lineární hustota vlákna, definovaná vztahem $\mu = (\text{hmotnost vlákna})/(\text{délka vlákna})$. Všimněte si podobnosti vzorců (7.27), (7.36), (7.37).

7.1.7.3 Energie pružných vln

{PruznychVln}

Při průchodu pružné vlny látkovým prostředím (např. při šíření zvukové vlny vzduchem) se jeho elementy pohybují a deformují, mají tedy energii kinetickou a elastickou. Tuto energii dodává zdroj, který vlny budí, a to tak, že působí na přilehlé elementy prostředí silou, která koná práci. Podobně na sebe působí i dva sousedící obecně položené elementy prostředí, takže energie přechází z jednoho elementu na druhý ve směru šíření vlny.

Energie akustických vln v plynech má poměrně malé hodnoty. Podstatně větší hodnoty má energie ultrazvukových vln v kapalinách a v pevných látkách. Vyplývá to z dále uvedených vztahů (7.42), (7.46) pro hlavní veličiny, charakterizující energetické poměry v harmonických vlnách — hustotu energie a intenzitu vlnění.

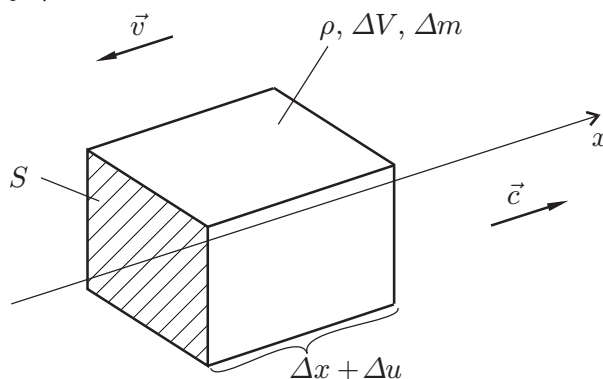
{EnergieVlneni}

Hustota energie vlnění Budeme uvažovat o podélné harmonické vlně šířící se ve směru osy Ox , v níž je výchylka dána vztahem

{5232}

$$u(x; t) = U_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (7.38)$$

Hustota prostředí nechť je ρ .



{obr5222}

Obr. 7.22

Element o původním objemu $\Delta V = S\Delta x$ (naznačený v obr. 7.22) má okamžitou rychlost v a délku $\Delta x + \Delta u$. Jeho kinetická energie je

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \left[U_m \omega \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]^2.$$

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Lze dokázat, že jeho potenciální energie pružnosti (elastická energie) ΔE_p je v každém okamžiku stejná jako ΔE_k , tj. že platí $\Delta E_p = \Delta E_k$. Celková energie elementu tedy je

$$\{5233\} \quad \Delta E_m = \Delta E_k + \Delta E_p = 2\Delta E_k = \rho \Delta V \cdot U_m^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (7.39)$$

Tato energie se s časem mění. Z tvaru výrazu na pravé straně vztahu (7.39) plyne, že energie postupuje ve vlně ve směru osy Ox rychlostí c . Střední časová hodnota energie v libovolném elementu $\Delta \bar{E}_m$ je dána vztahem

$$\{5234\} \quad \Delta \bar{E}_m = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta E_m dt = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \cdot U_0^2 \omega^2. \quad (7.40)$$

Zde jsme dosadili ΔE_m ze vztahu (7.39) a užili vztahu $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) dt = \frac{1}{2}$.

Okamžitá objemová hustota energie je dána výrazem $\Delta W / \Delta V$. Její střední časová hodnota, jež se značí w , je definována vztahem

$$\{5235\} \quad w = \frac{\Delta \bar{E}_m}{\Delta V}, \quad \text{hustota energie vlnění — definice} \quad (7.41)$$

kde $\Delta \bar{E}_m$ je střední časová hodnota energie v elementu o objemu ΔV . Její jednotkou je 1 Jm^{-3} . Nazývá se (objemová) **hustota energie vlnění**.

V harmonické vlně o výchylce dané vztahem (7.38) platí podle (7.41) a (7.40)

$$\{5236\} \quad w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 U_m^2. \quad \text{hustota energie vlnění} \quad (7.42)$$

Všimněme si, že platí $w \sim \rho, \omega^2, U_m^2$.

Tok zářivé energie Tok zářivé energie, ϕ , je definován takto: Nechť nějakou plochou, kterou prochází vlnění, projde za dobu Δt energie ΔE . Pak ϕ je definován vztahem

$$\{5237\} \quad \phi = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad \text{tok zářivé energie — definice} \quad (7.43)$$

Jednotkou ϕ je 1 watt.

Intenzita vlnění

Intenzita vlnění Intenzita vlnění I je definována takto: Vedeme malou plošku o plošném obsahu ΔS kolmo na směr šíření vlny. Za dobu Δt přeneše vlna touto ploškou energii ΔE . Intenzita vlnění I je definována vztahem

$$\{5238\} \quad I = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot \Delta S}. \quad \text{intenzita vlnění — definice} \quad (7.44)$$

Její jednotkou je $1 \text{ watt} \cdot \text{metr}^{-2}$.

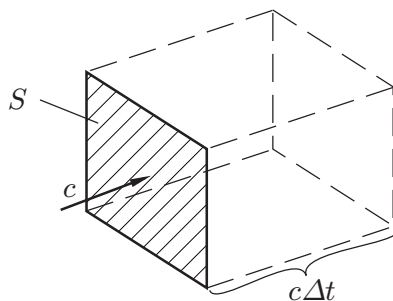
Volíme-li ve vztazích (7.43), (7.44) veličinu Δt velmi malou (přesněji: $\Delta t \rightarrow 0$), pak těmito vztahy jsou definovány okamžité, s časem rychle proměnné, veličiny $\phi(t)$, $I(t)$. Je-li naopak Δt dosti velké, nebo je-li Δt právě jedna perioda v případě vln harmonických, pak vztahy (7.43), (7.44) udávají střední časové hodnoty. Tyto veličiny jsou z praktického hlediska důležitější.

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Vztah mezi w a I Veličiny w a I jsou vázány vztahem

$$\{5239\} \quad I = cw, \quad (7.45)$$

kde c je rychlost vlnění a I , w jsou střední časové hodnoty. Vztah (7.45) se odvodí takto: Malou ploškou o plošném obsahu S , kolmou na směr šíření periodického vlnění (obr. 7.23), projde za dobu Δt , dlouhou ve srovnání s periodou, energie ΔE , pro kterou plyne ze vztahu (7.44): $\Delta E = IS\Delta t$. Prošlé vlnění vyplní hranol o objemu $Sc\Delta t$ s průměrnou objemovou hustotou energie w , takže celková energie vlnění v hranolu je $\Delta E = wSc\Delta t$. Srovnáním obou výrazů pro ΔE dostaneme vztah (7.45).



{obr5223}

Obr. 7.23

Ze vztahů (7.45) a (7.42) dostaneme vztah pro intenzitu harmonické vlny, jež má výchylku danou vztahem (7.38):

$$\{5240\} \quad I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 U_m^2. \quad \text{intenzita harmonické vlny} \quad (7.46)$$

Diskuse: —————

1. Platí $I \sim \rho c$. Veličina $Z_a = \rho c$ se nazývá **vlnová impedance** nebo **akustická impedance**. Platí $Z_a(\text{kapalin}) \sim 10^3 \cdot Z_a(\text{plynů})$. Proto intenzita vlnění v kapalině je řádově 10^3 -krát větší než intenzita vlnění stejné frekvence a amplitudy v plynu.

2. Platí $I \sim \omega^2$. Zvětší-li se frekvence vlnění např. 100-krát, zvětší se intenzita (při stejné amplitudě) 10 000-krát. Ultrazvukové vlny v kapalinách mají intenzitu asi 10^6 -krát větší než zvukové vlny ve vzduchu. K tomu je třeba při konstrukci jejich zdrojů přihlížet.

7.1.7.4 Přehled hlavních akustických veličin

{Akustických}

1. **Akustická výchylka** u v rovinné harmonické vlně šířící se ve směru osy Ox je veličina, daná vztahem (viz odstavec 7.1.3, 7.1.5.4)

$$\{5241\} \quad u(x; t) = U_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (7.47)$$

Veličina U_m se nazývá **amplituda akustické výchylky**.

2. **Akustická rychlost** v ve vlně (7.47) je průmět rychlosti \vec{v} , se kterou se pohybují elementy látky, do osy Ox (viz odstavec 7.1.3)

$$v(x; t) = \frac{\partial u(x; t)}{\partial t} = V_m \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Veličina $V_m = \omega U_m$ se nazývá **amplituda akustické rychlosti**.

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

3. **Akustický tlak** p ve vlně (7.47) je dán vztahem, který plyne ze vztahu (7.22) (viz odstavec 7.1.7.1)

$$p(x; t) = -K \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} = -K \left(-\frac{\omega}{c} \right) U_m \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Odsud a ze vztahu $c = \sqrt{K/\rho}$ plyne

$$\{5242\} \quad p(x; t) = P_m \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad (7.48)$$

kde

$$P_m = \rho c \omega U_m$$

je amplituda akustického tlaku.

4. **Akustická impedance** Z_a je definována vztahem $Z_a = \rho c$.
5. **Hustota energie vlnění** w je definována v odstavci 7.1.7.3. Pro vlnu (7.47) je dána vztahem

$$\{5243\} \quad w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 U_m^2. \quad (7.49)$$

6. **Intenzita vlnění** I je definována v odstavci 7.1.7.3. Pro vlnu (7.47) je dána vztahem (7.46):

$$\{5244\} \quad I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 U_m^2. \quad (7.50)$$

Kromě uvedených veličin se zavádějí jejich efektivní hodnoty vztahy

$$U = U_m / \sqrt{2}, \quad V = V_m / \sqrt{2}, \quad P = P_m / \sqrt{2}.$$

Z předešlých vztahů vyplývají tyto často užívané vztahy

$$P = Z_a V, \quad I = Z_a V^2 = P^2 / Z_a.$$

7.1.8 Interference a ohyb vlnění

7.1.8.1 Superpozice a interference vlnění

V této části budeme vyšetřovat vlnění, které vznikne tehdy, jestliže se prostředím šíří současně několik vln. V takovém případě platí téměř vždy zákon superpozice (odst. 7.1.4). Výchylka elementů prostředí \vec{u} je dána vztahem $\vec{u}(\vec{r}; t) = \vec{u}_1(\vec{r}; t) + \vec{u}_2(\vec{r}; t) + \dots$, kde $\vec{u}_1(\vec{r}; t), \vec{u}_2(\vec{r}; t), \dots$ jsou výchylky, které by element měl, kdyby procházela pouze první vlna nebo pouze druhá vlna atd. (obr. 7.8). Říkáme, že dochází ke skládání vlnění.

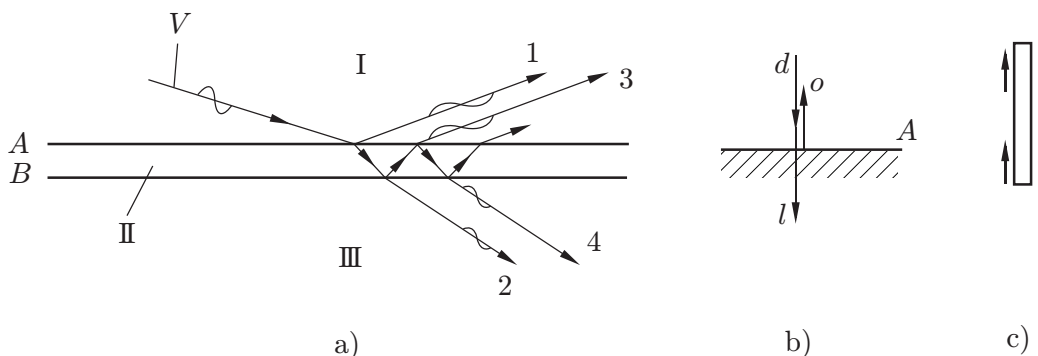
Jestliže jednotlivé vlny mají obecný časový průběh, tj. jestliže křivky, jimiž jsou znázorněny výchylky, mají obecný (nepravidelný) tvar, má i výsledné vlnění složitý nepravidelný průběh (obr. 7.9). Jestliže však jsou všechny vlny, které se skládají, harmonické a mají stejnou frekvenci, pak výsledné vlnění má zvláštní průběh. Vyznačuje se tím, že a) všechny body prostředí kmitají harmonicky se stejnou frekvencí (a obecně s různými fázemi), b) amplituda kmitů je v různých místech různá. Ta místa, v nichž je amplituda největší, se nazývají kmitny. Ta místa, v nichž je amplituda nejmenší (někdy dokonce nulová), se nazývají uzly.

Skládání (tj. superpozice) dvou (nebo většího počtu) harmonických vln se stejnými frekvencemi se nazývá interference. Tedy interference je zvláštní případ superpozice. O vlnách říkáme, že interferují. Mohou interferovat vlny mechanické, elektromagnetické, světlo atd.

7.1.8.2 Stojaté vlnění

{ojateVlneni}

Velmi často dochází k interferenci vln, které se šíří **stejným směrem** nebo k interferenci dvou vln, které se šíří **opačnými směry**. V tomto druhém případě vzniká tzv. stojaté vlnění.



{obr5224}

Obr. 7.24

Příklady interference uvedeného typu jsou znázorněny v obr. 7.24a, b, c. V obr. 7.24a je znázorněna interference vln (1, 3) a vln (2, 4), které vzniknou při dopadu pružné rovinné harmonické vlny V , šířící se v tekutině I , na planoparalelní vrstvu tekutiny II , pod níž je tekutina III . Vlna V se na rozhraní A částečně odrazí (vlna 1) a částečně láme do vrstvy. Lomená vlna se na rozhraní B znovu částečně odrazí a částečně láme do prostředí III , kde vytváří prošlou vlnu (2). Postupnými odrazy a lomy vznikají vlny od vrstvy odražené (1, 3, ...) a vlny vrstvou prošlé (2, 4, ...). Odražené vlny se šíří stejným směrem, částečně se překrývají a interferují. Totéž platí o vlnách prošlých.

Na obr. 7.24b je znázorněn odraz a lom rovinné vlny d dopadající kolmo na rovinné rozhraní A . Dopadající vlna d a odražená vlna o se šíří proti sobě a interferují. K interferenci tohoto typu dochází neobyčejně často ve všech prostorově ohraničených prostředích — v tyčích (obr. 7.24c), strunách, kapalinových a plynových sloupcích atd. (v případě vln mechanických) a v dutinových elektromagnetických rezonátorech a laserových trubcích (v případě vln elektromagnetických a světelných). Ve všech těchto objektech vzniká stojaté vlnění, vytvářejí se kmity a uzly.

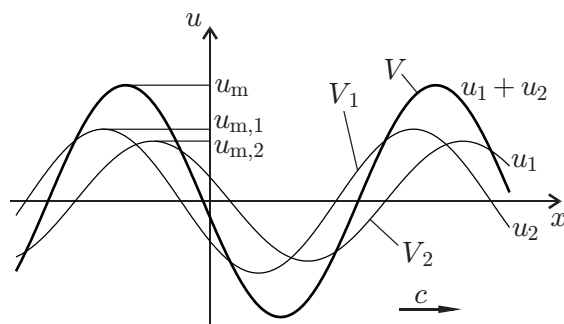
Interference dvou vln šířících se ve stejném směru Uvažujme o dvou rovinných harmonických vlnách V_1, V_2 o stejné frekvenci šířících se jedním směrem, a to buď o vlnách podélných, nebo o vlnách příčných, polarizovaných v jedné rovině. Zavedeme osu Ox ve směru šíření vln a budeme předpokládat, že výchylky u_1, u_2 ve vlnách V_1, V_2 jsou dány vztahy

$$\{5245\} \quad u_1(x; t) = U_1 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad u_2(x; t) = U_2 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (7.51)$$

Zde jsou U_1, U_2 amplitudy, ω úhlová frekvence, c rychlost šíření vln a φ_0 fázová konstanta kmitů ve vlně V_2 v bodě o souřadnici $x = 0$ m. Vztahy (7.51) mohou udávat i výchylky ve vlnách šířících se v jednorozměrném prostředí — v tenkých tyčích, úzkých trubcích, strunách. V obr. 7.25 jsou znázorněny výchylky v obou vlnách V_1, V_2 v určitém okamžiku t_0 jako funkce polohy x . Současně je znázorněna i výchylka $u = u_1 + u_2$ ve výsledné vlně V . Z teorie skládání harmonických funkcí plyne (odstavec 6.5.1), že výchylka u (v okamžiku t_0) je opět harmonickou (tj. sinusovou) funkcí proměnné x o stejné periodě (tj. zde o stejné vlnové délce) jako obě interferující vlny. Ježto křivky, které znázorňují výchylky u_1, u_2 v časech $t > t_0$, vzniknou z křivek V_1, V_2 jejich posouváním rychlostí c ve směru osy Ox , posouvá se i křivka V rychlostí c .

To značí, že **interferencí vln V_1, V_2 vznikne opět postupná harmonická vlna V**

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ



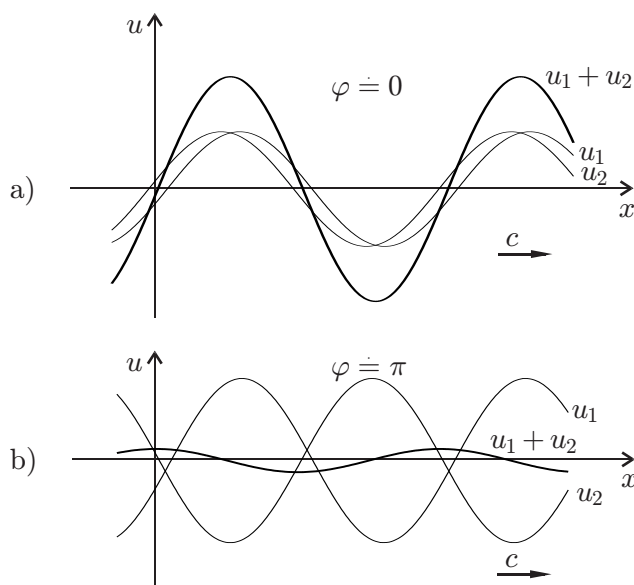
{obr5225}

Obr. 7.25

o výchylce

$$u(x; t) = U \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi \right],$$

kde U (a také φ) závisí na U_1 , U_2 a φ_0 . **Je-li** $\varphi_0 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ jsou vlny V_1 , V_2 ve **fázi**. Křivky V_1 , V_2 v obr. 7.25 pak nejsou navzájem posunuty, jejich maxima jsou nad sebou. Amplituda výsledné vlny má maximální možnou hodnotu $U = U_1 + U_2$. V obr. 7.26a je $\varphi_0 \doteq 0$.



{obr5226}

Obr. 7.26

Je-li $\varphi_0 = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ jsou křivky V_1 , V_2 v obr. 7.25 zřejmě navzájem posunuty o $\lambda/2$. V místě, kde má výchylka u_1 právě největší kladnou hodnotu, má výchylka u_2 **minimum**. Výsledná vlna V má pak amplitudu $U = |U_1 - U_2|$ (srovnejte obr. 6.18). Při obecné hodnotě konstanty φ_0 je amplituda vlny V dána vztahem (srovnejte (6.49))

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi_0}.$$

Změnou fázového rozdílu φ_0 obou interferujících vln lze tedy velmi výrazně ovlivnit amplitudu U výsledné vlny. Je-li $\varphi_0 = \pi$ a $U_1 = U_2$, pak vlny V_1 , V_2 se interferencí zcela zruší. V obr. 7.26b je $U_1 = U_2$, $\varphi_0 \doteq \pi$. O tomto jevu se někdy hovoří jako o destruktivní interferenci. Např. změnou úhlu dopadu vlny d v obr. 7.24a, nebo změnou tloušťky vrstvy lze měnit amplitudu vlny vzniklé interferencí vln 1, 3, \dots , tj. měnit odrazivost vrstvy.

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Interference dvou vln šířících se v opačných směrech — stojaté vlnění Budeme uvažovat o interferenci dvou rovinných harmonických vln V_1, V_2 šířících se v opačných směrech. Vlny mohou být buď podélné nebo příčné, polarizované v jedné rovině. Směr šíření jedné z nich, např. V_1 , zvolíme za osu Ox . Budeme předpokládat, že výchylky u_1, u_2 ve vlnách V_1, V_2 jsou dány vztahy

$$\{5246a\} \quad u_1(x; t) = U \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad (7.52)$$

$$\{5246b\} \quad u_2(x; t) = U \sin \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \quad (7.53)$$

Předpokládáme tedy (pro zjednodušení), že vlny mají stejné amplitudy a že fáze kmitů v obou vlnách v bodě $x = 0$ m jsou stejné. Poznamenejme, že vztahy (7.52) a (7.53) mohou i zde udávat výchylky ve vlnách šířících se v jednorozměrném prostředí — na strunách atd. Výchylka ve výsledném vlnění je dána vztahem $u = u_1 + u_2$. Dosadíme-li sem ze vztahů (7.52) a (7.53) a součet sinusových funkcí upravíme s užitím vzorce

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \left[\frac{(\alpha - \beta)}{2} \right] \sin \left[\frac{(\alpha + \beta)}{2} \right],$$

dostaneme

$$\{5247\} \quad u(x; t) = 2U \cos \frac{\omega x}{c} \sin \frac{\omega t}{2} = 2U \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}. \quad (7.54)$$

Toto je výsledný vztah pro výchylku ve výsledném vlnění, které se nazývá stojaté vlnění. Vyšetříme jeho vlastnosti.

Vlastnosti stojatého vlnění.

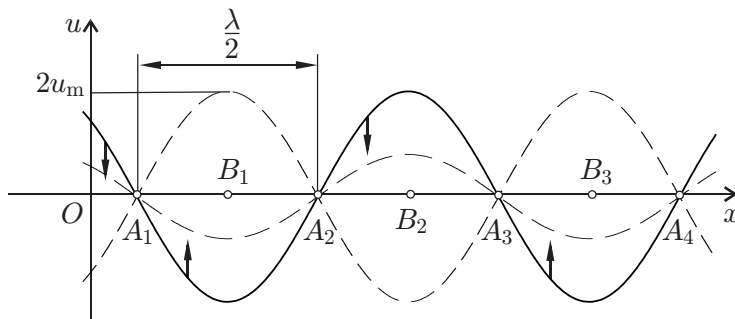
1. Vztah (7.54) pro výchylku $u(x; t)$ se liší od vztahů (7.52) a (7.53) zejména tím, že funkce $u(x; t)$ je zde součinem dvou funkcí, z nichž jedna závisí jen na x , druhá jen na t . Vztah (7.54) lze napsat ve tvaru

$$\{5248a\} \quad u(x; t) = U_v(x) \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad (7.55)$$

kde

$$\{5248b\} \quad U_v = 2U \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}. \quad (7.56)$$

Je zřejmé, že element o souřadnici x koná harmonické kmity o amplitudě $|U_v(x)|$, jejíž hodnota závisí na x , tj. na poloze elementu.



{obr5227}

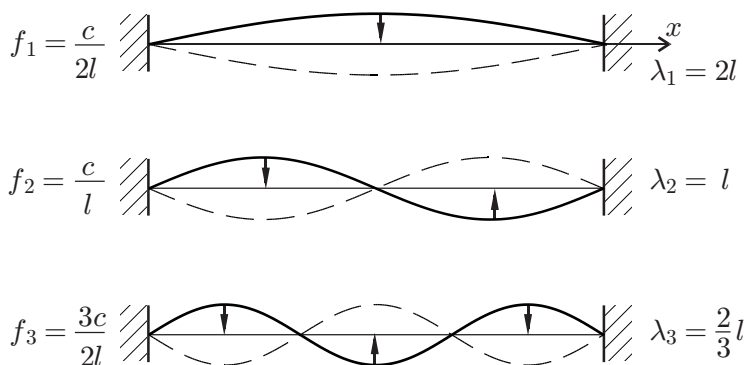
Obr. 7.27

2. **Uzly a kmity.** Amplituda $|U_v(x)|$ nabývá minimální hodnoty rovné nule v místech o souřadnicích $x = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm 3\frac{\lambda}{4}, \pm 5\frac{\lambda}{4}, \dots$. Elementy v těchto místech vůbec nekmitají, jsou trvale

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

v klidu. Tato místa se nazývají uzly (body A_1, A_2, A_3, \dots v obr. 7.27). Amplituda $|U_v(x)|$ nabývá maximální hodnoty $2U$ v místech o souřadnicích $x = 0, \pm\frac{\lambda}{2}, \pm\lambda, \dots$. Tato místa, označené v obr. 7.27 symboly B_1, B_2, B_3, \dots , se nazývají kmitny. Vzdálenost sousedních uzlů nebo sousedních kmiten je $\lambda/2$.

3. Mezi dvěma sousedními uzly má funkce (7.56) stálé znaménko. Po obou stranách uzlu jsou znaménka funkce (7.56) různá. Ze vztahu (7.55) pak plyne, že všechny elementy mezi sousedními uzly kmitají se stejnou fází, tj. ve fázi. Libovolné dva elementy, mezi nimiž je právě jeden uzel, kmitají s opačnými fázemi.
4. Na rozdíl od postupného vlnění, daného např. vztahem (7.52), v němž se energie (mechanická, elektromagnetická) přenáší rychlostí c , nepřenáší stojaté vlnění energii v jednom směru, nýbrž energie se trvale přesouvá z kmiten do sousedních uzlů a zpět.



{obr5228}

Obr. 7.28

Stojaté vlnění na strunách, tyčích a sloupcích tekutiny

Struny Vychýlíme-li z rovnovážné polohy jeden element struny uchycené pevně na koncích a pak jej uvolníme, nebo uvádíme-li jej trvale do pohybu v příčném směru, šíří se z něho na struně příčné vlnění. Toto vlnění se na pevných koncích odrazí, znovu se odrazí na opačném konci atd. Všechny takto vzniklé vlny se skládají a vytvářejí stojaté vlnění s uzly na koncích struny (obr. 7.28). Toto vlnění nemůže mít libovolnou vlnovou délku, protože na struně se musí vytvořit celistvý počet půlvln — buď jedna nebo dvě atd. Označíme-li l délku struny, musí pro možné vlnové délky $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ platit

$$l = \frac{\lambda_1}{2}, 2\frac{\lambda_2}{2}, 3\frac{\lambda_3}{2}, \dots$$

Každé vlnové délce odpovídá jedna frekvence f daná vztahem $f\lambda = c$, kde c je rychlost šíření příčného vlnění na struně, daná vztahem (7.37), tj. $c = \sqrt{F/\mu}$. Tyto frekvence f_1, f_2, f_3, \dots se nazývají vlastní frekvence struny a jsou dány vztahy plynoucími z předešlých vztahů: $f_1 = c/\lambda_1$ atd., tj. platí

{5249}

$$f_k = k\frac{c}{2l}, \quad \text{kde } k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.57)$$

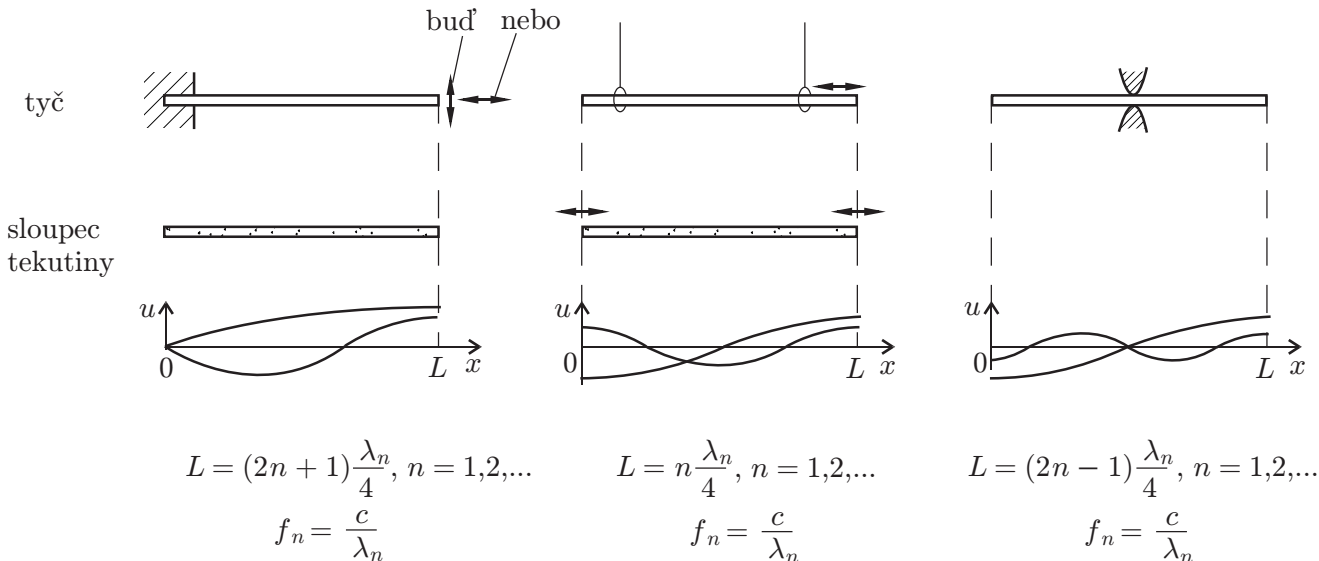
Soubor frekvencí (7.57) se nazývá **frekvenční spektrum** struny. Jednotlivé stojaté vlny s frekvencemi (7.57) se nazývají **kmitové mody** a funkce, které vyjadřují jejich výchylku, se nazývají **vlastní funkce**. Frekvence f_1 se nazývá **základní**, ostatní jsou **vyšší harmonické**.

7.1. POSTUPNĚ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Struna kmitá málokdy v jednom modu, většinou se vytvoří současně několik modů (závisí to na způsobu rozkmitávání). Soubor frekvencí těchto modů vytváří frekvenční spektrum konkrétního vlnivého pohybu struny, který se nazývá také „**chvění**“ nebo „**kmitý**“ struny. Nejmenší frekvence obsažená ve frekvenčním spektru chvění určuje výšku tónu, který struna vydává, vyšší harmonické určují jeho barvu.

Rozkmitáme-li strunu periodickou vnější silou o frekvenci f , vzniká na struně vlnění s velkými výchylkami, zejména tehdy, je-li frekvence f rovna nebo blízka některé z vlastních frekvencí struny. Tento jev se nazývá **rezonance**. Struna, nebo libovolné jiné těleso (nebo zařízení), které může kmitat s určitými vlastními frekvencemi a u něhož se může projevit rezonance, se nazývá **rezonátor**.

Tyče, sloupce tekutin Podobně jako na strunách může vzniknout stojaté vlnění v tyčích, v sloupcích plynu (např. v píšťálách) nebo kapalin (např. v potrubí), nebo ve dvojrozměrných objektech — v membránách, tenkých deskách nebo v trojrozměrných objektech libovolného tvaru. Všechny tyto objekty, jejichž chvění je obecně podstatně složitější než chvění strun, jsou charakterizovány vlastními frekvencemi, frekvenčním spektrem a všechny vykazují jev rezonance. Jsou to tedy, podobně jako struna, rovněž rezonátory — rezonanční tyče, desky, dutiny atd.



{obr5229}

Obr. 7.29

Zde uvedeme stručně v obr. 7.29 pouze hlavní vlastnosti chvění tyčí a sloupců tekutin. Vznik jejich kmitavých modů a vlastních frekvencí je analogický vzniku chvění na strunách. Jejich frekvenční spektrum závisí, kromě jiného, na způsobu uchycení u tyčí a na způsobu ohraničení u sloupců tekutin.

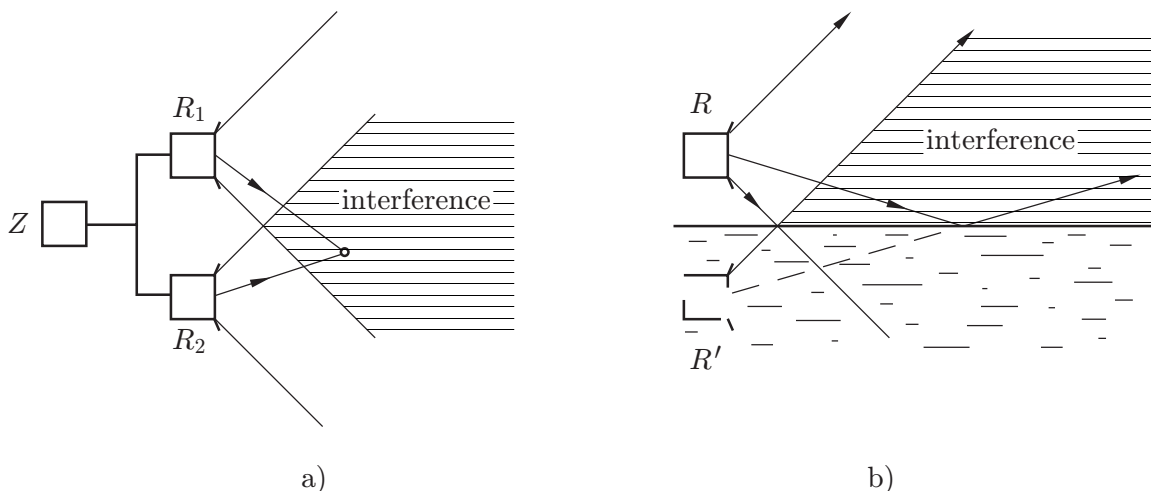
Zcela analogicky se vytváří stojaté elektromagnetické vlnění v dutinových rezonátorech. Např. v trubici He-Ne laseru mohou vzniknout, podobně jako v tyči, stojaté vlny, a to z jistého úzkého intervalu vlnových délek $I = (\lambda_0 - \Delta\lambda; \lambda_0 + \Delta\lambda)$, kde $\lambda_0 = 632,8\text{nm}$. Tento interval je udán vlastnostmi záření atomů neonu. Ježto trubice běžných laserů mají délky řádově desítky centimetrů až několik metrů, vzniká v nich řádově 10^6 vlnek. Má-li např. trubice takovou délku, že se v ní vytvoří právě 10^6 vlnek o jisté vlnové délce z intervalu I , může se v ní vytvořit i $10^6 + 1$ vlnek o vlnové délce λ_2 tak blízké k λ_1 , že rovněž leží v intervalu I . Každý laser má tedy rovněž jisté (velmi úzké) frekvenční spektrum.

7.1.8.3 Interference vlnění ze dvou bodových zdrojů

{lneniZeDvou}



Velmi často interferuje vlnění ze zdrojů, které kmitají se stejnou frekvencí tak, že rozdíl fází jejich kmitů je stálý, tj. s časem neměnný. Takové zdroje se nazývají **koherentní zdroje**. V oblasti akustických vln lze dva koherentní zdroje realizovat např. dvěma reproduktory R_1 , R_2 , napájenými jedním zdrojem střídavého napětí akustických frekvencí (obr. 7.30a). Dvěma koherentními zdroji může být i jeden reproduktor R a jeho zrcadlový obraz R' na rovinné ploše (např. na povrchu vody) odrážející zvuk (obr. 7.30b).

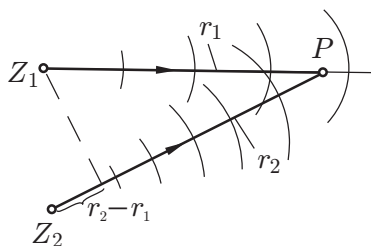


{obr5230}

Obr. 7.30

Pro elektromagnetické vlny lze realizovat koherentní zdroje např. elektrickými dipóly nebo trychtýřovými anténami, napájenými jedním zdrojem o dostatečně vysoké frekvenci ($f \sim 10^7$ – 10^{10} Hz).

V oblasti optických vln mohou být dva koherentní zdroje realizovány např. dvěma štěrbinami v rovinném stínítku osvětleném z jedné strany světlem laseru.



{obr5231}

Obr. 7.31

Vyšetříme jednoduchý idealizovaný případ interference vlnění z koherentních zdrojů a to interferenci vlnění ze dvou bodových koherentních zdrojů Z_1 , Z_2 zářících v neohrazeném prostředí. Bodové zdroje jsou modelem takových skutečných zdrojů, jejichž rozměry a tvar nejsou pro průběh interference vlnění ve zkoumané oblasti podstatné. Pro zjednodušení (které však neovlivní obecnost odvozených zákonitostí interference) budeme předpokládat, že zdroje kmitají harmonicky se stejnými fázemi. Jejich úhlovou frekvenci označíme ω . Z obou zdrojů se šíří kulové vlny (obr. 7.31). Označíme symbolem u_1 funkci udávající výchylku v kulové vlně vyzářované zdrojem Z_1 jako funkci času a prostorových souřadnic. Podobný význam má i u_2 . Vektory \vec{u}_1 , \vec{u}_2 nechť mají stejný směr. Rychlost šíření uvažovaného vlnění (mechanického, elektromagnetického) v daném prostředí označíme v .

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Při vhodné volbě začátku počítání času lze vyjádřit výchylky v obecném bodě P ve tvaru

$$\{5250\} \quad u_1 = \frac{A_1}{r_1} \sin \omega \left(t - \frac{r_1}{v} \right), \quad u_2 = \frac{A_2}{r_2} \sin \omega \left(t - \frac{r_2}{v} \right), \quad (7.58)$$

kde A_1, A_2 jsou veličiny, charakterizující vydatnost zdrojů a kde r_1, r_2 mají význam zřejmý z obr. 7.31. Výsledná výchylka u v bodě P je, podle zákona superpozice, jehož platnost předpokládáme, dána vztahem $u = u_1 + u_2$. V bodě P tedy dochází ke skládání stejnosměrných harmonických kmitů o stejné frekvenci. Podle výsledků odst. 6.5.1 je výsledný pohyb v bodě P opět harmonický a platí

$$\{5251\} \quad u(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad \text{kde } U_0 = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (7.59)$$

Zde je zavedeno označení

$$U_1 = \frac{A_1}{r_1}, \quad U_2 = \frac{A_2}{r_2}, \quad \varphi_1 = -\frac{\omega r_1}{v}, \quad \varphi_2 = -\frac{\omega r_2}{v}.$$

Na tomto výsledku je zvlášť důležité to, že fázový rozdíl $\varphi_1 - \varphi_2$, a tedy také U_0 , závisí i na r_1, r_2 , tj. na vzdálenosti bodu P od zdrojů Z_1, Z_2 .

V různých místech interferenčního pole bude amplituda U_0 výsledných kmitů různá. Největší hodnotu $U_{0max} = U_1 + U_2$ bude mít v těch bodech, které mají takovou polohu, že platí

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \text{tj. } -\frac{\omega r_1}{v} + \frac{\omega r_2}{v} = 2k\pi,$$

tj. (po úpravě)

$$\{5252\} \quad r_2 - r_1 = k\lambda_p, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{podmínka maxima} \quad (7.60)$$

Zde $\lambda_p = Tv$ je vlnová délka v uvažovaném prostředí.

Nejmenší hodnotu $U_{0min} = |U_1 - U_2|$ bude mít U_0 v těch bodech, v nichž platí

$$\{5253\} \quad r_2 - r_1 = (2k + 1)\frac{\lambda_p}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{podmínka minima} \quad (7.61)$$

Hlavní výsledek: V interferenčním poli vln ze dvou bodových koherentních zdrojů je amplituda kmitů spojitou funkcí polohy. Existují maxima (kmity) a minima (uzly). Poloha maxim je dána vztahem (7.60), poloha minim vztahem (7.61).

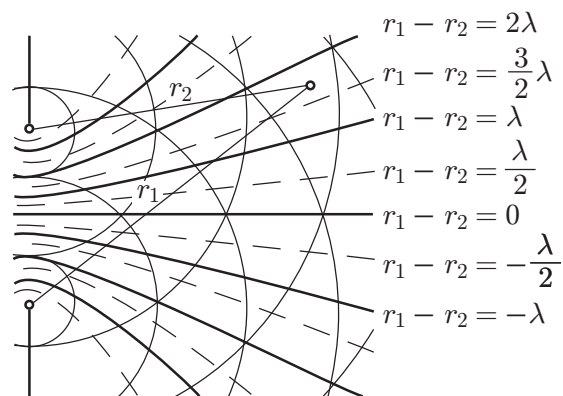
Detektor vlnění (např. mikrofon nebo ucho v případě vlnění akustického; fotografická deska nebo stínítko v případě světla) zaznamená v kmitnách amplitudu a intenzitu největší, v uzlech nejmenší (je-li $U_1 = U_2$, pak nulovou).

Poznamenejme, že v optice se obvykle uvádí vlnová délka světla ve vakuu λ . Ze vztahů $\lambda_p = Tv$, $\lambda = Tc$, kde c je rychlost šíření světla ve vakuu, plyne $\lambda/\lambda_p = c/v = n$. **Veličina n , definovaná vztahem $n = c/v$, je index lomu daného prostředí pro uvažované světlo. Je to veličina charakterizující optické vlastnosti prostředí.** Zavedeme-li λ namísto λ_p do vztahů (7.60),(7.61) dostaneme

$$\{5254\} \quad \left. \begin{aligned} n(r_2 - r_1) &= k\lambda \\ n(r_2 - r_1) &= (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \end{aligned} \right\} k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \begin{array}{l} \text{podmínka maxim} \\ \text{podmínka minim} \end{array} \quad (7.62)$$

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Množina bodů, pro které platí vztah (7.60) pro zcela určité $k = k_0 (\neq 0)$ pro něž tedy platí $r_2 - r_1 = k_0 \lambda_p$, je jedna větev rotačního hyperboloidu, jehož osou rotační symetrie je přímka jdoucí body Z_1, Z_2 . V obr. 7.32 jsou zakresleny plnými čarami hyperboly jež udávají řezy těchto hyperboloidů pro různá k (na nichž leží interferenční maxima) rovinou nákresny. Pro $k_0 = 0$ je množinou maxim rovina, již odpovídá v obr. 7.32 osa úsečky $Z_1 Z_2$. Hyperboloidům, na nichž leží interferenční minima daná vztahem (7.61), odpovídají v obr. 7.32 hyperboly vyznačené čárkovaně.



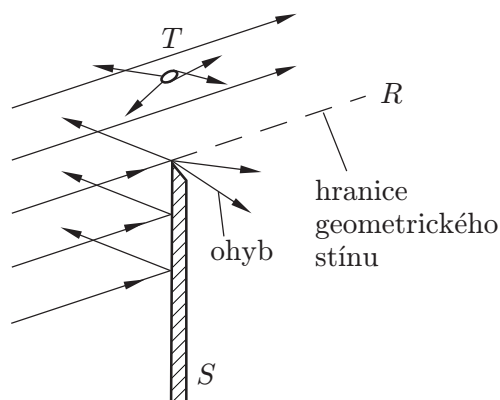
{obr5232}

Obr. 7.32

Zcela analogicky vzniká interferenční vlnové pole s charakteristickými interferenčními maximy (kmitnami) a minimy (uzly) i při interferenci libovolného počtu koherentních zdrojů libovolného tvaru. Interferenční pole je pak ovšem většinou složitější než interferenční pole znázorněné na obr. 7.32.

7.1.8.4 Huygensův–Fresnelův princip

Jestliže vlnění dopadá na nějakou překážku, např. na stínítko S nebo na těleso T v obr. 7.33, jednak se od ní částečně odráží, jednak postupuje dál, přičemž vniká i do oblasti geometrického stínu. Tento jev se nazývá **ohyb vlnění**.



{obr5233}

Obr. 7.33

Z praxe je známo, a teorie to potvrzuje, že vlnění s velkými vlnovými délkami vykazuje větší ohyb než vlnění krátkovlnné tj. vniká více jeho energie i do oblastí vzdálených od hranice geometrického stínu R . Např. zvukové vlny vnikají ohybem snadno i za překážky, zatímco krátkovlnné ultrazvukové vlny nikoliv. Podobně se ohýbá i elektromagnetické záření. Např. dlouhovlnné rozhlasové vlny ($\lambda \sim 10^3$ m vnikají ohybem snadno i do hlubokých horských údolí, zatímco televizní

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

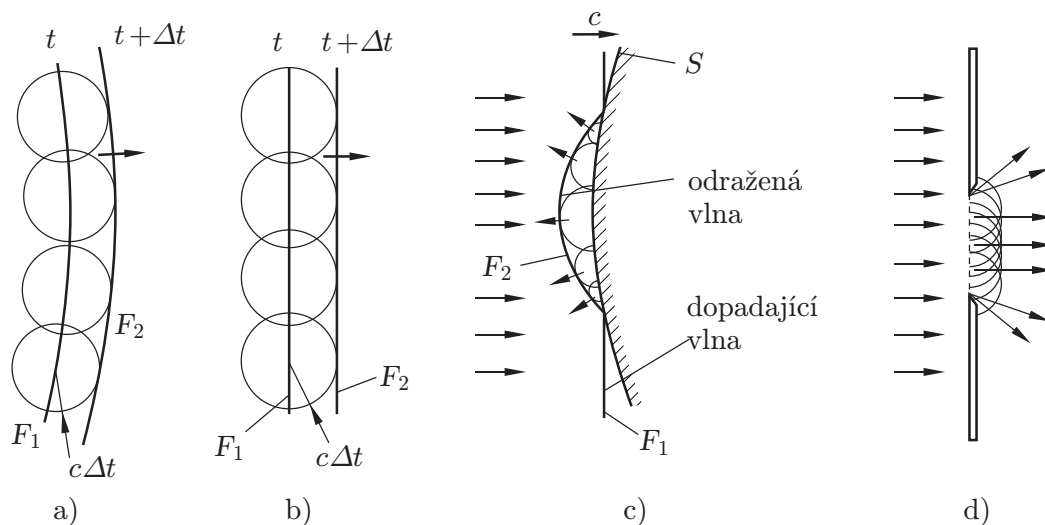
vlny ($\lambda \sim 10^0\text{m}$) se ohýbají podstatně méně — televizní anténa se může dostat do „stínu“. Radarové vlny ($\lambda \sim 10^{-2}\text{m}$) se šíří téměř přímočaře a na velkých překážkách se téměř neohýbají. Ohyb světelných vln ($\lambda \sim 10^{-7}\text{m}$) je tak nepatrný, že jej lze pozorovat jen za zvláštních podmínek.

Elementární výklad ohybu mechanického vlnění spočívá na jednoduché představě: Každý element prostředí, kterým se šíří vlnění, se pohybuje, kmitá. Přitom působí na sousední elementy a ovlivňuje jejich pohyb — chová se tedy jako jakýsi druhotný (neboli sekundární) zdroj, z něhož se šíří sekundární vlny. Tyto tzv. elementární vlny mají v homogenním izotropním prostředí (tj. v prostředí, v němž se šíří vlnění všude stejnou rychlostí nezávislou na směru šíření) kulový tvar. Sekundární vlny ze všech elementů prostředí se v každém bodě skládají a vytvářejí výslednou vlnu.

Tato jednoduchá představa, která vznikla již v době, kdy ještě nebyla vypracována teorie šíření a ohybu vlnění spočívající na vlnové rovnici (7.29), byla vyslovena a dodnes se vyslovuje pod názvem

Huygensův–Fresnelův princip

Každý bod prostředí, kterým se šíří vlnění, se chová jako zdroj elementárních vln, které se z něho šíří všemi směry. Výsledné vlnění v libovolném bodě je dáno superpozicí všech těchto elementárních vln. Je-li \check{C}_1 čelo vlny v okamžiku t_1 , pak čelo \check{C}_2 vlny v pozdějším okamžiku $t_2 = t_1 + \Delta t$ je dáno obálkou elementárních vln, vyšlých v okamžiku t_1 z bodů čela \check{C}_1 .



{obr5234}

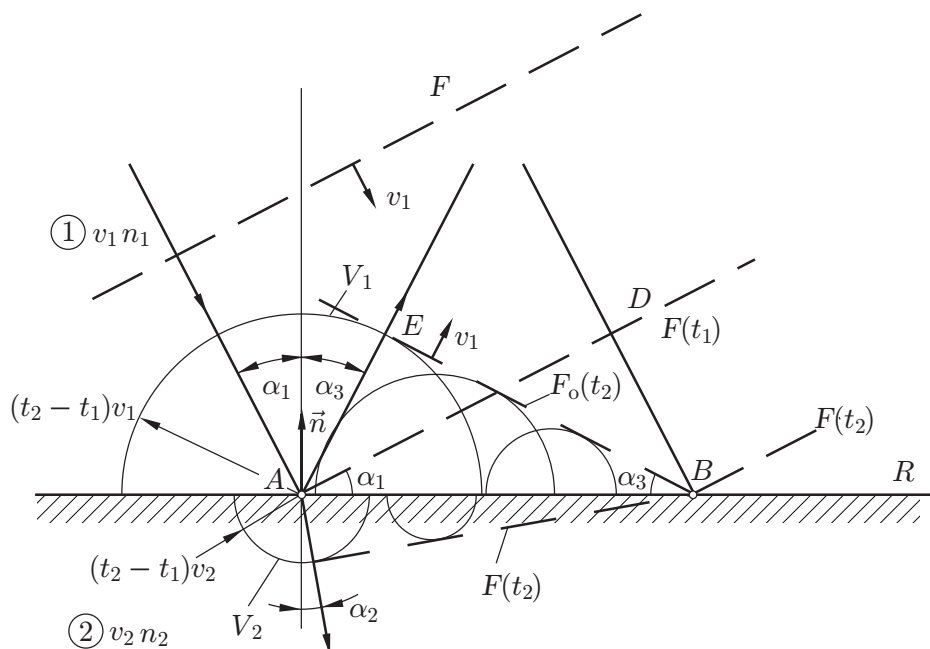
Obr. 7.34

Užitím uvedeného principu lze vysvětlit postupné vytváření čel vln (respektive vlnoploch) při šíření kulové nebo válcové vlny (obr. 7.34a) nebo rovinné vlny (obr. 7.34b) nebo např. vznik a tvar čela vlny vzniklé při odrazu rovinné vlny na obloukové ploše S (obr. 7.34c), při němž se sekundárními zdroji stávají body plochy S . Podobně lze vysvětlit i ohyb světla na štěrbině ve stínítku, osvětleném z jedné strany (obr. 7.34d), jako šíření elementárních vln ze sekundárních bodových zdrojů umístěných v prostoru štěrbině.

Instruktivní je zejména vysvětlení zákonitostí lomu a odrazu rovinné vlny na rovinném rozhraní (obr. 7.35).

Odraz a lom rovinné vlny. Snellův zákon. Homogenním izotropním prostředím, které označíme symbolem 1, nechť se šíří rychlostí v_1 rovinná vlna. Nechť dopadá na rovinné rozhraní R , které odděluje prostředí 1 od jiného homogenního izotropního prostředí 2, v němž se vlnění může šířit rychlostí v_2 (obr. 7.35).





{obr5235}

Obr. 7.35

Čelo dopadající vlny, , postupuje směrem k rozhraní a dostihuje je postupně. Např. v okamžiku t_1 je v poloze \check{C}_1 , takže jsou již zasaženy ty body rozhraní, které leží nalevo od bodu A , zatímco do bodů napravo od A vlna ještě nedospěla. Bod A se v tomto okamžiku stává zdrojem sekundárních vln, které postupují jednak dál do prostředí 2 rychlostí v_2 (vlna V_2), jednak zpět do prostředí 1 rychlostí v_1 (vlna V_1).

V pozdějším okamžiku, např. v čase t_2 ($> t_1$), bylo čelo dopadající vlny již v poloze \check{C}_2 a sekundárními zdroji se v časovém intervalu (t_1, t_2) staly postupně všechny body rozhraní na úsečce AB . Čela sekundárních vln V_1, V_2 v čase t_2 jsou zřejmá v obr. 7.35. Obálka vln V_1 je rovina a je to čelo \check{C}_0 odražené vlny. Rovinná obálka vln V_2 je čelo \check{C}_1 lomené vlny.

Označení: Rovina dopadu je rovina určená normálou \vec{n} k rozhraní R a směrem šíření dopadající vlny. **Rovina odrazu** je rovina určená normálou \vec{n} a směrem šíření odražené vlny. **Rovina lomu** je rovina určená normálou \vec{n} a směrem šíření lomené vlny. Směr šíření vlny je kolmý na čelo vlny. **Význam úhlu dopadu** α_1 , **úhlu lomu** α_2 a **úhlu odrazu** α_3 je zřejmý z obr. 7.35.

Sekundární vlny V_1 i sekundární vlny V_2 mají polokulová čela, neboť sekundární vlny se šíří (podle předpokladu) v každém z obou prostředí rychlostí nezávislou na směru. Proto čelo \check{C}_0 odražené vlny i čelo \check{C}_1 lomené vlny je kolmé na rovinu dopadu. **Rovina odrazu i rovina lomu tedy splývá s rovinou dopadu.**

Úvaha o úhlech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: a) Trojúhelníky ABD a ABE jsou zrcadlově souměrné. Platí tedy $\alpha_3 = \alpha_1$; b) Pravoúhlé trojúhelníky ABD a ABF , mají společnou přeponu AB , jejíž délku označíme d . Platí: $v_1(t_2 - t_1) = d \sin \alpha_3$, $v_2(t_2 - t_1) = d \sin \alpha_2$. Odtud plyne $v_1/v_2 = \sin \alpha_3 / \sin \alpha_2$. Ježto $\alpha_3 = \alpha_1$, platí $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1/v_2$.

Získané zákonitosti se vyslovují pod názvem **Snellův zákon**:

1. Roviny dopadu, odrazu a lomu jsou totožné

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

2. Pro úhel dopadu α_1 , odrazu α_3 a lomu α_2 platí

$$\alpha_3 = \alpha_1, \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Diskuse: —————

1. Je-li $v_1 > v_2$, je $\sin \alpha_1 > \sin \alpha_2$, tj. $\alpha_1 > \alpha_2$ — lom ke kolmici;

je-li $v_1 < v_2$, je $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$, tj. $\alpha_1 < \alpha_2$ — lom od kolmice.

2. Je-li $v_1 < v_2$ a úhel α_1 je tak velký, že platí $\sin \alpha_1 > v_1/v_2$, pak pro úhel α_2 platí $\sin \alpha_2 (= v_2/v_1 \sin \alpha_1) > 1$. Neexistuje však reálný úhel α_2 , který by splňoval tento vztah (pro každé reálné α , je $\sin \alpha \leq 1$). **Lomená vlna pak nevzniká, všechno vlnění se od rozhraní odráží.** Tento jev se nazývá **úplný** (neboli **totální**) **odraz**. Úhel α_{1m} , splňující vztah $\sin \alpha_{1m} = (v_1/v_2)$ se nazývá **mezní úhel**.

Poznámka: Ukazuje se, že i při úplném odrazu vnikne vlnění do druhého prostředí, ale pouze do nepatrné vrstvičky o tloušťce $d \sim \lambda$ pod rozhraním. Z ní se energie vrací zpět do prvního prostředí. Je-li v této vrstvičce pod rozhraním R nějaký objekt, úplný odraz se poruší.

3. V optice se vyslovuje Snellův zákon s užitím indexů lomu obou prostředí, n_1, n_2 , definovaných vztahy $n_1 = c/v_1, n_2 = c/v_2$, kde c je rychlost světla ve vakuu. Pak

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} \implies n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

V této formě se Snellův zákon pro lom pamatuje pravděpodobně nejsnáze.

7.1.9 Příklady – Vlnění

{pr7.P-1}

KP 7-8 —————

Na vlákne se šíří ve směru osy Ox příčná lineárně polarizovaná vlna rychlostí $c = 4 \text{ m s}^{-1}$. V okamžiku $t_1 = 0 \text{ s}$ má vlákno tvar naznačený v obr. 7.6. Úkoly: 1. Nakreslete tvar vlákna, v čase $t_2 = 0,2 \text{ s}$; 2. Rozhodněte, zda a kterým směrem se v čase t_1 pohybují body A, B, C, D, E, F, G . Zakreslete; 3. Rozhodněte, který z uvedených bodů má v čase t_1 největší rychlost. Pokuste se tuto rychlost odhadnout.

{pr7.P-2}

KP 7-9 —————

V pryžové tyči se šíří podélná vlna ve směru osy Ox rychlostí $c = 4 \text{ m s}^{-1}$. Výchylka v čase $t = 0$ je dána křivkou v obr. 7.6. Úkoly. 1. Rozhodněte, které elementy tyče jsou v čase t_1 vychýleny a) ve směru postupu vlny, b) proti směru postupu vlny; 2. Rozhodněte, zda a kterým směrem se v čase t_1 pohybují ty elementy tyče, které jsou znázorněny body A, E, F, G ; 3. Rozhodněte, které části tyče jsou v okamžiku t_1 namáhány a) na tlak, b) na tah; 4. Zjistěte, od kterého okamžiku bude element v bodě C trvale v klidu.

{pr7.P-3}

KP 7-10 —————

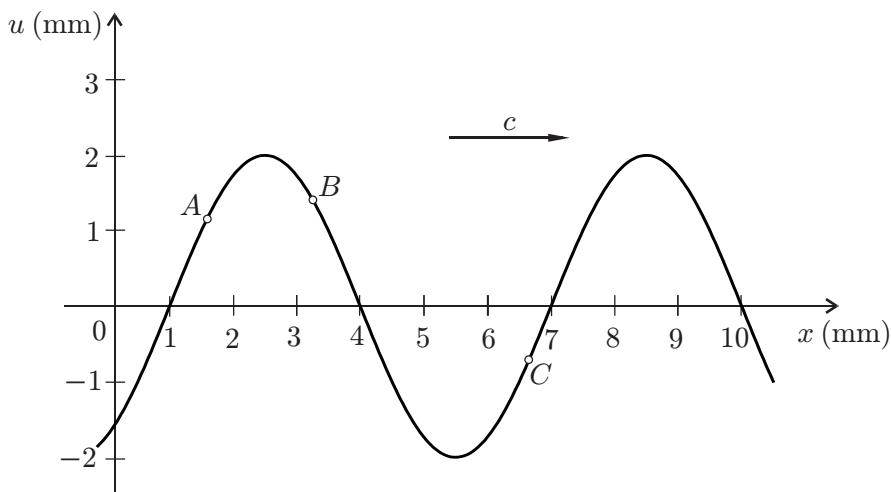
Bod Z napjatého vlákna, které bylo v klidu pro všechna $t < 0$, je od okamžiku $t_1 = 0 \text{ s}$ periodicky vychylován ve směru kolmém na směr vlákna tak, že koná přímočaré kmity o výchylce $u(t) = 0,02 \sin 50t$ [SI]. Z tohoto bodu se šíří na vlákne oběma směry netlumené příčné vlny rychlostí $c = 8 \text{ m s}^{-1}$. Zaveďte osu Ox ležící na vlákne a počátek volte v bodě Z . Sestrojte náčrtek a řešte úkoly: 1. Napište vztah pro výchylku ve vlně, která se šíří a) ve směru Ox , b) proti směru Ox ; 2. Určete čas, v němž začne kmitat bod P vlákna, jenž je ve vzdálenosti $d = 4 \text{ m}$

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

od bodu Z ; 3. Pro bod P určete a) periodu kmitů, b) fázovou konstantu kmitů, c) maximální výchylku, d) maximální rychlost, e) maximální zrychlení; 4. Určete vlnovou délku.

{pr7.P-4} **KP 7-11** _____

Na napjatém vlákně se šíří příčná lineárně polarizovaná harmonická vlna. Tvar vlákna v čase $t_1 = 0$ s a směr šíření vlny je znázorněn v obr. 7.13. Výchylka elementů vlákna je dána vztahem $u(t) = 0,01 \sin(20\pi t - 10x)$ [SI]. Určete: 1. Frekvenci kmitů elementů vlákna; 2. Rychlost šíření vlny; 3. Vlnovou délku; 4. Směr a velikost rychlosti bodu a) A , b) B v čase t_1 ; 5. Směr zrychlení bodu D . Určete přibližně velikost tohoto zrychlení.



{obr5236}

Obr. 7.36

{pr7.P-5} **KP 7-12** _____

V obr. 7.36 je znázorněno v určitém okamžiku t_0 vlákno, jímž se šíří příčná sinusová vlna, v naznačeném směru rychlostí $c = 40 \text{ ms}^{-1}$. Určete: 1. Směr, ve kterém se právě pohybují body A, B, C vlákna; 2. Vlnovou délku vlnění; 3. Frekvenci kmitů jednotlivých bodů vlákna; 4. Amplitudu kmitů; 5. Jeden bod, který kmitá se stejnou fází jako bod A ; 6. Jeden bod, který má právě nulovou rychlost.

{pr7.P-6} **KP 7-13** _____

Svislá výchylka bodu P o souřadnici $x_P = 0$ na vlákně, na kterém se šíří ve směru osy Ox příčná sinusová vlna rychlostí $c = 50 \text{ ms}^{-1}$, je znázorněna křivkou v obr. 7.37. Určete: 1. Frekvenci kmitů bodu P a bodu P' o souřadnici $x_{P'} = 0,8 \text{ m}$; 2. Vlnovou délku vlnění; 3. Směr, kterým se pohybuje bod P v okamžiku $t_1 = 0,3 \text{ s}$.

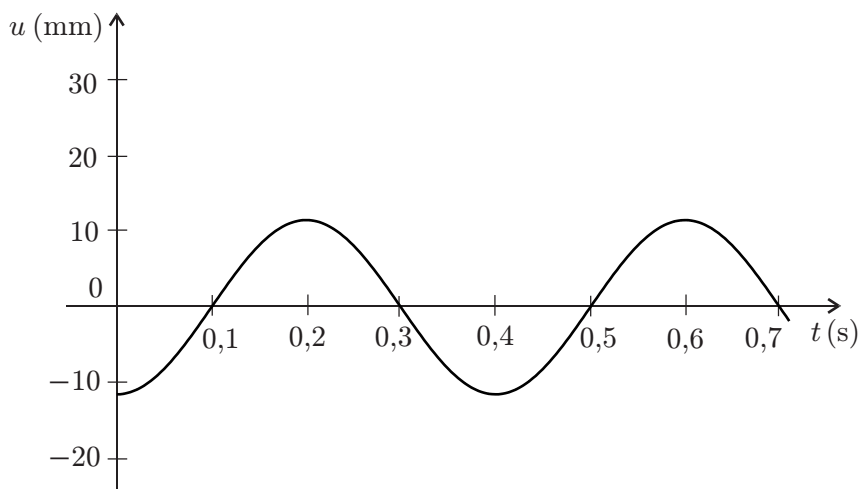
{pr7.P-7} **KP 7-14** _____

Výchylka v netlumené harmonické rovinné vlně je dána vztahem $u(y, t) = 8 \cdot 10^{-6} \sin(170t + 0,5y)$ [SI]. Určete: 1. Směr šíření; 2. Amplitudu a frekvenci kmitů v bodě Q_1 o souřadnici $y_1 = 120 \text{ mm}$; 3. Rychlost vlnění a vlnovou délku; 4. Fázovou konstantu kmitů v bodech Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 o souřadnicích $y_2 = 0, y_3 = +\lambda, y_4 = -\lambda, y_5 = \frac{\lambda}{2}$; 5. Fázový rozdíl kmitů v bodech, vzdálených od sebe o 5λ .

{pr7.P-8} **KP 7-15** _____

Na hladinu jezera dopadá ze vzduchu zvuková vlna o vlnové délce $\lambda_1 = 0,8 \text{ m}$, částečně se odráží

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ



{obr5237}

Obr. 7.37

a částečně (zcela nepatrně) se láme do vody. Rychlost zvuku ve vzduchu je $v_1 = 340 \text{ m s}^{-1}$, rychlost zvuku v jezerní vodě je (podle tabulek] asi $v_2 = 1450 \text{ m s}^{-1}$. Určete: 1. Frekvenci zvuku ve vzduchu; 2. Frekvenci zvuku ve vodě; 3. Vlnovou délku vlnění ve vodě; 4. Modul objemové pružnosti vody; 5. Stlačitelnost vody.

{pr7.P-9} **KP 7-16** _____

Na vodní hladině jezera, uvedeného v příkladě **KP 7-15**, vybuchla v okamžiku $t_0 = 0 \text{ s}$ v místě P_1 nálož. Do místa P_2 na hladině jezera dorazily vlny, šířící se přímo z místa výbuchu vzduchem a vodou, s časovým rozdílem $\Delta t = 2 \text{ s}$. Určete: 1. Čas, v němž dorazila do P_2 vlna, šířící se a) vodou, b) vzduchem; 2. Vzdálenost míst P_1, P_2 .

{pr7.P-10} **KP 7-17** _____

Vzduchem o teplotě $t_1 = 0^\circ \text{C}$ se šíří rychlostí $v_1 = 331,6 \text{ m s}^{-1}$ zvukové vlny o frekvenci $f = 600 \text{ Hz}$. Určete: 1. Vlnovou délku; 2. Změnu a) rychlosti šíření, b) vlnové délky při vzrůstu teploty o 1°C (užijte diferenciálů); 3. Rychlost šíření při teplotě $t_2 = 40^\circ \text{C}$.

{pr7.P-11} **KP 7-18** _____

Jednoduchý tón o frekvenci $f = 1000 \text{ Hz}$ a o intenzitě $I = 0,01 \text{ W m}^{-2}$ se šíří a) ve vzduchu, b) v jezerní vodě. Určete: 1. Maximální výchylku; 2. Maximální rychlost; 3. Maximální zrychlení elementů prostředí v obou případech.

{pr7.P-12} **KP 7-19** _____

Vlnění o frekvenci $f = 1000 \text{ Hz}$ vnímá lidské ucho jako zvuk, jestliže jeho intenzita I leží v intervalu $(10^{-12}; 10^0) \text{ W m}^{-2}$. Určete příslušný interval; 1. Amplitud akustických výchylek; 2. Amplitud akustických tlaků ve vzduchu.

{pr7.P-13} **KP 7-20** _____

Zvuk o frekvenci $f = 440 \text{ Hz}$ se šíří a) ve vodíku, b) v kyslíku při teplotě $t = 0^\circ \text{C}$. Považujte oba plyny za ideální a určete pro ně: 1. Rychlost šíření vlnění; 2. Vlnovou délku.

7.1. POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

{pr7.P-14} **KP 7-21** _____

V ocelové tyči délky $l = 1,2$ m, pevně uchycené v jejím středu (konce jsou volné) vzniká podélné stojaté vlnění. Modul pružnosti oceli v tahu je $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$, její měrná hmotnost $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Nakreslete náčrtek a určete: 1. Rychlost šíření vlnění v tyči; 2. a) Vlnové délky, b) frekvence stojatých vln, které mohou v tyči vzniknout. Zakreslete.

{pr7.P-15} **KP 7-22** _____

Řešte příklad **KP 7-21** pro:

1. Mosaz ($E = 9,0 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$, $\rho = 8,5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$);
 2. Hliník ($E = 7,4 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$, $\rho = 2,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$).
-

{pr7.P-16} **KP 7-23** _____

Struna délky $l = 500$ mm o hmotnosti $m = 2$ g má základní tón o frekvenci $f_1 = 200$ Hz. Nakreslete náčrtek a určete: 1. a) Vlnové délky, b) frekvence stojatého vlnění, které může na struně vzniknout. Zakreslete; 2. Rychlost šíření příčného vlnění na struně; 3. Sílu, kterou je struna napínána; 4. Jak (o kolik procent) je nutno takovou sílu změnit, aby se základní frekvence struny zvýšila na $f = 201$ Hz. Doporučení: k výpočtu užitje diferenciálů.

{pr7.P-17} **KP 7-24** _____

Řešte příklad **KP 7-23** pro $l = 800$ mm, $m = 6$ g, $f_1 = 60$ Hz, $f = 61$ Hz.

{pr7.P-18} **KP 7-25** _____

Houslová struna A má délku $l = 330$ mm a hmotnost $m = 1$ g. Její základní frekvence je $f_1 = 440$ Hz. Určete: 1. Rychlost příčného vlnění na struně; 2. Sílu, kterou je struna napínána; 3. Kam je nutno položit prst, aby struna vydávala tón C o frekvenci $f = 528$ Hz; 4. Řešte úkoly 1, 2, 3 za podmínky, že v zadání se změní hmotnost na $m = 2$ g.

{pr7.P-19} **KP 7-26** _____

Dva velmi malé koherentní zdroje zvuku Z_1 , Z_2 ve vzduchu ($c = 340 \text{ m s}^{-1}$), vzdálené od sebe o $a = 800$ mm, kmitají se stejnými amplitudami ve fázi s frekvencí $f = 1000$ Hz. Nakreslete náčrtek a určete: 1. Rozdíl fází kmitů ve vlnách z obou zdrojů v bodech P_1 , P_2 , které leží na jejich spojnici ve vzdálenosti $l = 20$ m od Z_1 ; 2. Všechny směry, v nichž vznikne ve velké vzdálenosti od obou zdrojů (např. $l' = 200$ m) interferenční maximum; 3. Všechny směry, v nichž nebude ve vzdálenosti l' zvuk slyšet.

{pr7.P-20} **KP 7-27** _____

Řešte příklad **KP 7-26** pro $a = 500$ mm, $f = 1020$ Hz za předpokladu, že zdroje kmitají s opačnými fázemi ($\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$).

{pr7.P-21} **KP 7-28** _____

Ve výšce $a = 2$ m nad klidnou vodní hladinou vysílá malá radarová anténa elektromagnetické vlny o vlnové délce $\lambda = 50$ mm. Do prostoru nad vodní hladinou se šíří vlny jednak přímo ze zdroje, jednak vlny odražené od vodní hladiny. Při odrazu na vodní hladině se mění fáze odražených vln o π . Uvažujte o části prostoru nad vodní hladinou ve vzdálenosti $l = 3$ km od zdroje, nakreslete náčrtek a řešte úkoly: 1. Vyšetřete tvar vlnoploch odraženého vlnění; 2. Popište a vyložte jev, ke kterému dochází; 3. Určete polohu interferenčních maxim a minim; 4. Zjistěte, v jaké výšce nad hladinou musí letět letadlo, aby uvedeným radarem nebylo zjištěné.

{pr7.P-22}

KP 7-29 _____

Tramvajové vozy vyjíždějí z konečné stanice vždy po pěti minutách a jedou průměrnou rychlostí 25 km h^{-1} . Chodec jde podél kolejí rychlostí 5 km h^{-1} a to: 1. Proti směru jízdy; 2. Ve směru jízdy. Určete, v jakých časových intervalech jej vozy míjejí.

Poznámka: užití výsledku teorie Dopplerova jevu.

{pr7.P-23}

KP 7-30 _____

Na palubě kosmické lodi vzdalující se v radiálním směru od Země vysílá zdroj Z_1 elektromagnetické vlny s frekvencí $f_1 = 50 \text{ MHz}$. V přijímači na Zemi se skládá přijatý signál (napěťové kmity) s kmity místního zdroje Z_2 , který má rovněž frekvenci f_1 . Diferenční frekvence vzniklých záznejů je $f_z = 1000 \text{ Hz}$. Určete rychlost kosmické lodi vzhledem k Zemi.

8. Optika

{Optika}

8.1 Vlnová optika

{lnovaOptika}

8.1.1 Fyzikální podstata světla

{stataSvetla}

8.1.1.1 Rovinná elektromagnetická vlna

{nnaElmgVlna}

Vznik a podstata elektromagnetických vln byly stručně popsány v odstavci 7.1, obr. 7.2. Přečtěte si tuto část znovu.

Objev elektromagnetických vln v druhé polovině devatenáctého století znamenal mezník v rozvoji sdělovací techniky. Na základě relativně jednoduchého teoretického výsledku, který v té době získal J. C. Maxwell, vzniklo jedno z nejvýznamnějších odvětví fyziky a techniky — teorie a praxe šíření elektromagnetických vln.

Je zajímavé, že u kolébky nauky o elektromagnetických vlnách byla teorie, nikoliv experiment. Existenci elektromagnetických vln předpověděl Maxwell na základě rozboru rovnic vyjadřujících vztahy mezi vektorovými funkcemi \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} charakterizujícími elektromagnetické pole, jež jsou dnes označovány jeho jménem — Maxwellovy rovnice (viz 1.5.2.2).

Důkaz, že z Maxwellových rovnic plyne možnost existence elektromagnetických vln, nebudeme provádět, naznačíme jen postup: Rovnice (1.159)–(1.163) se převedou (s užitím výsledků vektorové analýzy) do diferenciálního tvaru, který zní:

$$\{611\} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.1)$$

Elektromagnetické pole v homogenním lineárním dielektriku, v němž nejsou ani náboje, ani proudy, dostaneme dosazením $\rho = 0$, $\gamma = 0$. V tomto případě lze z rovnic (8.1), napsaných v inerciálním vztažném systému $Oxyz$, odvodit vztah

$$\{612\} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.2)$$

(odvození není pro toho, kdo ovládá vektorovou analýzu, obtížné). Zcela stejným rovnicím vyhovují i vektory \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} . Rovnice (8.2) však je D'Alembertova vlnová rovnice (7.29), v níž je $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$. Rovnice (8.2) a analogické rovnice pro \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} mají obrovské množství řešení. Ta z jejich řešení, která současně splňují i rovnice (8.1), vyjadřují různá možná elektromagnetická pole, která mohou existovat v uvažovaném prostředí.

Rovinná lineárně polarizovaná harmonická vlna Jedno z možných řešení uvedených rovnic v nevodivém prostředí o permitivitě ε , a permeabilitě μ jsou v souřadnicovém systému $Oxyz$ funkce

$$\{613\} \quad \vec{E} = \vec{i} E_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad \vec{H} = \vec{j} H_0 \sin \omega \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (8.3)$$

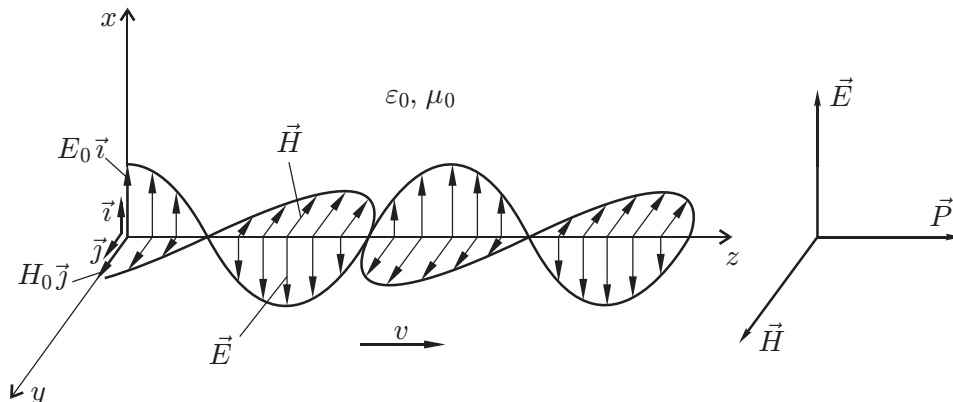
Zde jsou $\vec{i} E_0$, $\vec{j} H_0$ amplitudy intenzity elektrického a magnetického pole, vázané vztahem $\sqrt{\varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu} H_0$, jinak libovolné. Dále: ω je (libovolná) úhlová frekvence a

$$\{614\} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad (8.4)$$

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

kde c je rychlost světla ve vakuu.

Z tvaru funkcí (8.3) je zřejmé, že vyjadřují harmonické elektromagnetické pole, které se šíří rychlostí v ve směru osy Oz , tj. rovinnou elektromagnetickou vlnu. Průběh funkcí \vec{E} , \vec{H} na ose Oz v některém pevném okamžiku t je znázorněn na obr. 8.1. Vektor \vec{E} v libovolném bodě prostoru kmitá s úhlovou frekvencí ω rovnoběžně s osou Ox — míří střídavě ve směru a proti směru osy Ox . Vektor \vec{H} kmitá podobně rovnoběžně s osou Oy .



{obr611}

Obr. 8.1

Dopadne-li toto elektromagnetické pole na vodivé prostředí, působí na libovolný náboj q tohoto prostředí periodická elektrická síla $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Je-li náboj q volný, koná nucený kmitavý pohyb, sám začne vysílat magnetické vlny a odnímá část energie dopadající vlně. Tyto sekundární vlny vytvoří vlnu odraženou a lomenou.

Ježto elektromagnetické pole má energii (odstavce 1.2.4.6, 1.5.1 v textu Fyzika2), přenáší vlna (8.3) energii rychlostí v . Proudění energie v každé vlně je charakterizováno intenzitou vlnění I (odstavec 7.1.7).

Proudění energie v elektromagnetické vlně je charakterizováno tzv. Poyntingovým vektorem \vec{P} , definovaným vztahem

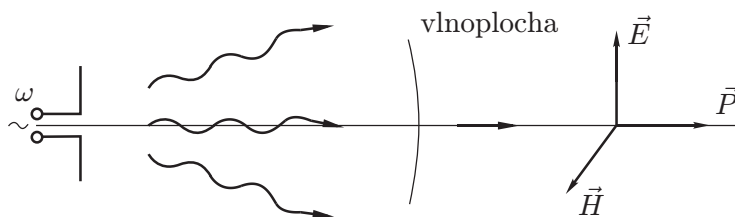
$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (8.5)$$

Takto definovaný vektor má tento fyzikální význam: 1. Směr Poyntingova vektoru \vec{P} je totožný se směrem proudění energie ve vlně (obr. 8.1); 2. Velikost střední časové hodnoty $\vec{P}_{\text{stř}}$ vektoru \vec{P} , kde $\vec{P}_{\text{stř}} = \frac{1}{2}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0) = \frac{1}{2}(E_0 \vec{i} \times H_0 \vec{j})$, je rovna intenzitě vlnění, tj. platí

$$I = |\vec{P}_{\text{stř}}| = \frac{1}{2}E_0H_0. \quad (8.6)$$

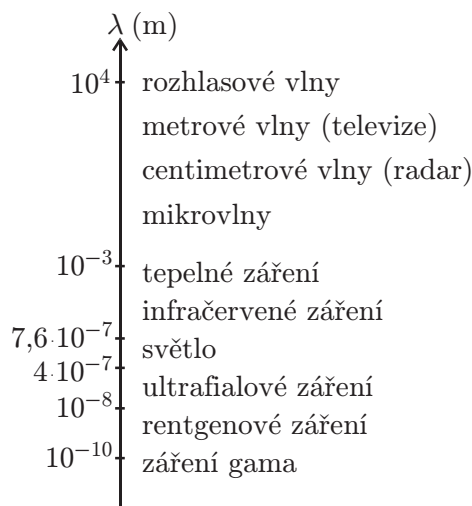
Důležité výsledky:

- Podle této teorie se šíří libovolné elektromagnetické signály bez změny tvaru rychlostí $v = c/\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ závislou na prostředí. Přesnější teorie uvažující pohyb volných i vázaných nábojů v látkách vede k závěru, že rychlost harmonického elektromagnetického vlnění v látce závisí i na jeho frekvenci. Tento jev se nazývá **disperze**. Vede např. k tomu, že úhly lomu pro světla různých frekvencí jsou různé (vznik spektra lomem na hranolu), neboť index lomu látky $n = c/v$ je závislý na frekvenci procházejícího světla.
- Zdrojem rovinného lineárně polarizovaného vlnění (8.3) je např. dipólová anténa (obr. 8.2) připojená ke zdroji vysokofrekvenčního střídavého napětí. Ve velké vzdálenosti od dipólu jsou vlnoplochy přibližně rovinné a elektromagnetické pole je popsáno rovnicemi (8.3).



{obr612}

Obr. 8.2



{obr613}

Obr. 8.3

3. Vlastnosti elektromagnetických vln i jejich buzení, detekce a účinky závisí velmi podstatně na jejich vlnové délce. Přehled je uveden v obr. 8.3. Poznamenejme, že rychlost elektromagnetického vlnění ve vakuu, určená ze vztahu (8.4), v němž veličiny ϵ_0 a μ_0 byly již dříve změřeny, se shodovala s naměřenou rychlostí světla. Takto se ihned v začátku teorie elektromagnetického vlnění zjistilo, že světlo je (s největší pravděpodobností) elektromagnetické vlnění.

8.1.1.2 Viditelné světlo

Viditelné světlo je elektromagnetické vlnění o velmi vysokých frekvencích $f \in (4 \cdot 10^{14}; 7,5 \cdot 10^{14})$ Hz, tj. o velmi malých vlnových délkách $\lambda \in (400; 760)$ nm.

Zdrojem světla jsou většinou atomy a molekuly. Světlo vzniká v jejich elektronových obalech (tj. nikoliv v jádrech). Zdrojem světla však mohou být i nabitě částice, např. protony, pohybující se s velkým zrychlením. V makroskopických zdrojích světla (žárovkách, výbojkách, zářivkách, plamenech atd.) se podílejí na záření obrovská množství atomů, molekul i volných částic. Vyročíme stručně fyzikální děje v látkách, které vydávají vlastní světlo a v látkách, které světlo, vyšlé z jiných zdrojů, odrážejí.

Zdroje vlastního světla Elektronů v atomových obalech mohou být pouze ve stavech, v nichž mají docela určité pro atom daného druhu charakteristické energie. Označíme je $E_1, (<)E_2, (<)E_3, \dots$ a budeme je nazývat energie atomu. Trvale izolovaný atom je vždy ve stavu s nejmenší energií E_1 , v tzv. základním stavu. Účinkem jiných objektů — např. srážkou s jiným atomem, částicí nebo působením elektromagnetického záření — se může dostat do stavu s vyšší energií.

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

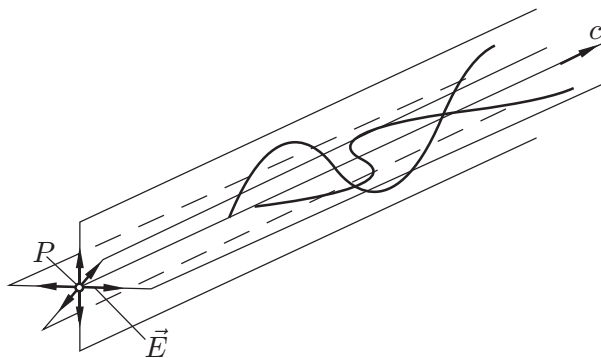
To se děje ve žhnoucích látkách (vzájemné srážky vlivem tepelného pohybu), ve výbojkách (vzájemné srážky vlivem pohybu způsobeného elektrickými silami) atd. Ze stavu s vyšší energií, např. E_i , může přejít do stavu s nižší energií, např. E_f tak, že vyzáří elektromagnetické záření o energii $\Delta E = E_f - E_i$. Toto záření je lineárně polarizovaná harmonická vlna o frekvenci f dané vztahem $hf = E_f - E_i$, tj. o frekvenci $f = (E_f - E_i)/h$, kde $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s je tzv. Planckova konstanta. Podle velikosti rozdílu $E_f - E_i$ leží f buď v oboru infračerveného záření nebo viditelného nebo ultrafialového nebo dokonce rentgenového záření. Proces vyzáření trvá velmi krátce, řádově 10^{-8} s. Vyzářená vlna je tedy prostorově ohraničena. Nazývá se **foton**. Energie fotonu je velmi malá a nestačí např. k tomu, aby jeden foton vyvolal světelný počíteč.

Podrobnější informace o stavbě a energetických stavech atomu i o záření jsou uvedeny v části 1.2 textu [Kvantová mechanika](#).

Ve zdrojích světla se podílí na záření obrovské množství atomů a molekul. V běžných zdrojích (nikoliv v laserech) emitují atomy fotony samovolně, nezávisle na sobě. Pokud se záření zúčastní jen atomy stejného druhu, např. jen atomy He nebo jen atomy Na atd., a pokud dochází pouze k přechodům mezi dvěma zcela určitými energetickými stavy, mají všechny fotony téměř stejnou frekvenci a světlo je jednobarevné (**monochromatické**). Tento případ je výjimečný, většinou je ve světle zdrojů obsaženo více frekvencí a ve světle ze žhnoucích zdrojů dokonce všechny frekvence ze širokého intervalu frekvencí. Toto světlo se nazývá **polychromatické**.

Monochromatické i polychromatické světlo sestává z fotonů, které mají a) různé fáze, b) různé roviny polarizace, c) různé směry, neboť byly emitovány v různých okamžicích samovolně navzájem nezávislými atomy. Světelné pole v paprsku takového světla sestává z obrovského množství částečně se překrývajících přibližně sinusových vln konečné délky s náhodnou fází a s náhodnou rovinou polarizace (obr. 8.4). Vektor \vec{E} („světelný vektor“) v libovolném bodě P kmitá postupně v různých směrech kolmých na směr šíření, přičemž směr i fáze kmitu se velmi rychle náhodně mění. Takovéto světlo se nazývá „přirozené světlo“.

Poznamenejme ihned, že na rozdíl od přirozeného světla je světlo z laseru složeno z fotonů, které mají (téměř) stejnou frekvenci, fázi i rovinu polarizace.



{obr614}

Obr. 8.4

Zdroje odraženého světla Většina předmětů kolem nás nevyzařuje vlastní světlo. Předměty vidíme proto, že se od nich světlo odráží.

Odraz světla je dosti složitý fyzikální děj. Světlo dopadající na látku vniká dovnitř a působí na její nabitě částice — atomová jádra, ionty, volné elektrony i elektrony v orbitech atomů a molekul — periodickými elektrickými a magnetickými silami ($\vec{F}_E = q\vec{E}$, $\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$). Účinkem těchto sil (z nichž magnetické jsou většinou zanedbatelné) náboje oscilují s frekvencí dopadajícího světla. Pohyb těžkých částic — jader — je zanedbatelně malý, pohyb elektronů nikoliv. Volné oscilující elektrony (např. v kovech) i oscilující elektrony v orbitech atomů a molekul

jsou zdrojem sekundárního elektromagnetického vlnění — světla — o frekvenci rovné frekvenci světla dopadajícího. Sekundární vlny ze všech ozářených částic se skládají. Vně látky vytvářejí vlnění, které nazýváme odražené světlo. Uvnitř látky se sekundární vlnění skládá s dopadajícím světlem a vytváří světlo, které nazýváme lomené nebo prošlé světlo. Část energie dopadajícího světla přechází v energii neuspořádaného tepelného pohybu molekul — látka světlo absorbuje.

Je zřejmé, že na vlastnosti a na "kvalitu" odraženého světla má vliv jak dopadající světlo, tak i látka sama. Elektronů v látce kmitají v rytmu kmitu dopadajícího elektromagnetického (světelného) pole. Vyzařují tedy světlo, které má stejnou frekvenci jako světlo dopadající. Fáze a polarizační rovina tohoto světla se mění v rytmu změn v dopadajícím světle. Avšak amplituda kmitů elektronu, a tedy i amplituda vektorů \vec{E} , \vec{H} v odraženém světle, závisí velmi podstatně i na tom, jak jsou elektrony vázány k jádrům a jaká je frekvence jejich vlastních kmitů, dále pak na jejich počtu atd. V důsledku toho se odrážejí světla různých frekvencí od látky různě. Spektrální složení (tj. rozložení energie na různé frekvence) odraženého a dopadajícího světla je různé. Tento jev se nazývá **selektivní odraz**. Jeho důsledkem je to, že světlo, které odráží předmět osvětlený bílým světlem, je zbarveno. Proto mají předměty "barvu". Předměty ozářené monochromatickým světlem mají pouze "barvu" tohoto světla.

8.1.1.3 Koherentní a nekoherentní světlo

V poslední době se v technické praxi užívá k nejrůznějším účelům **světla laserů**. Monochromatické světlo laseru se liší od monochromatického záření běžného zdroje světla zejména tím, že se chová v jistém smyslu (který v dalším vysvětlíme) podobně jako elektromagnetické záření buzené anténami napájenými vysokofrekvenčními oscilátory, např. jako radarové vlny; nemění v relativně dlouhém časovém intervalu fázi kmitu. Tuto vlastnost světla vyjadřujeme označením „**koherentní světlo**“. V koherentním světle vznikají výrazné interferenční a ohybové jevy, jichž se využívá ve strojírenské praxi ke zjišťování a měření malých deformací, posuvu, nehomogenit průhledných látek, rychlosti proudění tekutin, vytváření hologramu atd. Část optiky spočívající na využití koherence světla se nazývá **koherentní optika**.

Cílem tohoto odstavce je výklad vlastností koherentních a nekoherentních zdrojů a vlastností koherentního a nekoherentního světla.

Koherentní a nekoherentní zdroje záření. V odstavci 7.1.7.2 bylo uvedeno, že vlny ze dvou zdrojů akustického vlnění (např. ze dvou ladiček) nebo ze dvou makroskopických zdrojů elektromagnetického vlnění (např. ze dvou malých antén napájených jedním oscilátorem), které kmitají harmonicky se stejnými frekvencemi, interferuje. V oblasti, kde se vlny z obou zdrojů překrývají, skládají se kmity o stejných frekvencích. V každém bodě vznikají tedy harmonické kmity. Fázový rozdíl těchto kmitů je v každém bodě interferenční oblasti jiný, ale s časem se nemění. Amplitudy kmitů jsou tedy v různých bodech různé a s časem neměnné. V některých bodech vznikají trvalá interferenční maxima, v jiných trvalá interferenční minima. To je pro interferenci charakteristické.

Připomeňme, že složením kmitů o různých frekvencích nevzniká harmonický pohyb. Při superpozici vlnění ze dvou zdrojů různých frekvencí k interferenci nedochází. Světla ze dvou různých světelných zdrojů Z_1 , Z_2 — např. ze dvou shodných sodíkových výbojek — však neinterferují ani tehdy, když jsou monochromatická a když mají stejnou frekvenci. Důvod je v tom, že v obou světelných vlnách se mění s velkou rychlostí zcela nepravidelně, náhodně, fáze kmitu, a to v každém z obou světél jinak. Proto i rozdíl fází kmitů vektorů \vec{E}_1 , \vec{E}_2 v obecném bodě P světelného pole se mění velmi rychle a nepravidelně. Totéž platí i o amplitudě výsledných kmitů. Střední časová hodnota hustoty světelné energie je ve všech bodech osvětlené oblasti přibližně stejná, trvalá maxima a minima se nevytvářejí, tj. světla neinterferují.

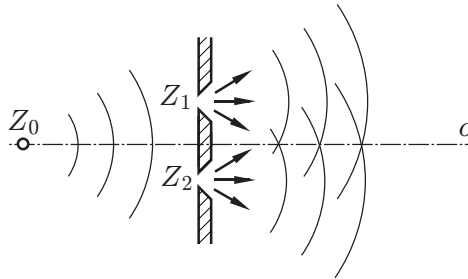
8.1. VLNOVÁ OPTIKA

Z hlediska interference dělíme dvojice (nebo skupiny většího počtu) zdrojů vlnění na koherentní a nekoherentní.

Koherentní zdroje jsou zdroje, které mají tyto vlastnosti:

- kmitají se stejnými frekvencemi,
- rozdíl fází kmitů jednotlivých zdrojů se nemění (poznámka: fáze kmitů se přitom může náhodně měnit, ale ve všech zdrojích stejně tak, aby rozdíl fází byl stejný).

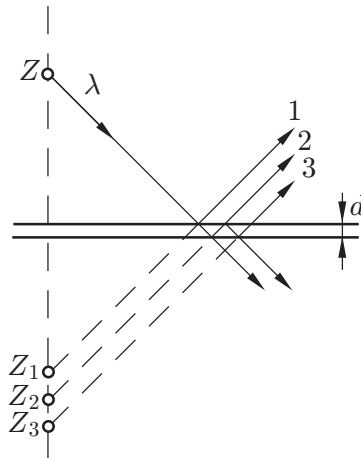
Nekoherentní zdroje jsou ty, které nejsou koherentní. Světla z koherentních zdrojů interferují. Světla z nekoherentních zdrojů neinterferují.



{obr615}

Obr. 8.5

Dva (fyzicky) různé zdroje světla, s výjimkou laseru, jsou vždy nekoherentní. Koherentní zdroje světla se získají tím, že se užije pouze jednoho zdroje a jeho světlo se rozdělí vhodným způsobem tak, že vzniknou dva sekundární (nebo zdánlivé) zdroje světla. Např. na obr. 8.5 jsou znázorněny dvě úzké blízko sebe ležící štěrbiny Z_1 , Z_2 ve stínítku S , osvětelné zdrojem Z_0 monochromatického světla umístěným na ose souměrnosti o úsečky Z_1Z_2 . Fáze kmitu ve štěrbinách Z_1 , Z_2 se velmi rychle, ale současně, mění. Pro oblast napravo od stínítka představují štěrbinu Z_1 , Z_2 dva koherentní zdroje. V oblasti nepříliš vzdálené od osy o světla interferují.



{obr616}

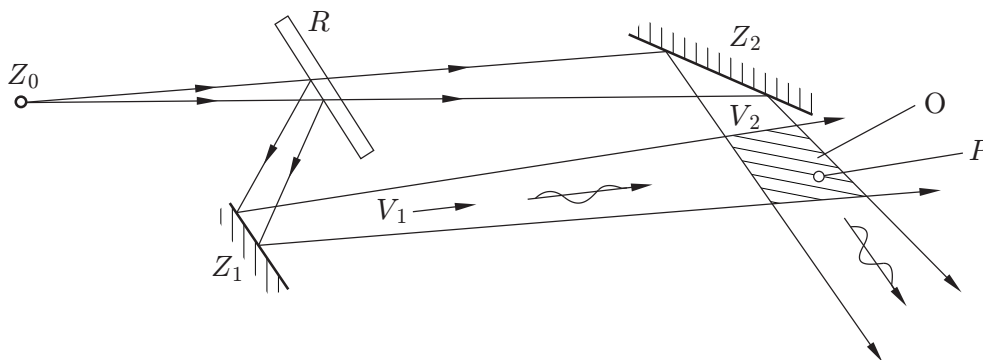
Obr. 8.6

Na obr. 8.6 je znázorněna velmi tenká vrstva tloušťky d , na kterou dopadá z bodového zdroje Z monochromatické světlo o vlnové délce λ . Paprsky 1, 2, 3, ... vzniklé postupnými odrazy a lomy mají vlastnosti shodné se světlem, které by vycházelo z bodů Z_1, Z_2, Z_3, \dots , tj. ze zdánlivých zdrojů. Jeli vrstva velmi tenká ($d \sim \lambda$), jsou tyto zdánlivé zdroje téměř koherentní a světla 1, 2, 3, ... interferují.

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

Existuje řada dalších způsobů a zařízení, jimiž lze získat dva nebo větší počet zdánlivých nebo sekundárních koherentních (nebo téměř koherentních) zdrojů s užitím jediného skutečného zdroje světla.

Koherentní a nekoherentní světlo Uspořádejme pokus podle obr. 8.7. Světlo z běžného monochromatického zdroje Z_0 dopadne na polopropustné zrcadlo R , na něm se částečně odrazí, částečně projde. Odražené světlo je nasměrováno zrcadlem Z_1 do oblasti O (vlna V_1), prošlé světlo se odrazí na zrcadle Z_2 tak, že vzniklá vlna V_2 se setkává s V_1 v oblasti O . Ukazuje se, že při obecné volbě polohy zrcadel Z_1, Z_2 k interferenci nedojde. Proč? Proto, že ve světle z běžného zdroje se nesmírně rychle mění fáze kmitů. Dráha Z_0RZ_1P , kterou urazila vlna V_1 ze zdroje Z_0 do obecného bodu P , je delší než dráha Z_0RZ_2P , kterou urazila vlna V_2 . Vlna V_1 se tedy v bodě P nesetkává s tou částí vlny V_2 , která byla vyzářena zdrojem Z_0 současně s V_1 , nýbrž s částí, která byla vyzářena později. Proto se fáze kmitů v každé z vln V_1, V_2 v bodě P mění jinak a tedy i rozdíl fází se mění velmi rychle a náhodně. V oblasti O tudíž vlny V_1, V_2 neinterferují. Je zřejmé, že vlny V_1, V_2 by v bodě P interferovaly tehdy, kdyby pokus byl uspořádán tak, že by obě vlny urazily ze zdroje Z_0 do bodu P stejné dráhy, tj. že by rozdíl těchto drah Δr byl nulový (nebo téměř nulový).



{obr617}

Obr. 8.7

Z hlediska interferenčních vlastností při pokuse znázorněném na obr. 8.7 dělíme světla různých zdrojů takto:

- **Koherentní světlo** je světlo, které interferuje při libovolné hodnotě rozdílu drah Δr .
- **Nekoherentní světlo** je světlo, které interferuje jen tehdy, je-li $\Delta r = 0$.
- **Částečně koherentní světlo** je světlo, které interferuje i při nenulové, ne příliš velké hodnotě rozdílu drah Δr .

Jestliže pokus znázorněný na obr. 8.7 uspořádáme tak, že nejprve je $\Delta r = 0$ a pak se Δr zvětšuje (např. vhodným posunutím zrcadel Z_1, Z_2), je interference nejprve velmi výrazná (velký rozdíl mezi intenzitou světla v maximech a minimech) a s rostoucím Δr se zmenšuje (téměř stejná intenzita v maximech a minimech). Největší hodnota dráhového rozdílu Δr , při níž ještě dojde k interferenci, se nazývá **koherenční délka** světla. (Poznámka: tato poněkud neurčitá definice koherenční délky se v teorii koherence upřesňuje.)

Koherenční délka světla z běžných monochromatických zdrojů je rovna několik λ , tj. řádu 10^{-6} m. Koherenční délka světla laseru je řádově 1 mm až 10^3 m. **Světlo laseru je téměř koherentní.**

Poznamenejme, že světlo vzniklé odrazem nekoherentního (koherentního) světla je opět nekoherentní (koherentní).

8.1.1.4 Polarizace světla

Světlo, v němž vektor \vec{E} kmitá pouze v jednom směru, se nazývá **lineárně polarizované**. Rovina určená směrem šíření světla a vektorem \vec{E} se nazývá **rovina polarizace**. (Poznámka: ve starší literatuře se považuje za rovinu polarizace rovina, která je na uvedenou rovinu kolmá.)

Přirozené světlo je nepolarizované (obr. 8.4). Lineárně polarizované světlo má některé vlastnosti odlišné od přirozeného světla: odrazivost povrchu všech látek pro polarizované světlo závisí na poloze roviny polarizace, podobně i propustnost některých látek. Těchto vlastností se využívá v technické praxi pro konstrukci polarizačních filtrů (které propouštějí pouze tu složku vektoru \vec{E} dopadajícího světla, která leží v jisté rovině), dále ke zkoumání průběhu mechanického napětí v průhledných modelech strojních a stavebních dílu atd.

Lineárně polarizované nekoherentní světlo lze znázornit soustavou překrývajících se sinusových vln konečné délky, lineárně polarizovaných v jedné rovině (rovina Oxz v obr. 8.1). Lze je získat z přirozeného světla buď odrazem pod vhodným úhlem, nebo průchodem vhodným (tzv. dvojlomným) prostředím.

8.1.2 Interference a ohyb světla

{5.2.3}

V této části vyložíme základní jevy interference a ohybu světla a sice ty jevy, které jsou důležité z hlediska aplikací v technické praxi a přitom jsou celkem jednoduché. Jsou to: 1. **Interference světla na tenké vrstvě** (HV (hlavní výsledek): odrazivost tenké vrstvy pro určité světlo závisí velmi podstatně na tloušťce vrstvy a na úhlu dopadu); 2. **Ohyb světla na štěrbině** (HV: světlo procházející štěrbinou ve stínítku se za ní šíří do všech směrů, a to do různých směrů s různou intenzitou); 3. **Ohyb světla na mřížce** (HV: světlo prošlé optickou mřížkou, nebo na ní odražené, se šíří pouze do určitých směrů, jež jsou pro různé vlnové délky různé. Světla různých vlnových délek se takto od sebe oddělí a vznikne spektrum); 4. **Holografie** (HV: zkoumaný předmět se osvětlí koherentním světlem laseru. Do oblasti odraženého světla se přivede přímé světlo z laseru, obě světla interferují. Do interferenčního pole se vloží fotografická deska a na ní se zachytí interferenční obrazec. Tato deska se po vyvolání nazývá hologram. Osvětlí-li se hologram koherentním světlem laseru, vznikne ohybem světelné pole, které je shodné s původním polem světla odraženého od předmětu, tj. pole se rekonstruuje).



8.1.2.1 Interference světla na tenké vrstvě

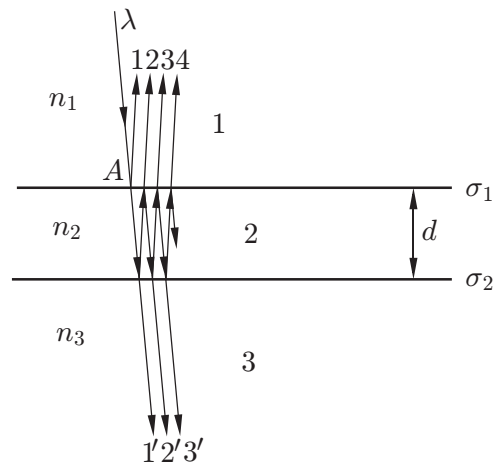
Kolmý dopad světla na tenkou planparalelní dielektrickou (tj. nevodivou) vrstvu.



- a) **Dopad monochromatického světla (λ).** Dielektrická vrstva tloušťky d nechť má index lomu n_2 ; přiléhající neohraničená dielektrika (obr. 8.8) nechť mají indexy lomu n_1, n_3 . Tloušťka d nechť splňuje podmínku $md < l_{\text{koh}}$, kde m je řádu 10^0 , např. $m = 5$ a kde l_{koh} je koherenční délka dopadajícího světla. Je-li dopadající světlo přirozené (nekoherentní), má koherenční délku $l_{\text{koh}} \sim m\lambda$, takže pak platí $d \sim \lambda$. Taková vrstva se nazývá opticky tenká. Je-li však dopadající světlo koherentní, může být vrstva i tlustá. Poznamenejme, že opticky tenké vrstvy (i kovové) jsou vždy průhledné.

Z prostředí 1 nechť dopadá kolmo na vrstvu nepříliš úzký svazek paprsků světla, tj. rovinná vlna. Na rozhraní σ_1 se světlo odráží a láme (obr. 8.8), lomený paprsek se dále odráží a láme na rozhraní σ_2 atd. Do prvního prostředí se vrací paprsky 1, 2, 3, ..., překrývají se a interferují, takže z nich vzniká jediná vlna — odražené světlo. Do třetího prostředí vnikají paprsky 1', 2', 3', ..., rovněž interferují a vytvářejí vlnu prošlou.

Amplituda odražené vlny závisí na fázovém rozdílu vln 1, 2, ... a ten opět závisí na rozdílu jejich optických drah. Je zřejmé, že rozdíl optických drah δ paprsků 1, 2 je stejný, jako



{obr618}

Obr. 8.8

rozdíly optických drah dvojic paprsků (2, 3), (3, 4) atd. Určíme rozdíl optických drah paprsků 1, 2: Paprsky vznikají v bodě A dělením dopadajícího paprsku odrazem a lomem. Paprsek 1 se vrací do prvního prostředí přímo, paprsek 2 urazí navíc ve vrstvě dráhu délky $2d$; rozdíl jejich skutečných optických drah je tedy $\delta = 2n_2d$. To však ještě není hledaný rozdíl optických drah, neboť při odraze na rozhraní dvou prostředí $n_j|n_k$ světlo buď změní fázi o π (je-li $n_j < n_k$), nebo ji nezmění (je-li $n_j > n_k$). Tento výsledek plyne z teorie a je experimentálně ověřen. Změní-li světlo fázi o π , má fázi takovou, jako kdyby urazilo navíc ve vakuu dráhu délky $\lambda/2$.

Při odrazech na rozhraních σ_1 , σ_2 paprsky 1, 7 tedy buď mění nebo nemění fázi, podle toho, které ze vztahů $n_1 \lesseqgtr n_2$, $n_2 \lesseqgtr n_3$ platí. Celkový rozdíl optických drah paprsků 1, 2 je roven $\delta' = 2n_2d + \varepsilon \frac{\lambda}{2}$, kde ε je buď rovno jedné, tj. $\varepsilon = 1$ (je-li buď $n_1 > n_2$, $n_2 < n_3$, nebo $n_1 < n_2$, $n_2 > n_3$), nebo platí $\varepsilon = 0$ (ve zbývajících případech). Je-li splněna podmínka

$$\{617\} \quad 2n_2d + \varepsilon \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad \text{kde } k = 1, 2, \dots, \quad \text{podmínka maxima pro odraz} \quad (8.7)$$

liší se fázové konstanty vln (paprsků) 1, 2, 3, ... o celistvé násobky 2π a jejich interferencí vzniká vlna o maximální amplitudě, tj. světlo se od vrstvy odráží s maximální intenzitou. Vztah (8.7) tedy vyjadřuje podmínku, za níž nastává maximální odraz na vrstvě, tj. podmínku maximálního odrazu.

Je-li ve vztahu (8.7) např. předepsáno λ a n_2 , pak podmínka (8.7) je splněna pro $d_1 = (\lambda - \varepsilon\lambda/2)/2n_2 \dots (k=1)$, $d_2 = \dots (k=2)$ atd.

Analogicky se odvodí podmínka pro minimální odraz

$$\{618\} \quad 2n_2d + \varepsilon \frac{\lambda}{2} = (2k-1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{kde } k = 1, 2, \dots \quad \text{podmínka minima pro odraz} \quad (8.8)$$

Užití: Zvýšení (nebo snížení) odrazivosti povrchu látky jeho pokrytím vhodnou tenkou vrstvou — **reflexní** (nebo **antireflexní**) **vrstva**. Reflexními vrstvami (nebo častěji reflexními soustavami vrstev) se pokrývá povrch zrcadel (např. zrcadel laserů), reflexních brýlí

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

atd. Antireflexními vrstvami se pokrývá povrch čoček objektivů fotoaparátů, dalekohledů, prvků slunečních kolektorů atd.

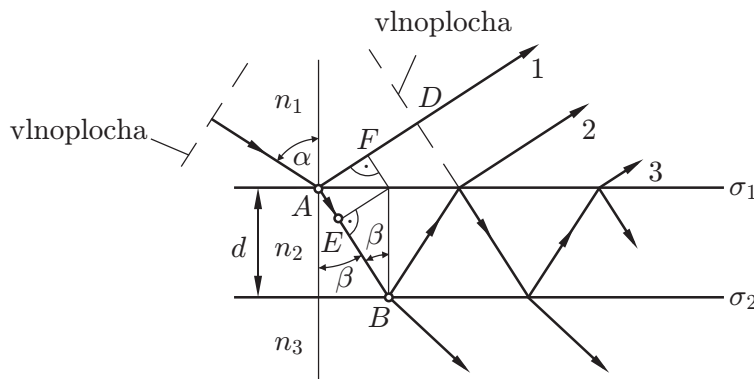
- b) **Dopad bílého světla.** Dopadá-li na tenkou vrstvu znázorněnou v obr. 8.8 kolmo bílé světlo, jehož vlnové délky pokrývají spojitě interval $I \equiv (400; 760)$ nm, je podmínka maxima (8.7) splněna pro vlnové délky $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, splňující vztahy

$$2n_2d + \varepsilon \frac{\lambda_k}{2} = k\lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

Některé z vlnových délek $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ mohou ležet v intervalu I . Světlo těchto vlnových délek se odráží více než světlo ostatních vlnových délek. Nejméně se odráží světlo vlnových délek $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots$, které splňují podmínku minima (8.8). Spektrální složení odraženého světla je tedy jiné než spektrální složení dopadajícího bílého světla — odražené světlo je zbarveno.

V prošlém světle jsou naopak relativně posíleny (zeslabeny) ty vlnové délky, které byly při odraze zeslabeny (posíleny). Prošlé světlo má doplňkovou barvu k barvě odraženého světla.

Šikmý dopad světla na tenkou planparalelní dielektrickou vrstvu Na tenkou planparalelní vrstvu znázorněnou na obr. 8.8 nechť dopadá rovinná monochromatická světelná vlna (tj. svazek rovnoběžných paprsků) pod úhlem α (obr. 8.9).



{obr619}

Obr. 8.9

Předpokládejme, že při odraze na rozhraních σ_1, σ_2 nedochází k úplnému odraze, takže paprsky se na nich částečně odrážejí a částečně lámou. Paprsky 1, 2, 3, ..., vzniklé postupnými odrazy a lomy z dopadajícího paprsku, interferují jako dříve. Rozdíl skutečných optických drah paprsků 1, 2 nyní je $\delta = n_2|AB| + n_2|BC| - n_1|AD|$, kde jsme označili $|AB|$ délku úsečky AB atd. Úpravou uvedeného výrazu, při níž užijeme vztahu $n_1|AF| = n_2|AE|$ plynoucího z obr. 7.35, dále vztahu $|AB| = |BC|$ a vztahu $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ (Snellův zákon), dostaneme

$$\delta = 2n_2|EB| = 2n_2d \cos \beta = 2n_2d \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_2^2 \sin^2 \beta} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

Přihlédneme-li opět k možné změně fáze při odraze na rozhraních σ_1, σ_2 , dostaneme podmínku maxima pro odraz ve tvaru

$$\{619\} \quad 2d \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} + \varepsilon \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, \dots, (\varepsilon = 0, 1). \quad \text{podmínka maxima pro odraz} \quad (8.10)$$

Analogicky se odvodí podmínka minima

{6110}

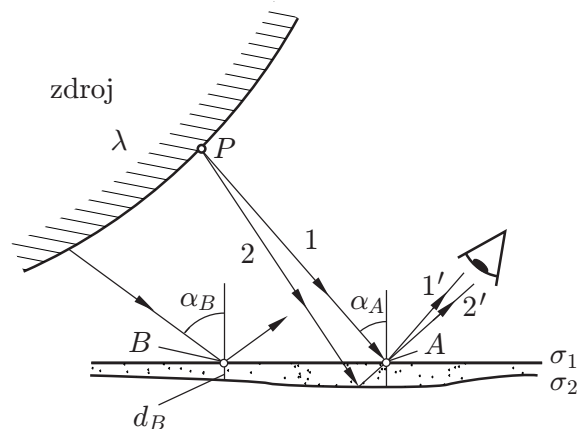
$$2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} + \varepsilon \frac{\lambda}{2} = (2k - 1) \frac{\lambda}{2}. \quad \text{podmínka minima pro odraz} \quad (8.11)$$

Při náhodně zvoleném úhlu dopadu α není (obecně) splněna žádná z obou podmínek. Intenzita odraženého světla závisí na hodnotě levé strany ve vztazích (8.10), (8.11). Mění-li se plynule úhel dopadu od 0° do 90° , intenzita odraženého světla se spojitě mění mezi extrémními hodnotami – střídavě narůstá a klesá.

Dopadá-li na vrstvu svazek rovnoběžných paprsků bílého světla, pak podobně jako při kolmém dopadu se světlo určitých vlnových délek $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ zesílí a světlo jiných vlnových délek $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots$ zeslabí. Odražené světlo je tedy zbarveno. Hodnoty vlnových délek zesíleného světla ($\lambda_1, \lambda_2, \dots$), dané vztahy (8.10) pro $k = 1, 2, \dots$, i hodnoty vlnových délek málo odraženého světla ($\lambda'_1, \lambda'_2, \dots$), dané vztahy (8.11) pro $k = 1, 2, \dots$, jsou závislé na úhlu dopadu α . Barva odraženého světla závisí tedy na α . Mění-li se úhel dopadu α , mění se barva světla odraženého od vrstvy. Tento jev vzniká např. při odrazu světla na tenkých olejových filmech (vrstvách), na mýdlových blánách, slídových vrstvách atd.

Užití: barevné interferenční filtry (získávání barevného světla z bílého), regulace světelné odrazivosti povrchů atd.

Interferenční proužky Velmi častým a v měřicí technice využívaným jevem je vznik interferenčních proužků. Vyložíme základní jev tohoto typu, a to vznik interferenčních proužků na tenké vrstvě.



Obr. 8.10

{obr6110}

Uvažujme o tenké vrstvě, která má v různých místech různou tloušťku (obr. 8.10). Vrstva nechť je osvětlena plošným zdrojem světla, o němž budeme pro jednoduchost nejprve předpokládat, že je jednobarevné (λ). Vrstvu pozorujeme okem nebo fotografujeme přístrojem zaostřeným na její povrch.

Pozorujme např. bod A vrstvy. Do oka z něho přichází paprsek $1'$, vzniklý odrazem paprsku 1 na rozhraní σ_1 . Paprsek 1 vyšel z nějakého bodu P zdroje. Z bodu A vniká do oka kromě toho i paprsek $2'$, který vznikl rovněž v bodě P (paprsek označený 2), vnikl do vrstvy a odrazil se na ploše σ_2 právě do bodu A . Paprsky $1', 2'$ vznikly v jediném bodě, rozdíl jejich optických drah je podle předpokladu (tenká vrstva) menší než koherenční délka, takže v oku interferují. Osvětlení toho místa sítnice oka, do kterého dopadají, závisí na rozdílu jejich optických drah, tj. na tloušťce d_A a na indexu lomu n_A vrstvy v místě A a na úhlu dopadu α_A (viz levá strana rovnice (8.10) a (8.11)). Podle toho, jaký je tento rozdíl optických drah, jeví se pozorovateli bod A více nebo méně jasný.

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

Stejný jev nastane ve všech osvětlených místech vrstvy, které pozorovatel pozoruje např. v bodě B . Avšak rozdíl optických drah paprsků analogických paprskům $1', 2'$ je (obecně) jiný. Bod B se tedy pozorovateli jeví (obecně) jinak jasný. Nejjasnější se mu jeví ta místa, v nichž je splněna podmínka maxima (8.10), nejméně jasná ta místa, v nichž je splněna podmínka (8.11). Stejně jasná místa vytvoří na vrstvě křivky.

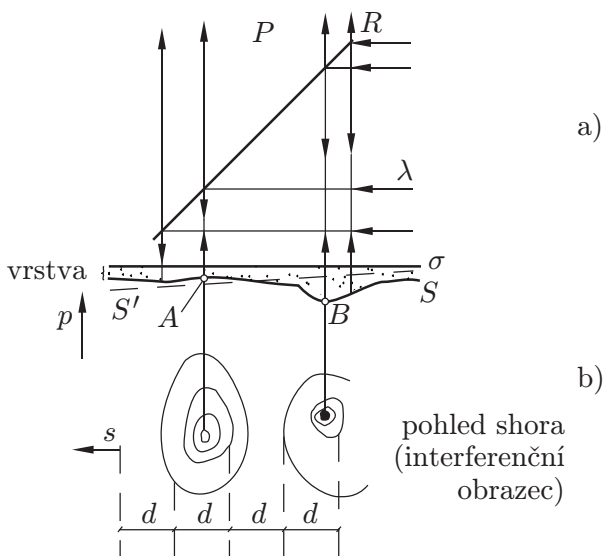
Pozorovatel tedy vidí na vrstvě tzv. interferenční proužky v barvě odpovídající vlnové délce λ , v nichž jas se spojitě mění při postupu od maxima do minima ve směru kolmém na interferenční proužek. Vzdálenost sousedních maxim v tomto směru udává šířku interferenčního proužku. Čím tenčí je vrstva, tím větší je šířka interferenčních proužků.

Při osvětlení vrstvy na obr. 8.10 plošným zdrojem bílého světla vytvoří se pro každou barvu jiná soustava interferenčních proužků, neboť poloha maxim a minim závisí na vlnové délce (rovnice (8.10), (8.11)). Pozorovateli se tedy jeví různá místa vrstvy v různých barvách — interferenční proužky jsou barevné. Při změně polohy oka se polohy maxim na vrstvě mění, tj. interferenční proužky se posouvají a mění tvar. Tento jev vzniká např. na mýdlových blánách, olejových filmech, slídových vrstvách, vzduchových vrstvách mezi filmem a přitlačným sklíčkem v projekčním nebo zvětšovacím přístroji atd.

Interference světla na tenké vrstvě je základním jevem využívaném v optických interferometrických měřeních.

Interferometrická měření Interference světla na tenké vrstvě nestejně tloušťky se užívá ke zjišťování tvaru obrobených ploch (tj. jejich reliefu), zejména ke zjišťování jeho odchytky od předepsaného tvaru, dále k měření malých deformací, malých posuvů, malých úhlů atd.

Základní uspořádání interferometrického měření je znázorněno na obr. 8.11a. Ke zkoumané vyleštěné ploše S , jež by měla být např. rovinná, se přiloží dokonale rovinná plocha σ skleněné destičky. Mezi plochami S a σ vznikne tenká vzduchová interferenční vrstva proměnné tloušťky. Ta se osvětlí (nejlépe) svazkem rovnoběžných paprsků monochromatického světla odraženým od polopropustného zrcadla R . Světlo odražené od vrstvy projde (částečně) zrcadlem R a pozoruje se (nebo fotografuje, nebo jinak detekuje a dále zpracovává) v oblasti P . Proměřením interferenčního obrazce (obr. 8.11b) se zjistí tvar plochy S .



Obr. 8.11

{obr6111}

Poznámka: Z tvaru interferenčních křivek (uzavřené křivky na obr. 8.11b) nelze poznat, zda odpovídají výstupkům (místo A) nebo prohlubním (B) na ploše S . Uvažte však, jak se inter-

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

ferenční křivky mění, jestliže plocha, S se nepatrně posouvá směrem k ploše σ (tj. ve směru p).

Jestliže je zkoumaná plocha rovinná a není rovnoběžná se σ (v obr. 8.11a je zakreslena čárkovaně a označena S'), jsou interferenční proužky přímočaré a mají stejnou šířku d (v obr. 8.11b jsou zakresleny čárkovaně). Změřením této šířky, tj. vzdálenosti maxim, lze určit s velkou přesností úhel α , sevřený plochami S' , σ ($2d \operatorname{tg} \alpha = \lambda$).

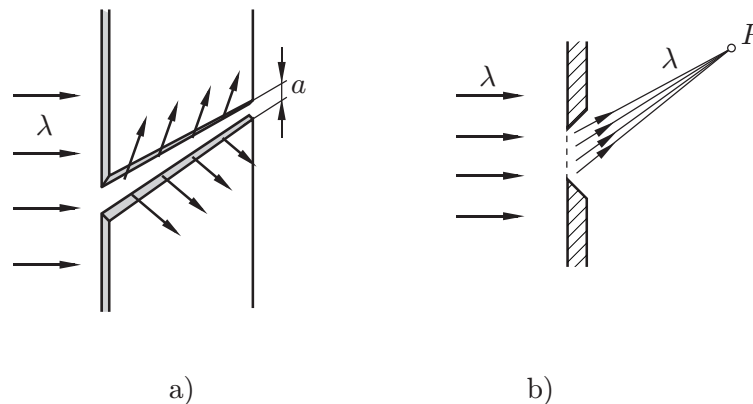
Jestliže se rovinná plocha S posouvá ve směru p , přímočaré interferenční proužky (obr. 8.11) se posouvají ve směru s . Změřením jejich posuvu lze zjistit velikost posuvu ve směru p s přesností až $10^{-2}\lambda$, tj. řádově 10^{-8} m. Užijeme-li jako zdroje koherentního světla laseru, není interferometrické měření omezeno pouze na tenké vrstvy. Je-li plocha S' spojena s pohybující se součástí strojního zařízení, lze její posuv zjistit (a případně ovládat) s velkou přesností, např. optoelektronickou registrací počtu maxim, které projdou v interferenčním obrazci ve směru s .

Přístroje určené k interferometrickým měřením se nazývají interferometry. Je jich celá řada typů. Velmi účinným moderním zařízením tohoto typu je např. laserinterferometr.

8.1.2.2 Ohyb světla na štěrbině

Ohyb vlnění byl popsán a jeho fyzikální podstata byla vysvětlena v odstavci v souvislosti s výkladem Huygensova–Fresnelova principu. V této části se budeme zabývat ohybem světla na otvoru ve stínítku.

Budeme uvažovat o rovinném stínítku (zhotoveném např. z tenkého plechu), v němž je velmi úzká a velmi dlouhá (teoreticky nekonečně dlouhá) štěrbiná s rovnoběžnými hranami (obr. 8.12a). Na stínítko nechť dopadá z jedné strany v kolmém směru rovinná světelná monochromatická vlna (tj. svazek rovnoběžných paprsků). Šířku štěrbinu označíme a , vlnová délka a frekvence dopadajícího světla nechť je λ a f .



{obr6112}

Obr. 8.12

Ohybové světelné pole na druhé straně štěrbinu lze podle Huygensova–Fresnelova principu interpretovat jako pole vytvořené sekundárními zdroji rozloženými spojitě v prostoru štěrbinu, kmitajícími s frekvencí f , a při kolmém dopadu světla i se stejnými fázemi.

Světelné pole v obecném bodě P (obr. 8.12b) vzniká interferencí nekonečně mnoha vln (paprsků) vyšlých ze všech bodů štěrbinu. Výsledná amplituda a intenzita světla v bodě P závisí na fázových rozdílech kmitů všech paprsků v bodě P a bude tedy v různých bodech ohybového pole různá.

Je-li bod P blízko štěrbinu, počítá se výsledná amplituda velmi obtížně. Z hlediska aplikací má větší význam ohybový jev, který vzniká ve větší vzdálenosti (která se v teorii blíže specifikuje),

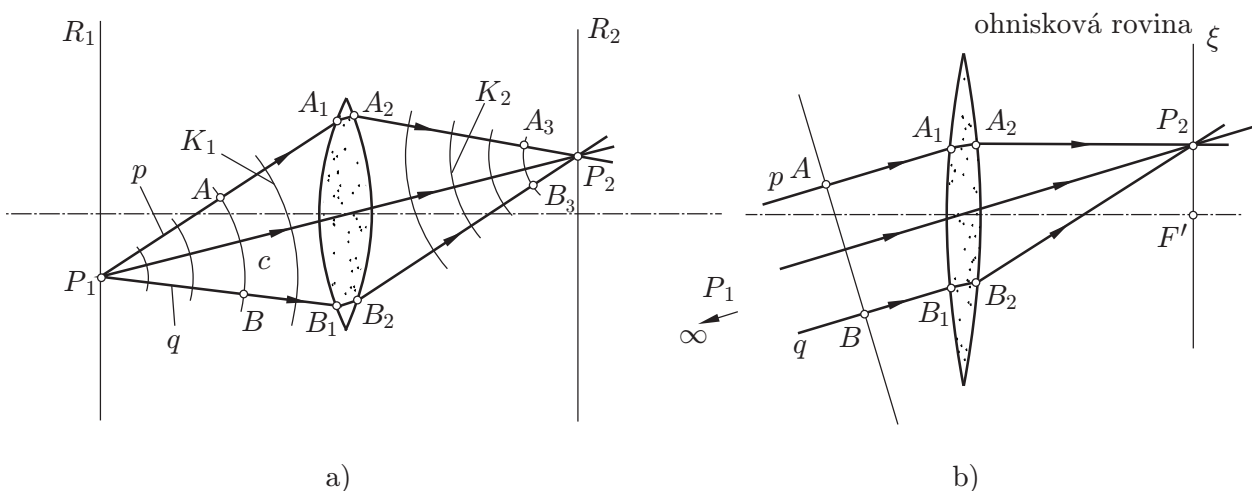
8.1. VLNOVÁ OPTIKA

tzv. Fresnelův ohybový jev. Nejdůležitější však je ohybový jev, který vznikne v takové vzdálenosti od štěrbinu, že paprsky ze všech bodů štěrbinu, jdoucí do příslušného bodu P , jsou rovnoběžné (tj. $P \rightarrow \infty$). Tento ohybový jev se nazývá „Fraunhoferův ohyb“. Má značný význam při optickém zobrazení.

V dalším se budeme zabývat pouze Fraunhoferovými ohybovými jevy. Vzhledem k tomu, že vznikají při zobrazování předmětů čočkami, uvedeme nejprve některé zákonitosti průchodu světla čočkami.

Průchod světla čočkou Dopadá-li na ideální čočku kulová světelná vlna, a to buď vlna rozbíhavá (tj. divergentní), vycházející z jednoho bodu, nebo sbíhavá (tj. konvergentní), jdoucí do jednoho bodu, transformuje ji čočka opět v (přibližně) kulovou vlnu. Přitom rovinnou vlnu považujeme za kulovou vlnu se středem v nekonečnu. V obr. 8.13a je znázorněna transformace divergentní kulové vlny K_1 se středem P_1 v konvergentní kulovou vlnu K_2 se středem P_2 spojnou čočkou. Každý bod roviny R_1 , kolmé na optickou osu, se takto ideální čočkou zobrazí do jednoho bodu roviny R_2 . Rovina R_1 se nazývá předmětová, rovina R_2 obrazová. Obraz P_2 bodu P_1 lze zkonstruovat s užitím centrálního paprsku c , který jde po průchodu čočkou původním směrem. V terminologii geometrické optiky ideální čočka mění svazek paprsků procházejících bodem P_1 ve svazek paprsků jdoucích bodem P_2 .

Kmitu v bodech A, B , ležících na jedné vlnoploše, mají stejnou fázi. Totéž platí např. i o kmitu v bodech A_3, B_3 . Proto jsou optické dráhy úseků $AA_1A_2P_2, BB_1B_2P_2$ na paprscích p, q stejné.



{obr6113}

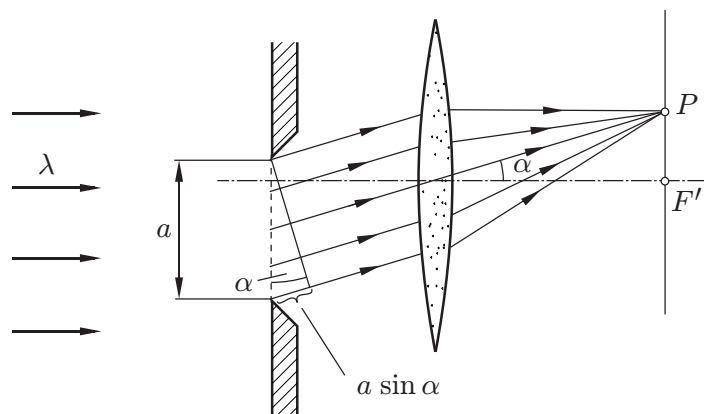
Obr. 8.13

Jestliže se bod P_1 a tedy i rovina R_1 vzdálí od čočky doleva do nekonečna, nazývá se příslušná rovina R_2 ohnisková. Bod F' je obrazové ohnisko (obr. 8.13b). Vlna dopadající na čočku z bodu P_1 je nyní rovinná, její vlnoplochy jsou rovinné, takže optické dráhy úseků $AA_1A_2P_2, BB_1B_2P_2$ (obr. 8.13b) jsou stejné. Jestliže na čočku dopadají dva obecné koherentní rovnoběžné světelné paprsky p, q , je rozdíl fází jejich kmitů v bodě P_2 stejný jako rozdíl fází jejich kmitů v bodech A, B .

Fraunhoferův ohyb na štěrbině Vložme za štěrbinu (tj. na pravou stranu stínítka při dopadu světla zleva) válcovou spojnou čočku rovnoběžnou se štěrbinou. Čočka soustředí všechny paprsky, které vyšly ze štěrbinu rovnoběžně, např. pod úhlem (obr. 8.14), do jedné přímky kolmé k nákresně, která se v obr. 8.14 jeví jako bod P . Předpokládejme, že rozdíl optických

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

drah krajních paprsků, tj. veličina $a \sin \alpha$, je menší než koherenční délka světla. Pak všechny uvažované paprsky v bodě P interferují. Fázové rozdíly jejich kmitů v tomto bodě jsou právě takové, jako kdyby tyto paprsky neprocházely čočkou, nýbrž se šířily ve směru dál a interferovaly až v nekonečnu.



{obr6114}

Obr. 8.14

Zkoumejme nejprve paprsky, které leží v nákrese a jdou ve směru optické osy čočky, tj. pod úhlem $\alpha = 0$. Tyto paprsky se protínají v ohnisku F' a kmitají v něm se stejnými fázemi. V ohnisku F' tedy vznikne maximum, kterému říkáme **hlavní** (nebo centrální) **ohybové maximum**. Amplituda kmitů a intenzita světla v bodě F' je maximální.

Nechť úhel α se nepatrně zvětší. Kmity v tom bodě ohniskové roviny, v němž se tyto paprsky protínají, jsou poněkud rozfázovány, takže amplituda kmitů v tomto bodě je menší než v bodě F' . Zvětší-li se úhel α dále tak, že nabude hodnoty, při níž dráhový rozdíl krajních paprsků p , q , tj. veličina $\Delta r = a \sin \alpha$, splňuje vztah

{6111}

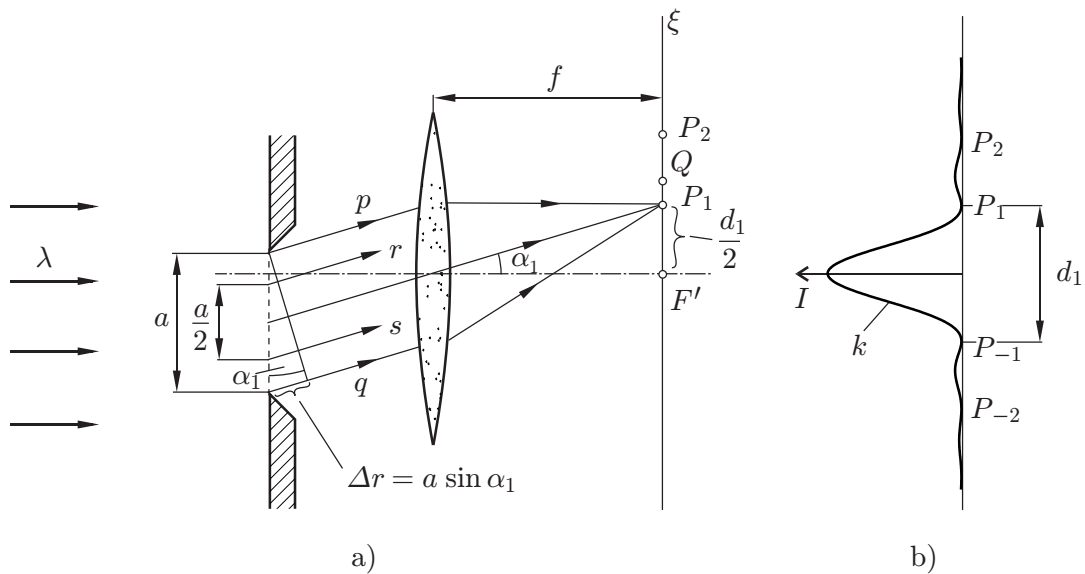
$$a \sin \alpha_1 = \lambda \quad \text{podmínka pro úhel minima prvního řádu} \quad (8.12)$$

(obr. 8.15a), jsou kmity krajních paprsků p , q v bodě P_1 fázově posunuty o 2π . Kdyby v něm tyto paprsky interferovaly samy, vzniklo by v něm interferenční maximum. Avšak v bodě P_1 interferují všechny paprsky, které vyšly pod úhlem α_1 ze všech bodů štěrbin. Libovolné dvojice paprsků, které vyšly ze dvou bodů vzdálených o $a/2$, např. dvojice r , s v obr. 8.15a, má rozdíl drah roven $\lambda/2$. Tyto dva paprsky v bodě P_1 interferují s opačnými fázemi a zruší se. Zřejmě lze takto do dvojic uspořádat všechny paprsky ze všech sekundárních zdrojů v prostoru štěrbin. Kmity těchto dvojic se v bodě P_1 zruší, takže v bodě P_1 vznikne nulové minimum.

Paprsky vycházející ze štěrbin pod úhlem poněkud větším než α_1 se v příslušném bodě Q již neruší, neboť při tomto úhlu paprsky ze štěrbin uvedeným způsobem do dvojic uspořádat nelze. V bodě Q je tedy intenzita světla nenulová. Avšak tehdy, když úhel α má hodnotu α_2 , pro niž platí $a \sin \alpha_2 = 2\lambda$, lze štěrbinu rozdělit na čtvrtiny a všechny paprsky jdoucí ze štěrbin uspořádat do dvojic, které mají rozdíl drah $\lambda/2$ a které se tedy v bodě P_2 interferencí zruší. V bodě P_2 vznikne tedy opět nulové minimum. Další nulové minimum vznikne při úhlu α_3 splňujícím vztah $a \sin \alpha_3 = 3\lambda$ atd. Mezi sousedními minimy vznikají maxima řádu 0, ± 1 , ± 2 atd., jejichž přesnou polohu nelze, s výjimkou centrálního maxima, uvedenou jednoduchou úvahou určit.

Ohybový obrazec je v řezu souměrný podle optické osy čočky (nikoliv podle osy štěrbin). Rozložení intenzity v ohybovém obrazci je znázorněno v obr. 8.15b.

Ohybový obrazec v ohniskové rovině čočky je tvořen světlými a tmavými proužky kolnými na rovinu nákresey v barvě dané vlnovou délkou λ užitého světla. Proužek obsahující maximum



{obr6115}

Obr. 8.15

multého řádu je nejsvětlejší. Jeho úhlová šířka je rovna $2\alpha_1$, jeho šířka je rovna d_1 . Pro tyto veličiny platí

$$\{6112\} \quad a \sin \alpha_1 = \lambda, \quad d_1 = 2f \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (8.13)$$

kde f je ohnisková vzdálenost čočky. Je-li $\lambda \ll a$, je $\alpha_1 \ll 1$, takže vztahy (8.13) lze psát v přibližném tvaru

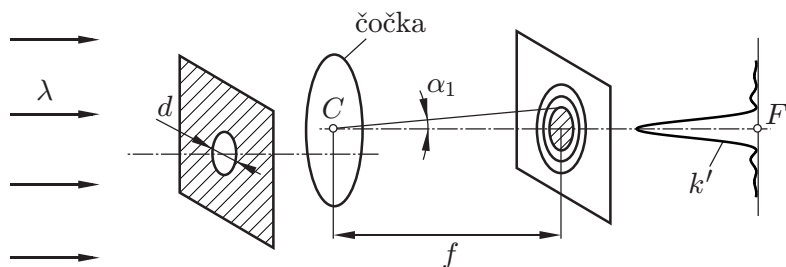
$$\alpha_1 \doteq \frac{\lambda}{a}, \quad d_1 \doteq 2f \frac{\lambda}{d}.$$

Fraunhoferův ohyb na kruhovém otvoru Je-li otvor ve stínítku kruhový o průměru d (obr. 8.16), pak Fraunhoferův ohybový obrazec v ohniskové rovině čočky má tvar soustředných kroužků. Rozložení intenzity světla v něm lze vyšetřit s užitím poněkud složitější teorie.

Výsledek zní: Rozložení světelné energie v ohybovém obrazci je (v řezu) znázorněno křivkou k' na obr. 8.16 velmi podobnou křivce k v obr. 8.15b. Střední část ohybového pole, tzv. „centrální ohybový kruh“ neboli „Airyho disk“ má úhlový rozměr $2\alpha_1$ a poloměr r , pro nějž platí

$$\alpha_1 = 1,22 \frac{\lambda}{d}, \quad r = f \operatorname{tg} \alpha_1 \doteq f \alpha_1 = f \cdot 1,22 \frac{\lambda}{d}.$$

Druhý ze vztahů jsme upravili s užitím vztahu $\operatorname{tg} \alpha_1 \doteq \alpha_1$ platného v případě, že platí $\lambda \ll d$, kdy $\alpha_1 \ll 1$. Ohybový obrazec se někdy nazývá „Airyho ohybový obrazec“.



{obr6116}

Obr. 8.16

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

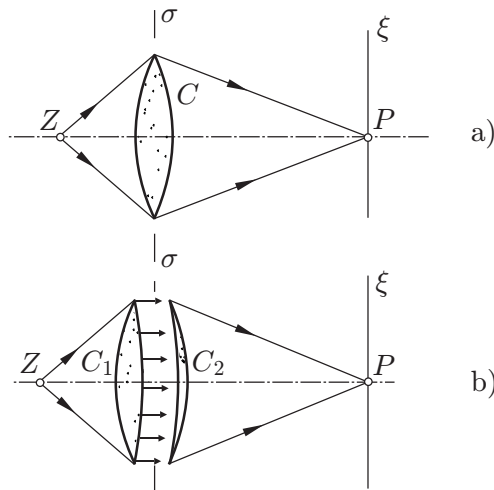
Diskuse: —————

1. Při ohybu světla platí vždy $\lambda \ll d$, takže platí $\alpha_1 \ll 1$. Ohybový obrazec je tedy velmi malý.
 2. $r \sim \lambda$, tj. ohybový obrazec se s rostoucí vlnovou délkou zvětšuje — dlouhovlnné záření vykazuje větší ohyb. Známé jevy:

$r \sim 1/d$, tj. s klesajícím průměrem ohybového otvoru se centrální ohybový kužel rozšiřuje; průchodem světla malým otvorem nelze získat úzký paprsek;

$r \sim f$, tj. s rostoucí ohniskovou délkou čočky se úhel α_1 nemění, ale r se zvětšuje.

3. Do Airyho disku dopadá asi 84% světelné energie prošlé otvorem ve stínítku.



{obr6117}

Obr. 8.17

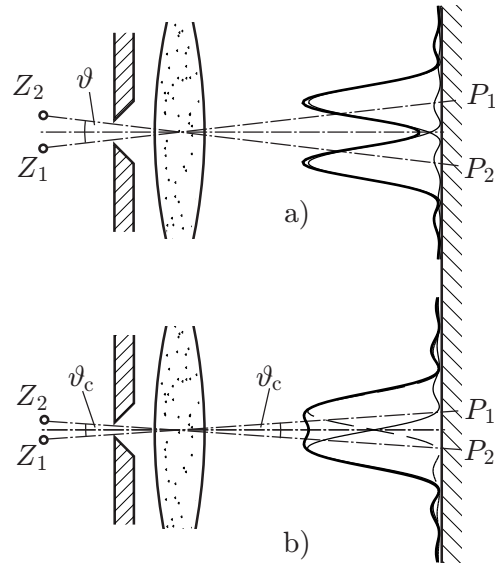
Rozlišovací schopnost optických přístrojů K ohybu na kruhovém otvoru dochází téměř vždy při zobrazování čočkami. Difrakční otvor je realizován obrubou čočky. Na obr. 8.17a je znázorněno zobrazení bodového zdroje Z spojnou čočkou C , při němž dochází k ohybu kulové vlny. Abychom převedli tento ohyb na případ ohybu rovinné vlny, rozdělíme čočku C na čočky dvě, C_1 , C_2 tak, aby mezi nimi vznikla rovinná vlna (obr. 8.17b). Ta se pak ohýbá na obrubě σ . V ohniskové rovině čočky C_2 , tj. v obrazové rovině čočky C , vznikne ohybový obrazec, takže bod Z se nikdy nezobrazí jako bod, nýbrž v optimálním případě, kdy čočka nemá optických vad, jako Airyho ohybový obrazec.

Zobrazují-li se optickým zařízením (např. čočkou) dva body Z_1 , Z_2 , vznikají v obrazové rovině ξ dva ohybové obrazce, které se částečně překrývají (obr. 8.18). Je-li úhel ϑ dosti velký, obrazce se prakticky nepřekrývají a z průběhu osvětlení roviny ξ poznáme, že jde o zobrazení dvou bodů. Je-li úhel ϑ velmi malý, ohybové obrazce se překrývají natolik, že nepoznáme, zda je zobrazen jeden nebo více bodů. Mezní případ mezi oběma předešlými je ten, při němž centrální maximum jednoho ohybového obrazce padne do prvního ohybového minima obrazce druhého. Příslušný kritický úhel, který označíme ϑ_c , je dán vztahem

$$\vartheta_c = 1,22 \frac{\lambda}{d}.$$

Platí-li pro úhel ϑ v obr. 8.18, vztah $\vartheta > \vartheta_c$, pak body Z_1 , Z_2 přístrojem rozlišíme; platí-li $\vartheta < \vartheta_c$, pak body Z_1 , Z_2 přístrojem nerozlišíme. Tento výsledek se nazývá Rayleighovo rozlišovací kritérium.

Zvýšení rozlišovací schopnosti, tj. zmenšení úhlu ϑ_c , se dosáhne zmenšením λ (přechod na ultrafialové záření a na elektronové vlny) a zvětšením průměru čoček a zrcadel.

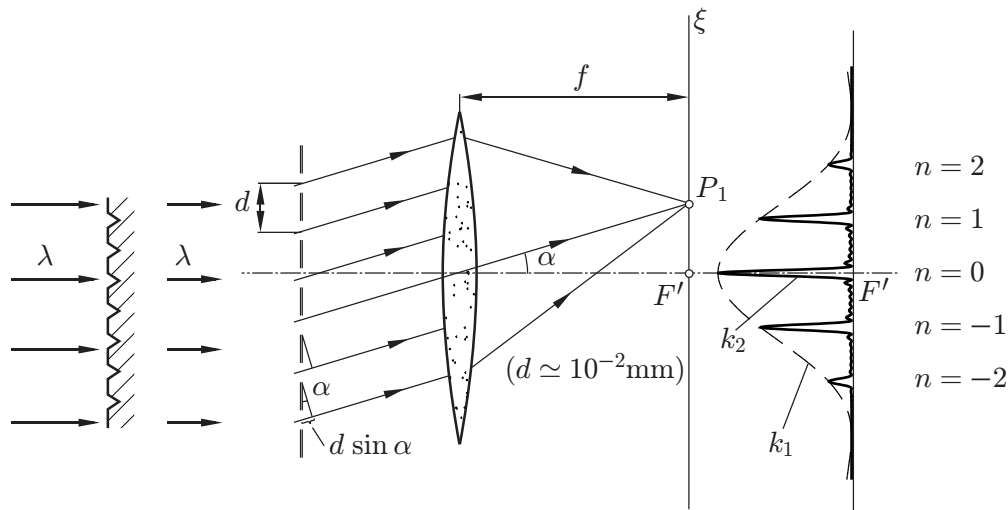


{obr6118}

Obr. 8.18

8.1.2.3 Ohyb světla na optické mřížce

Optická mřížka je zařízení sestávající z velkého počtu stejných a stejně od sebe vzdálených uspořádaných objektů, na nichž dochází k ohybu světla. Např. optická mřížka na průchod je tvořena nejčastěji z velkého počtu stejně širokých a stejně vzdálených štěrbin, realizovaných nejčastěji systémem rovnoběžných vrypů ve skle (vrypy představují neprůchodná místa) – viz obr. 8.19.



{obr6119}

Obr. 8.19

Vzdálenost sousedních štěrbin d se nazývá mřížková konstanta a její převrácená hodnota udává počet vrypů na jednotku délky. U dobrých mřížek bývá štěrbin několik set, maximálně 2000 na 1mm. Celkový počet štěrbin necht' je N . Celková velikost mřížky je obvykle řádu centimetrů. Optická mřížka na odraz sestává nejčastěji z velkého počtu vrypů vyrytých do lesklého povrchu kovu, na němž se světlo odráží. Mřížek se užívá k vytváření a analýze spekter.

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

Funkci a užití mřížky ukážeme na mřížce na průchod. Osvětíme-li ji kolmo světlem o vlnové délce λ , pak: a) na každé štěrbině dojde k ohybu, b) záření ze všech N štěrbin interferuje. Ve Fraunhoferově oblasti, tj. buď ve velké vzdálenosti od mřížky nebo v ohniskové rovině válcové čočky za mřížkou, budou interferovat rovnoběžné paprsky.

Obrazec vzniklý v ohniskové rovině čočky ohybem světla na jedné (libovolné) štěrbině má tvar znázorněný na obr. 8.15. Ježto štěrbiny mřížky jsou velmi úzké, je ohybový obrazec (znázorněný křivkou k_1 v obr. 8.19) velmi široký. Má střed v ohnisku F' . Ohybová pole stejně širokých štěrbin v počtu N v ohniskové rovině čočky jsou shodná, překrývají se a interferují.

Fázový rozdíl, který mají v bodě P interferující paprsky, závisí na úhlu α . Má-li α některou z hodnot α_k daných vztahem

{6113}

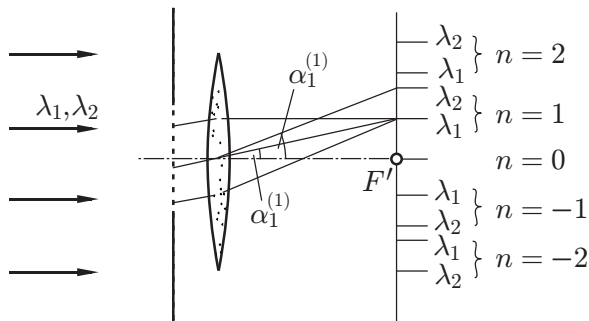
$$d \sin \alpha_k = k\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \text{mřížková rovnice} \quad (8.14)$$

jsou kmity všech paprsků v bodě P ve fázi a interferencí v něm vznikne výrazné maximum. Vztah (8.14) se nazývá mřížková rovnice.

Nesplňuje-li úhel α žádnou z rovnic (8.14), kmity všech N paprsků v bodě P se téměř úplně zruší. Přesnější teorie vede k výsledku, že intenzita světla v ohniskové rovině čočky je rozložena tak, jak je znázorněno křivkou k_2 v obr. 8.19. Ve směrech daných úhly α_k splňujícími rovnicí (8.14) vznikají výrazná maxima, jejichž šířka klesá a výška roste s rostoucím počtem štěrbin mřížky. Tato maxima se nazývají hlavní. Mezi hlavními maximy je velký počet maxim vedlejších, jež jsou při velkém počtu štěrbin zanedbatelně nízká.

Ohybový obrazec v ohniskové rovině čočky tedy prakticky sestává z ostrých (úzkých) čar — hlavních maxim — ve směrech daných úhly α_k , splňujícími vztahy (8.14). Číslo k udává řád maxima.

Skutečnost, že maxima jsou úzká, umožňuje měřit úhly α_k s velkou přesností.



Obr. 8.20

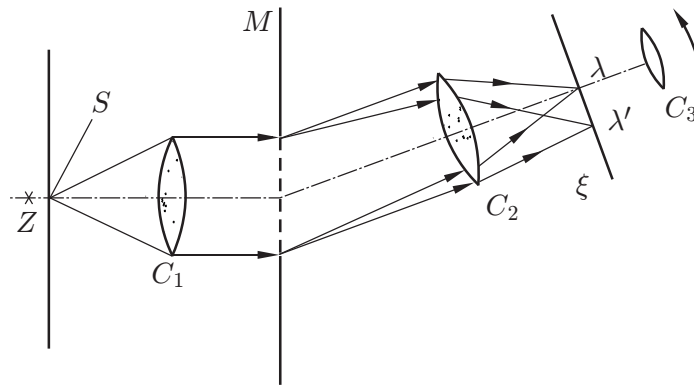
{obr6120}

Osvětlí-li se mřížka světlem obsahujícím vlnové délky $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, vytvoří se ohybový obrazec (tj. systém maxim) pro každou vlnovou délku zvlášť. Maxima řádu $k = 0$ splývají, maxima ostatních řádů jsou však oddělena (obr. 8.20). Maxima řádu k vytvoří spektrum k -tého řádu.

Hlavní užití mřížek je vytváření spekter.

Na obr. 8.21 je naznačeno schéma **mřížkového spektroskopu**. Zdroj světla Z osvětluje lineární štěrbinu S . Spojná čočka C_1 vytváří kolimovaný svazek paprsků, který dopadá kolmo na mřížku M . Spektrum — Fraunhoferův ohybový obrazec, který se vytvoří v ohniskové rovině ξ objektivu C_2 dalekohledu otočného kolem osy o , pozorujeme okulárem C_3 dalekohledu jako lupou.

8.1.2.4 Holografie

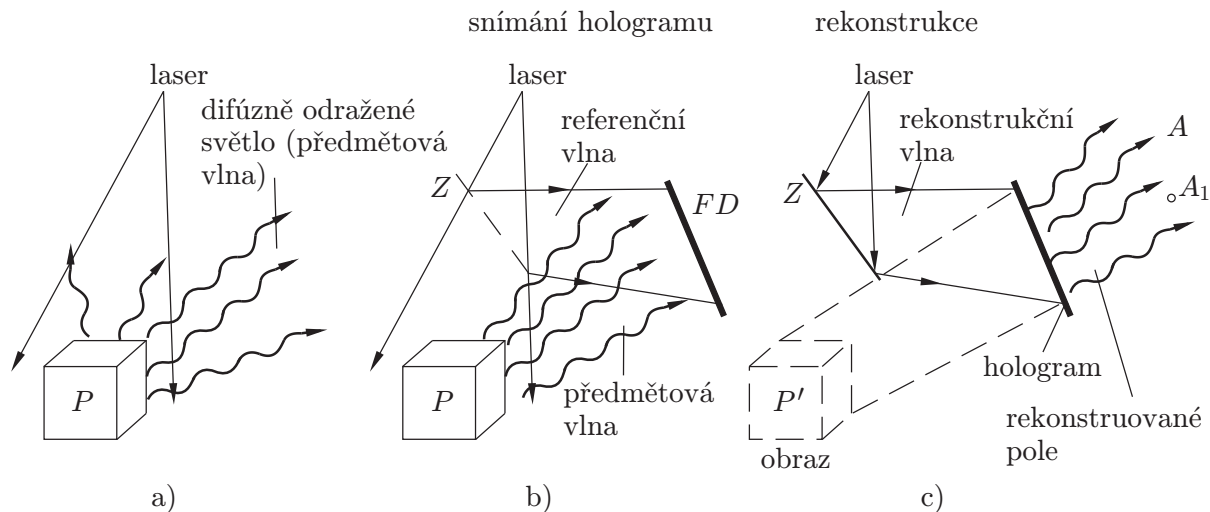


{obr6121}

Obr. 8.21

Hologram Holografie je moderní optická zobrazovací metoda, při níž je nutno, na rozdíl od ostatních zobrazovacích metod, užít koherentního světla, obvykle světla laseru. Její teoretický základ vypracoval roku 1948 D. Gabor. Rozvinula se až po objevení laserů roku 1958, a to do takové šíře a hloubky, že dnes tvoří relativně samostatné odvětví koherentní optiky, tj. optiky využívající koherenčních vlastností světla. Má široké uplatnění ve vědě i v technice. Ve strojírenství se užívá k měření malých deformací, posuvů, nehomogenit průhledných látek, rychlostí proudění atd. Vyložíme její podstatu.

Koherentním monochromatickým světlem laseru osvětlíme zkoumaný předmět P (obr. 8.22a), který má „normální“, tj. drsný, difúzně odrážející povrch. Světlo, které se odráží od předmětu, se v holografii nazývá buď „signální“ nebo „předmětová“ vlna. V obr. 8.22a je označena PV . Obsahuje totiž (tj. „nese“) optickou informaci o předmětu P : Dopadne-li do oka nebo do objektivu fotografického přístroje, transformuje se v obraz předmětu.



{obr6122}

Obr. 8.22

Kdybychom do předmětové vlny vložili fotografickou desku, byl by každý její bod ozářen vlnami vyššími ze všech viditelných bodů předmětu P , tj. deska by byla osvětlena ve všech místech téměř stejně. Po vyvolání by byla téměř rovnoměrně šedá.

Do oblasti předmětové vlny se však zavede ještě světlo, které se oddělí z laserového svazku polopropustným zrcadlem Z (obr. 8.22b). Toto světlo se v holografii nazývá „referenční vlna“. V obr. 8.22b je označena symbolem RV . Předmětová vlna a referenční vlna interferují, v prostoru

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

se vytvářejí trvalá maxima a minima. Vzdálenost sousedních maxim je řádově rovna λ , tj. je velmi malá.

Do tohoto interferenčního pole se vloží jemnozrná fotografická deska FD , exponuje se a vyvolá. Po vyvolání je pokryta nesmírně jemnou sítí interferenčních proužků tak úzkých, že jsou prostým okem neviditelné. Tato deska, obsahující záznam interferenčního pole, se nazývá **hologram**. V názvu hologramu je skryto řecké slovo „holos“ — celý, užité proto, že v interferenčním záznamu je zachycena informace jak o amplitudě, tak o fázi předmětové vlny.

Rekonstrukce Hologram má jednu velmi důležitou, zdánlivě sice jednoduchou, ale přímo zázračnou vlastnost, totiž že může rekonstruovat světelné pole předmětu. Vyložíme, oč se jedná.

Osvětíme hologram vlnou shodnou s referenční vlnou, označenou v obr. 8.22b jako RV . Tuto osvětlující vlnu nazveme „**rekonstrukční vlna**“ (obr. 8.22c). Velmi jemné tmavé (pro světlo málo propustné) a světlé (pro světlo lépe propustné) interferenční proužky hologramu se chovají jako složitá optická mřížka. Světlo se na nich ohýbá, tzn. prochází hologramem a v oblasti A vytvoří ohybové pole. Toto ohybové pole je složité, obsahuje však jednu složku, která je — a to je právě udivující — shodná s předmětovou vlnou PV při snímání hologramu (obr. 8.22b). O tomto jevu hovoříme jako o **rekonstrukci předmětové vlny**.

Pozorujeme-li hologram z místa A_1 (obr. 8.22c), máme vjem zcela shodný s vjemem, který bychom měli, kdyby v místě P' byl předmět P . Tedy P' je zdánlivý obraz předmětu P , s předmětem P shodný. Dvěma očima „vidíme předmět“ plasticky, pozorujeme-li z jiného místa „vidíme předmět“ ze strany atd.

To je zcela nový jev, z něhož se mohou vyvinout nové formy zobrazovací techniky, filmu atd. Pro strojního inženýra je však zatím nejzajímavější část holografie tzv. holografická interferometrie.

Holografická interferometrie Holografická interferometrie je optická metoda k interferenčnímu zjišťování velmi malých deformací s užitím hologramu. Popíšeme a vyložíme základní jev.

Do místa zdánlivého obrazu P' (obr. 8.22c) vložíme i předmět P tak, aby P a P' byly v koincidenci a předmět P osvětlíme laserem přesně tak, jak byl osvětlen při snímání hologramu (obr. 8.22b). Do oblasti A (obr. 8.22c) vnikají nyní dvě vlny: a) rekonstruovaná, vzniklá ohybem rekonstrukční vlny na hologramu, b) přímá vlna z osvětleného předmětu P , která prošla hologramem. Tyto dvě vlny v oblasti A jsou shodné a interferují. Výsledné pole je téměř shodné s předmětovou vlnou, změnilo se nejvýš všude ve stejném poměru amplitudy. Při pozorování okem z místa A vidíme opět zdánlivý obraz P .

Jestliže však předmět P zcela nepatrně posuneme nebo deformujeme, předmětová vlna se změní. Interferencí s rekonstruovanou vlnou vznikne pozměněné pole. Pozorujeme-li nyní v místě A_1 , vidíme obraz tvarově shodný s předešlým, avšak pokrytý světlými a tmavými interferenčními pruhy. Proměřením jejich tvaru a polohy lze zjistit posunutí nebo deformaci předmětu P .

Jiný způsob získání holografického interferogramu je: Exponujeme fotografickou desku v uspořádání na obr. 8.22b, nevyvoláme ji však. Poté předmět nepatrně deformujeme a desku exponujeme na stejném místě znovu. Teprve potom ji vyvoláme. Osvětíme-li tento hologram tak, jak je naznačeno na obr. 8.22c, objeví se obraz P' pokrytý interferenčními pruhy, z nichž lze opět zjistit deformaci předmětu.

Teorie základních holografických jevů není příliš složitá. Jejich realizace je mnohem obtížnější, neboť klade vysoké nároky na přesnost a stabilitu. Proto se holografických metod zatím užívá většinou jen v laboratorních podmínkách.

Příklady — OPTIKA ((8.1) až (8.14))

8.1. VLNOVÁ OPTIKA

{pr8.P-1} **KP 8-1** _____

Na tenkou antireflexní vrstvu z MgF_2 ($n_1 = 1,38$) tloušťky $d = 300$ nm, napařenou na povrchu čočky ($n_2 = 1,60$) dopadá ze vzduchu kolmo světlo vlnové délky $\lambda = 600$ nm. Určete: 1. Vlnovou délku světla ve vrstvě; 2. Vlnovou délku světla ve skle; 3. Dobu, za kterou světlo projde ve směru kolmém na vrstvu z bodu P_1 vzdáleného o $d_1 = 5$ mm od vrstvy do bodu P_2 ve skle, vzdáleného o $d_2 = 3$ mm od jeho povrchu; 4. Vlnové délky světla, pro něž má vrstva minimální odrazivost a) při kolmém dopadu, b) při dopadu pod úhlem $\alpha = 60^\circ$.

{pr8.P-2} **KP 8-2** _____

Objektiv čočky ($n = 1,52$) je opatřen antireflexní vrstvou z MgF_2 ($n = 1,38$), která má při kolmém dopadu maximální odrazivost pro světlo žlutozelené barvy. Určete tloušťku vrstvy ($\lambda = 555$ nm).

{pr8.P-3} **KP 8-3** _____

Na planparalelní mýdlovou blánu ($n = 1,33$) tloušťky $d = 320$ nm dopadá kolmo elektromagnetické záření. Určete: 1. Několik vlnových délek splňujících podmínku minima pro odraz; 2. Několik vlnových délek splňujících podmínku maxima pro odraz; 3. Které z uvedených vlnových délek leží v oboru viditelného záření; 4. Jaké bude zbarvení odraženého světla při osvětlení vrstvy bílým světlem; 5. Fázový rozdíl kmitů dvou interferujících paprsků v odraženém světle, z nichž první se odrazil na bližším a druhý na vzdálenějším povrchu vrstvy.

{pr8.P-4} **KP 8-4** _____

Řešte úkoly 1, 2, 3 příkladu **KP 8-3** za předpokladu, že světlo dopadá na vrstvu pod úhlem $\alpha = 30^\circ$.

{pr8.P-5} **KP 8-5** _____

Klínová vzduchová vrstva vytvořená mezi skleněnými destičkami délky $l = 60$ mm vložením tenkého papírku na okraji je osvětlena kolmo světlem laseru vlnové délky $\lambda = 632,8$ nm. Vytvoří se na ní 20 interferenčních proužků. Úkoly: 1. Dokažte, že pro šířku d interferenčních proužků platí vztah $2dn \operatorname{tg} \alpha = \lambda$, kde n je index lomu vzduchu a α úhel sevřený destičkami. Určete: 2. Úhel α sevřený destičkami; 3. Tloušťku papírku; 4. Počet interferenčních proužků, který se vytvoří, vyplní-li se klínová vrstva vodou ($n = 1,33$).

{pr8.P-6} **KP 8-6** _____

Žlutozelené světlo vlnové délky $\lambda = 555$ nm dopadá kolmo na stínítko se štěrbinou šířky $a = 0,4$ mm. Vypočtěte: 1. Úhlovou šířku centrální ohybové oblasti; 2. Úhel odpovídající ohybovému minimu řádu $k = 5$.

{pr8.P-7} **KP 8-7** _____

Na štěrbinu šířky 3 cm dopadá ultrazvuková vlna vlnové délky 2 cm. Zjistěte polohu prvních dvou ohybových minim. Proveďte diskusi.

{pr8.P-8} **KP 8-8** _____

Vyšetřete, za jakých podmínek vznikne při ohybu na štěrbině jen centrální ohybové maximum a část centrální ohybové oblasti a nevznikne ohybové minimum.

8.2. ZOBRAZENÍ ČOČKOU

{pr8.P-9} **KP 8-9** _____

Spojnou čočkou o ohniskové vzdálenosti $f = 1500$ mm a o průměru 40 mm se zobrazuje světlem vlnové délky $\lambda = 500$ nm bod ležící na optické ose ve vzdálenosti 2 500 mm od čočky. Vypočtěte úhlové rozměry a průměr Airyho disku.

{pr8.P-10} **KP 8-10** _____

V trubici plynového He–Ne laseru vzniká koherentní rovinná monochromatická vlna o vlnové délce $\lambda = 632,8$ nm a vystupuje kolmo čelním okénkem, jež má tvar kruhu o průměru 8 mm. Vypočtěte: 1. Úhel kužele vymezujícího centrální ohybovou oblast ve vystupujícím světelném svazku; 2. Průměr stopy tohoto kužele a) ve vzdálenosti 10 km, b) na Měsíci.

{pr8.P-11} **KP 8-11** _____

Největší zrcadlový dalekohled má kruhové zrcadlo o průměru 6 m, největší refrakční dalekohled má čočku o průměru 1 m. Vyšetřete, jak velké předměty jimi lze rozlišit na Měsíci.

{pr8.P-12} **KP 8-12** _____

Při osvětlení mřížky zelenou složkou rtuťového světla ($\lambda = 546,07$ nm) vzniklo maximum 2. řádu ve směru daném úhlem $\alpha_2 = 20^\circ 34'$. Určete: 1. Mřížkovou konstantu; 2. Směr maxima 1. řádu; 3. Směr maxima 1. řádu pro sodíkové světlo vlnové délky $\lambda = 588,99$ nm.

{pr8.P-13} **KP 8-13** _____

Mřížka o mřížkové konstantě $d = 0,005$ mm je osvětlena kolmo bílým světlem [$\lambda \in (400; 760)$ nm]. Úkoly 1. Určete úhlový rozsah spektra 1. řádu; 2. Zjistěte, zda se budou překrývat spektra a) 1. a 2. řádu, b) 2. a 3. řádu.

{pr8.P-14} **KP 8-14** _____

Vyšetřete, jakou hodnotu musí mít mřížková konstanta mřížky, mají-li se při osvětlení světlem vlnové délky $\lambda = 555$ nm (žlutozelené světlo) vytvořit pouze maxima řádu $k = 0, \pm 1, \pm 2$.

8.2 Zobrazení čočkou

8.2.1 Zobrazovací rovnice

Zobrazení čočkou se řídí zobrazovací rovnicí

{zobrrrov}
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{i}, \quad (8.15)$$

kde f je ohnisková vzdálenost, p předmětová vzdálenost a i obrazová vzdálenost. Pohlédněme na obrázek 8.23, na kterém jsou znázorněny předmětové a obrazové vzdálenosti spolu se znaménkovou konvencí.

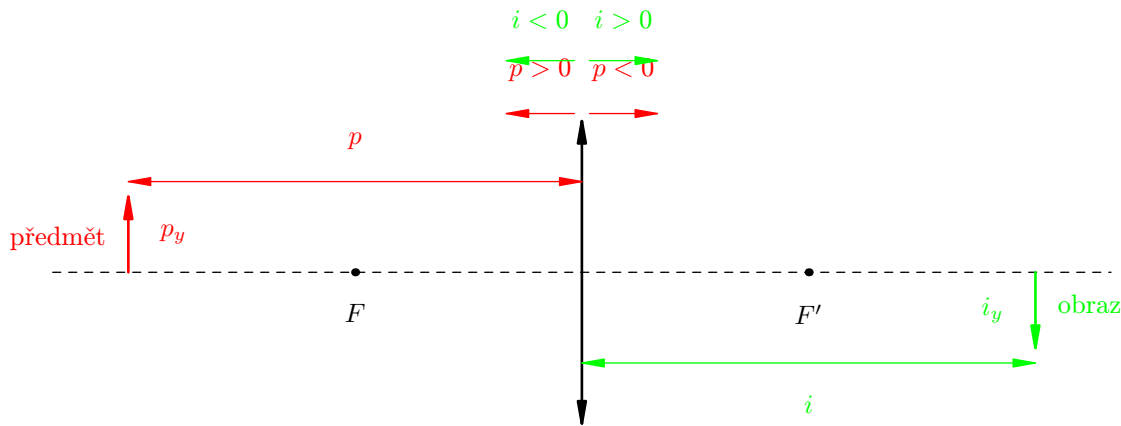
8.2.2 Zvětšení

Obraz vytvořený čočkou nemá vždy stejnou velikost jako předmět, je zvětšený nebo zmenšený. Zavádíme pojem zvětšení m jako poměr velikosti obrazu i_y a předmětu p_y

{zvetseni}
$$m = \frac{i_y}{p_y}. \quad (8.16)$$



8.2. ZOBRAZENÍ ČOČKOU



{zobrobr} Obr. 8.23: Zobrazení čočkou.

Z obrázku 8.23 můžeme z podobnosti trojúhelníků odvodit

$$\frac{p_y}{p} = \frac{-i_y}{i}, \quad (8.17)$$

kde je použito $-i_y$, protože výška obrazu je záporná. Z této rovnice již odvodíme vztah pro zvětšení (8.16)

{zvetseni2}

$$m = \frac{i_y}{p_y} = -\frac{i}{p}. \quad (8.18)$$

8.2.3 Chod paprsků čočkou — paprskový obrazec

Určit polohu a velikost obrazu můžeme u tenké čočky pomocí paprskového obrazce 8.24, jako průsečík „speciálních“ paprsků vyslaných z předmětového bodu (konec červené šipky). Speciální paprsky jsou:

1. paprsek jdoucí z předmětu rovnoběžně s optickou osou se po průchodu čočkou láme tak, že prochází obrazovým ohniskem F' ,
2. paprsek jdoucí z předmětu do předmětového ohniska F se po průchodu čočkou láme tak, že jde rovnoběžně s optickou osou,
3. paprsek mířící z předmětu do středu čočky se neláme.

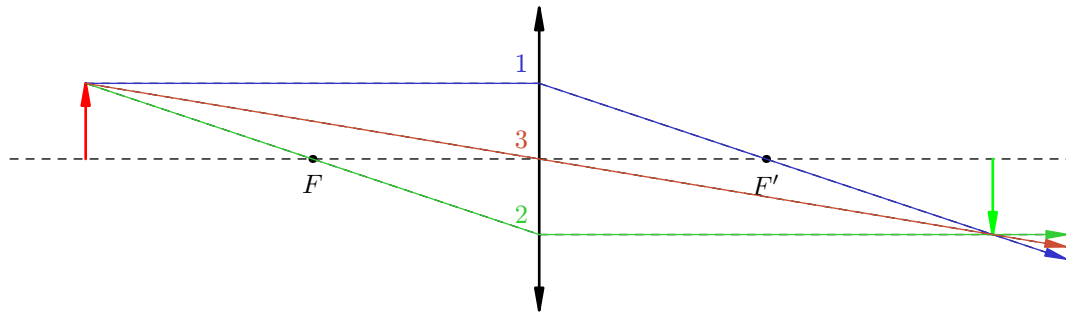
Připomeňme ještě speciální případy zobrazení, kdy předmět leží v nekonečnu. Obraz se potom nachází v rovině obrazového ohniska F' .

V opačném případě, kdy předmět leží v předmětovém ohnisku, se obraz nachází v nekonečnu.

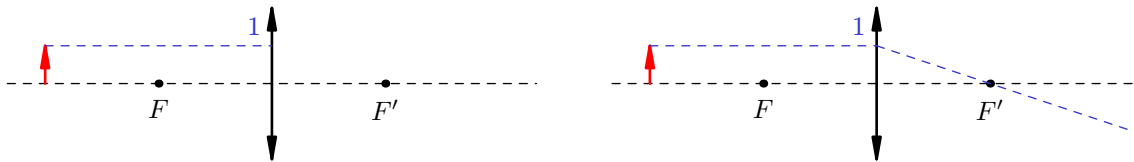
8.2.3.1 Zobrazení spojnou čočkou

Konstrukce paprskového obrazce – skutečný obraz Ukažme si konstrukci paprskového obrazce. Nejprve vytvoříme první paprsek jdoucí z rovnoběžně s osou (obr. 1). Najdeme průsečík s čočkou (bod 1) a z něj vedeme paprsek do obrazového ohniska F' (obr. 2). Zatím ještě o poloze a velikosti obrazu nemůžeme nic říci, musíme sestrojít ještě jeden paprsek.

8.2. ZOBRAZENÍ ČOČKOU

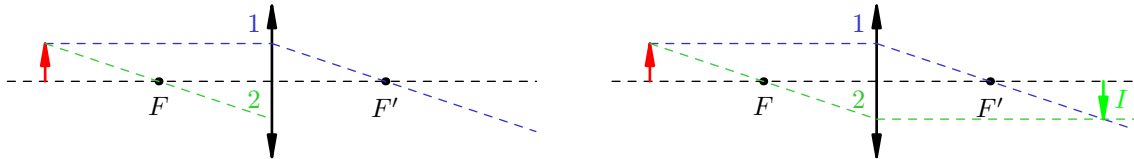


{kovyobrazec} Obr. 8.24: Papřkový obrazec.



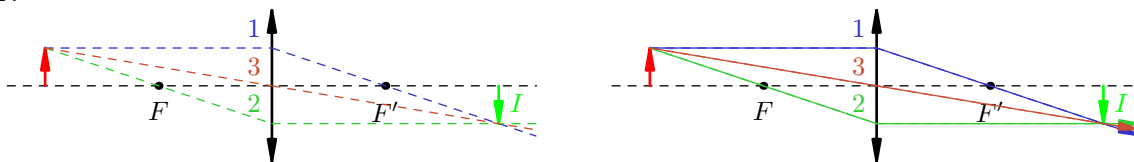
{obr1} Obr. 8.25

Sestrojíme paprsek číslo 2, jdoucí z předmětu do předmětového ohniska F (obr. 8.26 vlevo). Z průsečíku s čočkou (bod 2) pokračuje paprsek vodorovně s optickou osou (obr. 8.26 vpravo). V průsečíku prvního a druhého paprsku I je obraz předmětového bodu.



{obr2} Obr. 8.26

Sestrojíme ještě třetí paprsek, jdoucí středem čočky, který se neláme (obr. 8.27 vlevo). Na závěr ještě vyznačíme chod papřsků (obr. 8.27 vpravo). Papřsky světla vycházející z předmětu (plné čáry) se po průchodu čočky lámou, takže našemu oku se jeví tak, jako by vycházely z obrazu I .



{obr3} Obr. 8.27

Pro úplnost vyřešíme ještě zobrazení pomocí zobrazovací rovnice. Předvedené zobrazení bylo pro hodnoty $f = 3$ cm, $p = 6$ cm a $p_y = 1$ cm. Úpravou rovnice získáme vztah pro obrazovou vzdálenost i

$$i = \frac{fp}{p-f} = \frac{3 \cdot 6}{6-3} = 6 \text{ cm}.$$

Hodnoty i mají kladné znaménko za čočkou, obraz se tedy musí nacházet za čočkou. Pohlédněme ještě na zvětšení m (viz rovnice (8.18))

$$m = -\frac{i}{p} = -\frac{6}{6} = -1.$$

8.2. ZOBRAZENÍ ČOČKOU

Velikost obrazu i_y potom bude

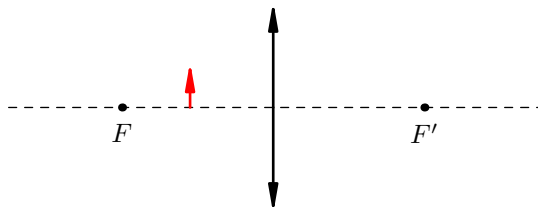
$$i_y = mp_y = -1 \cdot 1 = -1 \text{ cm}.$$

Obraz tedy bude stejně velký jako předmět, ale převrácený. Tomu odpovídá i paprskový obrazec.

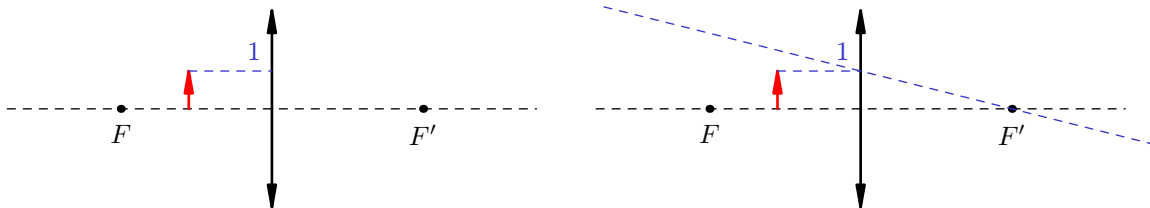
Na závěr ještě připomeňme, že obraz je skutečný, protože leží na opačné straně čočky než předmět. Kdybychom do místa obrazu vložili například papír, uvidíme obraz promítnutý na tento papír.

Konstrukce paprskového obrazce – virtuální obraz Někdy není situace s konstrukcí obrazu tak jednoduchá, jako v předchozí části. Podívejme se na případ, kdy předmětová vzdálenost p je menší než ohnisková vzdálenost f . Tato situace nastává například při použití spojné čočky jako lupy.

Vycházíme ze situace naznačené na obrázku. Předmět je tentokrát umístěn mezi předmětovým ohniskem F a čočkou.



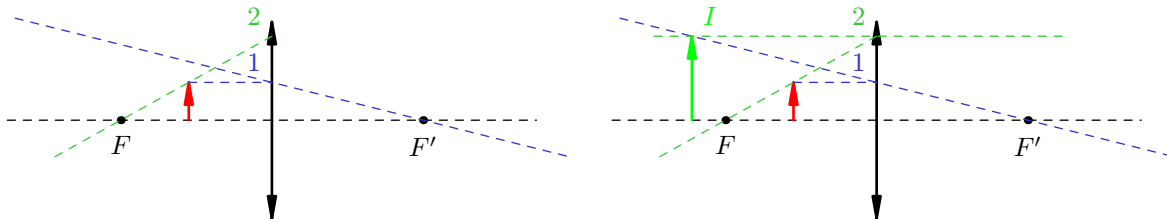
Nejprve vytvoříme první paprsek jdoucí z rovnoběžně s osou (obr. 8.28 vlevo). Najdeme průsečík s čočkou (bod 1), a z něj vedeme paprsek do obrazového ohniska F' (obr. 8.28 vpravo). Protože nevíme, jestli obraz bude skutečný (na opačné straně čočky než předmět) nebo virtuální (na stejné straně jako předmět), vedeme paprsek jak do předmětového tak do obrazového prostoru. Zatím ještě o poloze a velikosti obrazu nemůžeme nic říci, musíme sestrojít ještě jeden paprsek.



{obr4}

Obr. 8.28

Sestrojíme paprsek číslo 2, jdoucí z předmětu do předmětového ohniska F (obr. 8.29 vlevo). Z průsečíku s čočkou (bod 2) pokračuje paprsek vodorovně s optickou osou (obr. 8.29 vpravo). V průsečíku prvního a druhého paprsku I je obraz předmětového bodu.



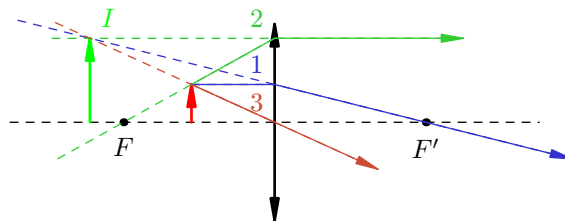
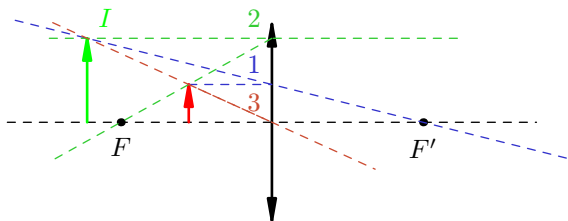
{obr5}

Obr. 8.29

Sestrojíme ještě třetí paprsek, jdoucí středem čočky, který se neláme (obr. 8.30 vlevo). Na závěr ještě vyznačíme chod paprsků (obr. 8.30 vpravo). Paprsky světla vycházející z předmětu

8.2. ZOBRAZENÍ ČOČKOU

(plné čáry) se po průchodu čočky lámou, takže našemu oku se jeví tak, jako by vycházely z obrazu I .



{obr6}

Obr. 8.30

Pro úplnost vyřešíme ještě zobrazení pomocí zobrazovací rovnice. Předvedené zobrazení bylo pro hodnoty $f = 4$ cm, $p = 2,2$ cm a $p_y = 1$ cm. Úpravou rovnice získáme vztah pro obrazovou vzdálenost i

$$i = \frac{fp}{p - f} = \frac{4 \cdot 2,2}{2,2 - 4} = -4,9 \text{ cm}.$$

Hodnoty i mají kladné znaménko za čočkou, obraz se tedy musí nacházet před čočkou. Pohlédněme ještě na zvětšení m (viz rovnice (8.18))

$$m = -\frac{i}{p} = -\frac{-4,9}{2,2} = 2,22.$$

Velikost obrazu i_y potom bude

$$i_y = mp_y = 2,22 \cdot 1 = 2,22 \text{ cm}.$$

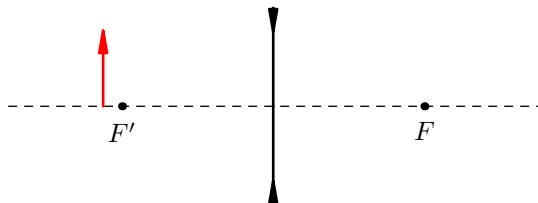
Obraz tedy bude přibližně dvakrát tak velký jako předmět a nepřevrácený. Tomu odpovídá i paprskový obrazec.

Na závěr ještě připomeňme, že obraz je virtuální, protože leží na stejné straně čočky jako předmět. Kdybychom do místa obrazu vložili papír, obraz na tomto papíru nevidíme, protože ve skutečnosti neexistuje.

8.2.3.2 Zobrazení rozptylnou čočkou

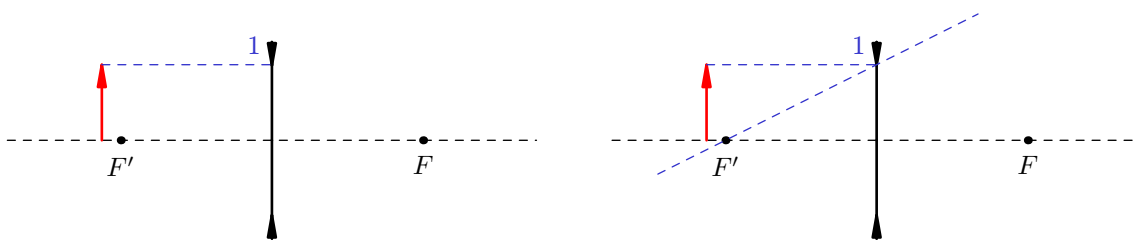
Rozptylná čočka má zápornou ohniskovou vzdálenost, znamená to, že předmětové ohnisko F leží za čočkou a obrazové ohnisko F' leží před čočkou. Ohniska si vyměnila místa.

Konstrukce paprskového obrazce — předmět před ohniskem Vycházíme ze situace naznačené na obrázku. Předmět je tentokrát umístěn mezi předmětovým ohniskem F a čočkou.



Nejprve vytvoříme první paprsek jdoucí z rovnoběžně s osou (obr. 8.31 vlevo). Najdeme průsečík s čočkou (bod 1), a z něj vedeme paprsek do obrazového ohniska F' (obr. 8.31 vpravo). Protože nevíme, jestli obraz bude skutečný (na opačné straně čočky než předmět) nebo virtuální (na stejné straně jako předmět), vedeme paprsek jak do předmětového tak do obrazového

8.2. ZOBRAZENÍ ČOČKOU

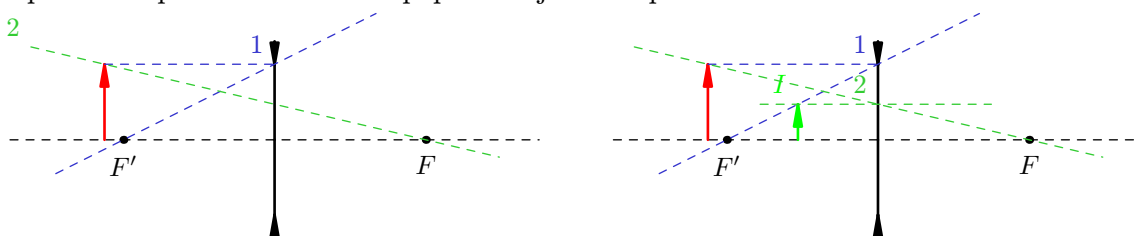


{obrr1}

Obr. 8.31

prostoru. Zatím ještě o poloze a velikosti obrazu nemůžeme nic říci, musíme sestrojít ještě jeden paprsek.

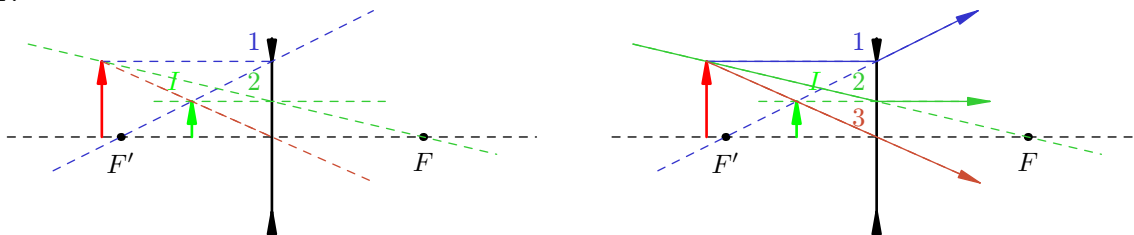
Sestrojíme paprsek číslo 2, jdoucí z předmětu do předmětového ohniska F (obr. 8.32 vlevo). Z průsečíku s čočkou (bod 2) pokračuje paprsek vodorovně s optickou osou (obr. 8.31 vpravo). V průsečíku prvního a druhého paprsku I je obraz předmětového bodu.



{obrr2}

Obr. 8.32

Sestrojíme ještě třetí paprsek, jdoucí středem čočky, který se neláme (obr. 8.33 vlevo). Na závěr ještě vyznačíme chod paprsků (obr. 8.33 vpravo). Paprsky světla vycházející z předmětu (plné čáry) se po průchodu čočky lámou, takže našemu oku se jeví tak, jako by vycházely z obrazu I .



{obrr3}

Obr. 8.33

Pro úplnost vyřešíme ještě zobrazení pomocí zobrazovací rovnice. Předvedené zobrazení bylo pro hodnoty $f = -4$ cm, $p = 4,5$ cm a $p_y = 2$ cm. Úpravou rovnice získáme vztah pro obrazovou vzdálenost i

$$i = \frac{fp}{p - f} = \frac{-4 \cdot 4,5}{4,5 - (-4)} = -2,11 \text{ cm}.$$

Hodnoty i mají kladné znaménko za čočkou, obraz se tedy musí nacházet před čočkou. Pohlédněme ještě na zvětšení m (viz rovnice (8.18))

$$m = -\frac{i}{p} = -\frac{-2,11}{4,5} = 0,47.$$

Velikost obrazu i_y potom bude

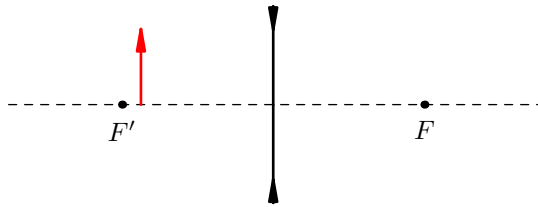
$$i_y = mp_y = 0,47 \cdot 2 = 0,94 \text{ cm}.$$

8.2. ZOBRAZENÍ ČOČKOU

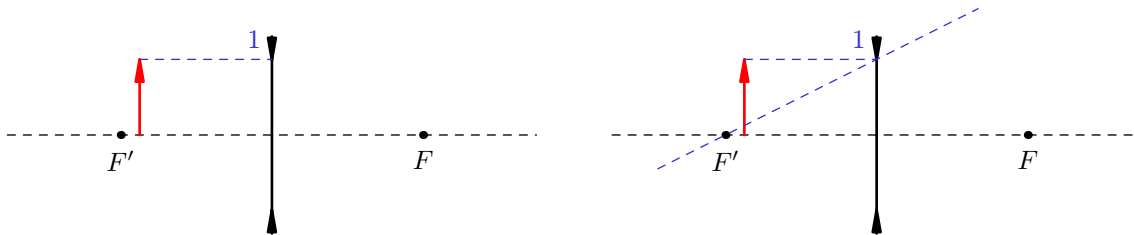
Obraz tedy bude přibližně poloviční než předmět a nepřevrácený. Tomu odpovídá i paprskový obrazec.

Na závěr ještě připomeňme, že obraz je virtuální, protože leží na opačné straně čočky než předmět. Kdybychom do místa obrazu vložili papír, obraz na tomto papíru nevidíme, protože ve skutečnosti neexistuje.

Konstrukce paprskového obrazce — předmět mezi ohniskem a čočkou Vycházíme ze situace naznačené na obrázku. Předmět je tentokrát umístěn mezi předmětovým ohniskem F a čočkou.



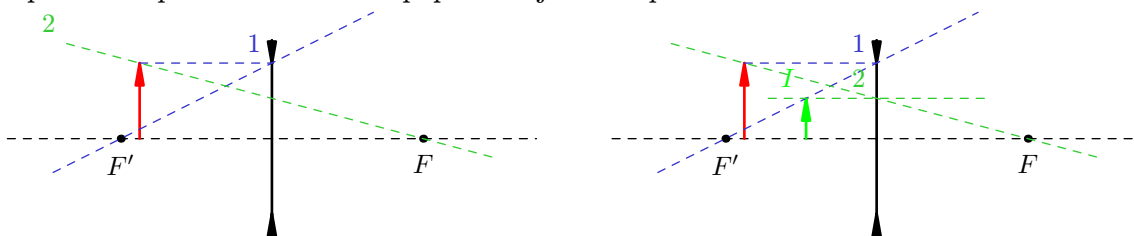
Nejprve vytvoříme první paprsek jdoucí z rovnoběžně s osou (obr. 8.34 vlevo). Najdeme průsečík s čočkou (bod 1), a z něj vedeme paprsek do obrazového ohniska F' (obr. 8.34 vpravo). Protože nevíme, jestli obraz bude skutečný (na opačné straně čočky než předmět) nebo virtuální (na stejné straně jako předmět), vedeme paprsek jak do předmětového tak do obrazového prostoru. Zatím ještě o poloze a velikosti obrazu nemůžeme nic říci, musíme sestrojít ještě jeden paprsek.



{obrr4}

Obr. 8.34

Sestrojíme paprsek číslo 2, jdoucí z předmětu do předmětového ohniska F (obr. 8.35 vlevo). Z průsečíku s čočkou (bod 2) pokračuje paprsek vodorovně s optickou osou (obr. 8.35 vpravo). V průsečíku prvního a druhého paprsku I je obraz předmětového bodu.



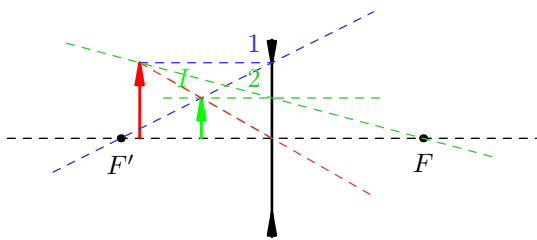
{obrr5}

Obr. 8.35

Sestrojíme ještě třetí paprsek, jdoucí středem čočky, který se neláme (obr. 8.36 vlevo). Na závěr ještě vyznačíme chod paprsků (obr. 8.36 vpravo). Paprsky světla vycházející z předmětu (plné čáry) se po průchodu čočky lámou, takže našemu oku se jeví tak, jako by vycházely z obrazu I .

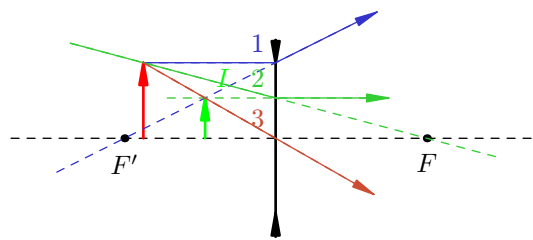
Pro úplnost vyřešíme ještě zobrazení pomocí zobrazovací rovnice. Předvedené zobrazení bylo pro hodnoty $f = -4$ cm, $p = 3,5$ cm a $p_y = 2$ cm. Úpravou rovnice získáme vztah pro obrazovou

8.2. ZOBRAZENÍ ČOČKOU



{obrr6}

Obr. 8.36



vzdálenost i

$$i = \frac{fp}{p - f} = \frac{-4 \cdot 3,5}{3,5 - (-4)} = -1,8\bar{6} \text{ cm}.$$

Hodnoty i mají kladné znaménko za čočkou, obraz se tedy musí nacházet před čočkou. Pohlédněme ještě na zvětšení m (viz rovnice (8.18))

$$m = -\frac{i}{p} = -\frac{-1,8\bar{6}}{3,5} = 0,53.$$

Velikost obrazu i_y potom bude

$$i_y = mp_y = 0,53 \cdot 2 = 1,06 \text{ cm}.$$

Obraz tedy bude přibližně poloviční než předmět a nepřevrácený. Tomu odpovídá i paprskový obrazec.

Na závěr ještě připomeňme, že obraz je virtuální, protože leží na opačné straně čočky než předmět. Kdybychom do místa obrazu vložili papír, obraz na tomto papíru nevidíme, protože ve skutečnosti neexistuje.

9. Výsledky

{ysl-pr1.1-7}

KP 1.3-5

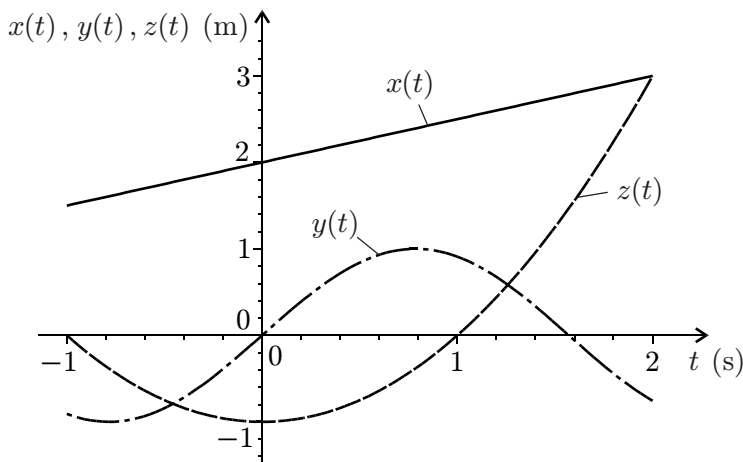
- $\sin 30^\circ = 1/2, \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2, \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2;$
 $\vec{a} = (5 \cos 30^\circ; 0; 0) = (5\sqrt{3}/2; 0; 0) \Rightarrow a = 5\sqrt{3}/2;$
 $\vec{b} = (0; 5 \sin 30^\circ; 0; 0) = (0; 2,5; 0; 0) \Rightarrow b = 2,5;$
 $\vec{c} = (-5 \cos 30^\circ; -5 \sin 30^\circ; 0; 0) = (-5\sqrt{3}/2; -2,5; 0; 0) \Rightarrow c = 5;$
 1. a) $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} = 5(\cos 30^\circ; \sin 30^\circ; 0) = 5(\sqrt{3}/2; 1/2; 0);$ b) $\vec{a} - \vec{b} = -5(\cos 30^\circ; -\sin 30^\circ; 0) = -5(\sqrt{3}/2; -1/2; 0);$ c) $\vec{a} + \vec{c} = (0; -5 \sin 30^\circ; 0) = (0; -2,5; 0);$ d) $\vec{a} - \vec{c} = (10 \cos 30^\circ; 5 \sin 30^\circ; 0)$
 2. a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$ b) $\vec{a} \cdot \vec{c} = -75/4;$ c) $\vec{b} \cdot \vec{c} = -25/4;$ d) 0
 3. a) $\vec{a} \times \vec{b} = (0; 0; 25 \cos 30^\circ \sin 30^\circ) = (0; 0; 25\sqrt{3}/4);$
 b) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = -(0; 0; 25\sqrt{3}/4);$
 c) $\vec{b} \times \vec{c} = (0; 0; 25 \sin 30^\circ \sin(90^\circ + 30^\circ)) = (0; 0; 25\sqrt{3}/4);$
 d) $\vec{a} \times \vec{c} = (0; 0; -25 \cos 30^\circ \sin(90^\circ + 60^\circ)) = (0; 0; -25\sqrt{3}/4);$
 4. a) 0; b) 0; c) $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = (0; 25 \sin 30^\circ \sin 60^\circ 5 \cos 30^\circ; 0) = (0; 375/2; 0);$
 5. a) $a \cos \alpha = 5\sqrt{3}/2\sqrt{3}/2 = 15/4;$ b) $\vec{a} \cos \alpha = \cos 30^\circ(5 \cos 30^\circ; 0; 0);$ c) $bc = 2,55 = 12,5;$
 d) $\vec{b}c = 5(0; 5 \sin 30^\circ; 0; 0);$ b) $b + c = 7,5.$

{s1-pr1.2-40}

Kinematika

KP 2.2-4

1.



{obr1.1-24V}

Obr. 9.1: K výsledku KP 2.2-4.

2. $\vec{r}(0) = 2\vec{i} - \vec{k};$
 3. a) $v_x = 0,5 \text{ m/s}, v_y = 2 \cos 2t \text{ m/s}, v_z = 2t \text{ m/s},$ b) $\vec{v}_x = v_x \vec{i}$ atd., c) $\vec{v} = (0,5\vec{i} + 2 \cos 2t \vec{j} + 2t\vec{k}) \text{ m/s}, v = \sqrt{0,5^2 + (2 \cos 2t)^2 + (2t)^2} \text{ m/s}, \alpha = \arccos(v_x/v) = \dots;$
 4. $v_x(0) = 0,5 \text{ m/s}, v_y = 2 \text{ m/s}, v_z = 0 \text{ m/s}.$

{s1-pr1.2-41}

KP 2.2-5

1. a) $a_x = 0; \text{ m/s}^2, a_y = -4 \sin 2t \text{ m/s}^2, a_z = 2 \text{ m/s}^2,$ b) $\vec{a}_x = a_x \vec{i},$ atd., c) $\vec{a} = (-4 \sin 2t \vec{j} + 2\vec{k}) \text{ m/s}^2, a = [(-4 \sin 2t)^2 + 4]^{1/2} \text{ m/s}^2, \beta = \arccos(a_x/a) = \dots;$ 2. $a_x(0) = 0 \text{ m/s}^2, a_y(0) = 0 \text{ m/s}^2,$ atd.

{s1-pr1.2-42}

KP 2.2-6

1. a) $a_t = R\varepsilon = 0,3 \text{ m/s}^2$, b) $a_n = (\varepsilon t)^2 / R = 0,42t^2 \text{ m/s}^2$, c) $\vec{a} = (0,3\vec{r} + 0,42t^2\vec{n}) \text{ m/s}^2$, d)
 $a = [0,09 + (0,42t^2)^2]^{1/2} \text{ m/s}^2$;

sl-pr1.2-43}

2. a) $\varphi_2 = 1 \text{ rad}$, b) $\vec{v}_2 = 1\vec{r} \text{ m/s}$, c) $\vec{a}_2 = (0,3\vec{r} + 1,67\vec{n}) \text{ m/s}^2$.

KP 2.2-7

1. $\varepsilon = \pi/4 \text{ s}^{-2}$;
2. $\omega = (\pi - \pi t/4) \text{ s}^{-1}$;
3. $\varphi = (\pi t - \pi t^2/8) \text{ rad}$;
4. $v = (0,5\pi - \pi t/8) \text{ m/s}$;
5. $\vec{a} = [\pi/8\vec{r} + 0,5(\pi - \pi t/4)^2\vec{n}] \text{ m/s}^2$;
6. $N = 1 \text{ otočka}$.

sl-pr1.2-44}

KP 2.2-8

\vec{a}_A svisle dolů, $a_A = g = 10 \text{ m/s}^2$; \vec{a}_B svisle vzhůru, $a_B = 20 \text{ m/s}^2$; $\vec{a}_C = \vec{a}_A$.

Pohybové zákony

sl-pr1.2-45}

KP 2.4-4

1. $\vec{a}_t = -a_t\vec{r}$, $a_t = 5 \text{ m/s}^2$;
2. $\vec{a}_n = a_n\vec{n}$, $a_n = (T - G \cos \alpha/m) = 3 \text{ m/s}^2$;
3. $a = 5,83 \text{ m/s}^2$, $\beta = 59^\circ$, $\beta \equiv \angle(\vec{a}, \vec{n})$;
4. $v = (la_n)^{1/2} = 1,55 \text{ m/s}$.

sl-pr1.2-46}

KP 2.4-5

V soustavě S:

1. \vec{G} , \vec{F}_1 - síla, která působí na vlákno;
2. $\vec{a}_S = \vec{a}$;
3. $\vec{G} = m\vec{g}$, $G = 0,2 \text{ N}$; $F_1 = [G^2 + (ma)^2]^{1/2} = 0,204 \text{ N}$, $\alpha = 11,3^\circ$.

V soustavě S':

1. \vec{G} , \vec{F}'_1 , \vec{F}^* $\uparrow \downarrow \vec{a}$;
2. $\vec{a}' = 0$;
3. \vec{G} , $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1$, $\vec{F}^* = -m\vec{a}$, $F^* = 0,04 \text{ N}$.

sl-pr1.2-47}

KP 2.4-6

- I. a) 1) \vec{F}_s - svisle dolů, $F_s = 400 \text{ N}$; 2) $F_1 = \eta F_s = 40 \text{ N}$;
- b) 1) \vec{F}_s - svisle dolů, $F_s = 400 \text{ N}$; 2) $F_1 = \eta F_s = 40 \text{ N}$;
- II. a) 1) \vec{F}_s - svisle dolů, $F_s = 400 \text{ N}$; 2) $F_1 = \eta F_s = 40 \text{ N}$;
- b) 1) \vec{F}_s - svisle dolů, $F_s = 400 \text{ N}$; 2) $F_1 = \eta F_s = 40 \text{ N}$;
- III. a) 1) $F'_s = 320 \text{ N}$, 2) $F'_1 = 32 \text{ N}$; 3. b) 1) $F''_s = 480 \text{ N}$, 2) $F''_1 = 48 \text{ N}$.

sl-pr1.2-48}

KP 2.4-7

Při urychlování láhve směrem doprava se míček pohybuje vzhledem k láhvi doprava, tj. směrem k zátce. Při zastavování láhve se vzhledem k ní pohybuje doleva.

sl-pr1.2-49}

KP 2.4-8

1. \vec{G} , \vec{F}_1 - síla od vlákna ve směru vlákna;
2. $F_{vt} = 0$;
3. Je, neboť $F_{vt} = 0$;
4. \vec{F}_V míří do C, $F_v = G \operatorname{tg} \alpha = 0,46 \text{ N}$;
5. $\vec{a} = \vec{F}_v/m$, $a = 5,8 \text{ m/s}^2$;
6. $v = 1,32 \text{ m/s}$.

sl-pr1.2-50}

Časový a dráhový účinek síly

KP 2.4-9

1. $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$, $\vec{p}_1 \uparrow \uparrow \vec{v}_1$, $p_1 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$;

2. $\vec{I} \uparrow \uparrow \vec{F}, I = 2 \cdot 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$;
3. $\vec{p}_2 \uparrow \uparrow \vec{p}_1, p_2 = 4,5 \cdot 10^4 \text{ kg m s}^{-1}$;
4. $\vec{v}_2 \uparrow \uparrow \vec{p}_2, v_2 = 90 \text{ m/s}$.

KP 2.4-10

1. $\vec{p}_1 \uparrow \uparrow \vec{v}_1, p_1 = v_1 \Delta t S \rho v_1 = 0,025 \text{ kg m s}^{-1}$;
2. $\vec{p}_2 \perp \vec{p}_1, p_2 = p_1$;
3. $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1, |\Delta \vec{p}| = 0,0354 \text{ kg m s}^{-1}, \alpha \angle(\Delta \vec{p}, \vec{p}_2) = 45^\circ$;
4. $\vec{I} = \Delta \vec{p}$;
5. $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{I}, F = I/\Delta t = 35,4 \text{ N}$.

KP 2.4-11

1. $\vec{I} \uparrow \uparrow \vec{F}, \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt, I = 6250 \text{ kg m s}^{-1}$
2. $\vec{p}_1 \uparrow \uparrow \vec{v}_1, p_1 = 5000 \text{ kg m s}^{-1}$;
3. $\vec{p}_2 \uparrow \uparrow \vec{p}_1, p_2 = p_1 + I = 11250 \text{ kg m s}^{-1}$;
4. $\vec{v}_2 \uparrow \uparrow \vec{p}_1, v_2 = 22,5 \text{ m/s}$.

KP 2.4-12

1. $W_{1 \rightarrow 2} = (P_1 + P_2 - P_3) = 10500 \text{ J}$, kde P_i jsou plošné obsahy pod úseky lomené křivky;
2. $E_{k,2} = E_{k,1} + W_{1 \rightarrow 2} = 265000 \text{ J}$;
3. $v_2 = 25,7 \text{ m/s}$.

KP 2.4-13

1. $\Delta E_k = 12,5 \text{ J}$;
2. a) $W_v = 12,5 \text{ J}$; b) $W_G = 30 \text{ J}$; c) $W_o = -17,5 \text{ J}$;
3. $v'_2 = 20 \text{ m/s}$.

KP 2.4-14

1. $\vec{F}_1 \rightarrow F_{1n} = 173 \text{ N}$; $\vec{F}_{1t} \uparrow \downarrow \vec{v}, F_{1t} = 17,3 \text{ N}$;
2. a) $E_G = 500 \text{ J}$; b) $E_{\text{tr}} = -86,5 \text{ J}$; c) $E_v = 413,5 \text{ J}$;
3. $E_{k,2} = 413,5 \text{ J}$.

KP 2.4-15

- a) $P_1 = 18 \text{ kW}$; b) $P_2 = 36 \text{ kW}$.

Gravitační pole

KP 2.6-4

KP 2.6-5

1. \vec{F}_g míří do středu Země, $F_g = 1,62 \cdot 10^4 \text{ N}$;
2. $\vec{a}_g \uparrow \uparrow \vec{F}_g, a_g = 4,1 \text{ m/s}^2$;
3. $\vec{F}'_g = -\vec{F}_g$;
4. $a'_g = 2,2 \cdot 10^{-19} \text{ m/s}^2$;
5. a) $W_g = E_{g,1} = -1,62 \cdot 10^{11} \text{ J}$; b) $W'_g = E_{g,1} - E_{g,2} = 9,23 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

KP 2.6-6

1. $F_g = 1,98 \cdot 10^{20} \text{ N}$;
2. $a_M = 0,0027 \text{ m/s}^2$;
3. $v = 1020 \text{ m/s}$;
4. $\vec{K}_g = \vec{a}_M$;
5. $K_{gA} = 0,0107 \text{ m/s}^2$;
6. $\varphi_g = -1,04 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$;
7. $\varphi_{gA} = -2,1 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$;
8. $E_g = -4,2 \cdot 10^8 \text{ J}$.

KP 2.6-7

1. $F_g = 132,8 \text{ N}$ ($a_g = 1,66 \text{ m/s}^2$);

sl-pr1.2-61} 2. $h = 12$ m.

KP 2.6-8

1. $F_g = 2,043 \cdot 10^{-8}$ N;
2. $a_r = 5,84 \cdot 10^{-10}$ m/s²;
3. $|\Delta r| > 0,5a_r t^2 = 2,18$ m.

sl-pr1.2-62}

KP 2.6-9

$$E_g = 5,36 \cdot 10^{10} \text{ J.}$$

sl-pr1.2-63}

Mechanická energie, pohyb v gravitačním poli

KP 2.6-10

1. $E_1 = -6,07 \cdot 10^7$ J;
2. $E_{\text{mot}} = E_2 - E_1 = 1,01 \cdot 10^{10}$ J;
3. $E_g = -7,66 \cdot 10^9$ J.

sl-pr1.2-64}

KP 2.6-11

1. $E_1 = -2,12 \cdot 10^{11}$ J;
2. ($E_{k,2} = 1,126 \cdot 10^{11}$ J \rightarrow) $v_2 = 5,3$ km/s.

sl-pr1.2-65}

KP 2.6-12

1. a) $E_m = -1,10 \cdot 10^9$ J; b) $E_{k,2} = 1,73 \cdot 10^8$ J; c) $v = 4,16$ km/s.
2. a) $E'_m = 0$ J; b) $E'_{k,2} = 1,27 \cdot 10^9$ J; c) $v = 11,2$ km/s.

sl-pr1.2-66}

KP 2.6-13

1. $v_2 = 2,59$ km/s;
2. $h_{\text{max}} = 915$ km.

sl-pr1.2-67}

KP 2.6-14

1. Rychlost v_1 družice, pohybující se po kruhové trajektorii o poloměru $r_1 = R_Z$, lze určit ze vztahu

$$\vec{F}_v = m\vec{a} \Rightarrow \kappa \frac{mM_Z}{R_Z^2} = m \frac{v_1^2}{R_Z} (= mg) \Rightarrow \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} = g.$$

Tedy $gR_Z^2 = \kappa M_Z$. Pro velikost rychlosti družice, pohybující se po kruhové dráze ve větších výškách nad povrchem Země (tj. pro $r > R_Z$) pak platí

$$m \frac{v^2}{r} = \kappa \frac{mM_Z}{r^2} = \frac{mgR_Z^2}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{gR_Z^2}{r}.$$

Tedy pro rychlost dostáváme po umocnění výraz

$$v = \frac{C_1}{\sqrt{r}},$$

kde $C_1 = R_Z \sqrt{g}$, což je hledaný vztah;

2. Oběžnou dobu T družice, pohybující se po kruhové dráze lze určit ze vztahu $a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dosazením do rovnice 1 obdržíme

$$m\omega^2 r = \kappa \frac{mM_Z}{r^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{M_Z}{r^3} = \frac{gR_Z^2}{r^3}.$$

Po úpravě dostáváme $T = C_2 \sqrt{r^3}$, kde $C_2 = 2\pi / (R_Z \sqrt{g})$, což je hledaný vztah.

sl-pr1.2-68}

KP 2.6-15

1. a) $v_1 = 7,98$ km/s; b) $T = 83,6$ min;

sl-pr1.2-69} 2. a) 42 400 km ($H = 36\,000$ km); b) $v = 3,06$ km/s.

KP 2.6-16

1. $h = 1\,740$ km;
2. $v = 7,07$ km/s;
3. $a_g = 6,06$ m/s²;
4. $E = -5,0 \cdot 10^9$ J.

sl-pr1.2-70}

KP 2.6-17

sl-pr1.2-71} $E < 0$, pohyb je finitní

KP 2.6-18

sl-pr1.2-72} a) $E_{\min} = 6,25 \cdot 10^9$ J; b) $E'_{\min} = 4,71 \cdot 10^8$ J.

KP 2.6-19

1. $v_1 = 1,68$ km/s;
2. $v_2 = \sqrt{2}v_1 = 2,38$ km/s.

sl-pr1.2-73}

KP 2.6-20

1. Elipsa, poloosy $a = 1,72 \cdot 10^8$ km, $b = 1,70 \cdot 10^8$ km;
2. $T = 448,5$ dní.

sl-pr1.2-74}

Energie hmotných soustav

KP 2.6-21

sl-pr1.2-75} a) C je na spojnici C_1C_2 , $x_C = \overline{C_1C_2}/3$; b) C je nad S , $x_C = r/6$; c) C je pod S , $x_C = r/6$;

d) C je na spojnici ZM ; $x_C = 4,67 \cdot 10^3$ km (tj. uvnitř Země)

KP 2.6-22

1. $x_1 = 5$ cm;
2. $v_1 = 0,707$ m/s;
3. $\Delta E = -0,125$ J.

sl-pr1.2-76}

KP 2.6-23

1. a) $E_t = 1,5$ J; b) $E_k = 2,4$ J; c) $E_{\text{elast}} = 0$ J; d) $E_c = 3,9$ J;
2. a) $E'_t = 1,26$ J; b) $E'_k = 1,04$ J; c) $E'_{\text{elast}} = 1,6$ J; d) $E'_c = 3,9$ J.

sl-pr1.2-77}

KP 2.6-24

1. $E_{\text{elast}} = 0,384$ J;
2. \vec{a} směr doprava, $a = 3,84$ m/s²;
3. \vec{F}_1 směr doleva, $F_1 = 3,84$ N;
4. $v = 0,554$ m/s;
5. $A = 0,062$ m.

sl-pr1.2-78}

KP 2.6-25

1. b) $I = 13 mr^2/24 = 0,0867$ kg m²; c) $I' = 0,028$ kg m²;
2. b) $E_k = 0,39$ J; c) $E'_k = 0,126$ J.

sl-pr1.2-79}

KP 2.6-26

1. $I_q = 1,44$ kg m²;
2. $E_{t1} - E_{t2} = -\Delta E_t = 24$ J;
3. a) $E_{k,2} = 24$ J; b) $\omega = 5,77$ s⁻¹.

sl-pr1.2-80}

KP 2.6-27

$$E_k = (0,25m_1 + 0,5m_2)v^2$$

sl-pr1.2-81}

1.2.8 Pohybové rovnice soustavy částic

KP 2.6-28

sl-pr1.2-82}

$$\vec{a}_C = \text{konst.}, a_C = 2 \text{ m/s}^2.$$

KP 2.6-29

- $\vec{p} = \text{konst.} = \vec{0}$, těžiště C je trvale v klidu;
1. $x_C = 1,6$ m od zádi;

2. Soustava je v klidu;
3. Posune se doleva o 1,6 m;
4. Výslednice vnějších sil (síla odporu vody) míří doprava, tedy soustava se bude pohybovat

s1-pr1.2-83} doprava.

KP 2.6-30

1. $\vec{p} \uparrow \vec{v}$, $p = 5 \text{ kg m s}^{-1}$, $\vec{p}' = \vec{p}$;
2. $E_k = 625 \text{ J}$; $E'_k = 3,11 \text{ J}$;
3. $h = 0,0774 \text{ m}$;

s1-pr1.2-84} 4. $\alpha = 16^\circ$.

KP 2.6-31

1. $I = 1,25 \text{ kg m}^2$;
2. $M = 10 \text{ Nm}$;
3. $\varepsilon = 8 \text{ s}^{-2}$;
4. $\omega_2 = 85 \text{ s}^{-1}$.

s1-pr1.2-85}

KP 2.6-32

1. $b_1 = 6,25 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$;
2. $\vec{L} = \vec{M}\tau$, $L = 100 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$;
3. $b_2 = 106 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$;
4. $\omega_2 = 85 \text{ s}^{-1}$.

s1-pr1.2-86}

KP 2.6-33

1. $M = 24 \text{ Nm}$;
2. $\varepsilon = 16,7 \text{ s}^{-2}$;
3. $b = 8,31 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.

s1-pr1.2-87}

KP 2.6-34

1. $\omega_2 = 6,56 \text{ s}^{-1}$;
2. $E_{k,1} = 5,9 \text{ J}$, $E_{k,2} = 1,76 \text{ J}$.

s1-pr1.2-88}

KP 2.6-35

1. $I_2 = 5 \text{ kg m}^2$;
2. a) $E_{k,1} = 197 \text{ J}$; b) $E_{k,2} = 394 \text{ J}$;
3. $W = 197 \text{ J}$.

s1-pr1.2-89}

KP 2.6-36

1. C je v tyči ve vzdálenosti $x_C = 30 \text{ cm}$ od K_2 ;
2. $I = 0,216 \text{ kg m}^2$;
3. $E_k = 17,1 \text{ J}$;
4. $\vec{p} = \vec{0}$;
5. $\vec{F} = \vec{0}$;
6. $\vec{F}' = \vec{0}$;
7. $\vec{b} \uparrow \omega$, $b = 2,71 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.

s1-pr1.2-90}

KP 2.6-37

1. $I = 0,125 \text{ kg m}^2$;
2. C je v tyči ve vzdálenosti $d = 10 \text{ cm}$ od o směrem k m_2 ;
3. a) $\varepsilon_1 = 4 \text{ s}^{-2}$, b) $\varepsilon_2 = 3,46 \text{ s}^{-2}$;
4. a) $E_k = 0,5 \text{ J}$, b) $\omega = 2,83 \text{ s}^{-1}$.

s1-pr1.2-91}

KP 2.6-38

- a) 1. $E_{kpost}/E_{krot} = 1$; 2. $W_t = 30 \text{ J}$; 3. $v = 3,16 \text{ m s}^{-1}$;
- b) ...

Speciální teorie relativity

ys1-pr2.1-1}

KP 3.1.4-2

1. $\tau = 11 \text{ h } 2,18 \text{ min}$;
 2. $\tau' = 1 \text{ h } 33,4 \text{ min}$.
 ysl-pr2.1-2} **KP 3.1.4-3**
- ysl-pr2.1-3} $v = 0,866c$.
KP 3.1.4-4
1. $m = 1,061m_e = 9,6616 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
 2. $p = 9,6616 \cdot 10^{-23} \text{ kg m s}^{-1}$;
 3. a) $E = 8,6954 \cdot 10^{-14} \text{ J}$, b) $E_0 = 8,1982 \cdot 10^{-14} \text{ J}$, c) $E_k = 4,972 \cdot 10^{-15} \text{ J}$;
 4. $U = 31 \text{ kV}$;
 5. $l = 28,29 \text{ cm}$.
 ysl-pr2.1-4} **KP 3.1.4-5**
1. $E_0 = 931 \text{ MeV}$;
 2. $E_{el} = 0,51 \text{ MeV}$.
 ysl-pr2.1-5} **KP 3.1.4-6**
1. $E = 8,4271 \cdot 10^{-14} \text{ J}$;
 2. $m = 9,3764 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
 3. $v = 0,2371c = 7,1072 \cdot 10^7 \text{ m/s}$;
 4. $v = 7,264 \cdot 10^7 \text{ m/s}$.
 ysl-pr2.1-6} **KP 3.1.4-7**
- ysl-pr2.1-7} $U = 2570 \text{ V}$.
KP 3.1.4-8
1. $E = E_0 + E_k = 9,4685 \cdot 10^{-14} \text{ J}$;
 2. $m = 1,0535 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$;
 3. $v = 0,5024c = 1,507 \cdot 10^8 \text{ m/s}$;
 4. $l/l_0 = 0,865$.
 ysl-pr2.1-8} **KP 3.1.4-9**
1. $P = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}$;
 2. $\Delta m/\Delta t = 4,28 \cdot 10^9 \text{ kg/s}$;
 3. $m = 3,697 \cdot 10^{14} \text{ kg}$, $V = 3,697 \cdot 10^5 \text{ km}^3$
 ysl-pr2.1-9} **KP 3.1.4-10**
1. a) $\Delta m_D = 3,085 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$, b) $W_{vazD} = 2,7726 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1,7305 \cdot 10^6 \text{ eV}$
 2. a) $\Delta m_\alpha = 4,8677 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$, b) $W_{vaz\alpha} = 27,3 \text{ MeV}$.
 sl-pr2.1-10} **KP 3.1.4-11**
- Užijte vztah $c^2 - v^2 = (c+v)(c-v)$.
 sl-pr2.1-11} **KP 3.1.4-12**
1. $\tau = 1,28 \text{ s}$;
 2. $\tau' = 181 \mu\text{s}$;
 3. $d' = 54,3 \text{ km}$.
 sl-pr2.1-12} **KP 3.1.4-13**
- ysl-pr2.1-13} $v_r = 0,846c$.
KP 3.1.4-14
- ysl-pr2.1-15} $v_r = 0,345c$.
KP 3.1.4-16
- ysl-pr2.1-16} $v'_1 = 0,4c$, $v'_2 = 0,909c$, $v'_3 = 0,588c$.
KP 3.1.4-17
- ysl-pr2.1-17} $U = 4,73 \text{ MV}$ (srovnejte příklad **KP 3.1.4-7**).
KP 3.1.4-18
1. $\tau_1 = 4,33 \cdot 10^{-8} \text{ s}$;
 2. $l_1 = 10,4 \text{ m}$;

3. $l'_1 = 6,24 \text{ m}$;
 4. $m = 455m_e$;
 5. $E_k = 155 \text{ MeV}$.

KP 3.1.4-19

$\tau = 8,1 \text{ hodin}$.

Molekulová fyzika a termodynamika

ysl-pr3.1-7} MOLEKULÁRNĚ KINETICKÁ TEORIE

KP 4.6-2

ysl-pr3.1-8} a) $h_m = 0,125 \text{ kmol}$, b) $n_0 = 7,528 \cdot 10^{25} \text{ molekul}$.

KP 4.6-3

ysl-pr3.1-10} a) $n_{O_2}/n_{H_2} = 1/8$, b) $m_{O_2}/m_{H_2} = 8/1$.

KP 4.6-5

ysl-pr3.1-11} $V = 22,7 \text{ m}^3$.

KP 4.6-6

ysl-pr3.1-12} b) $T_1 = 600 \text{ K}$, c) $p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$.

KP 4.6-7

ysl-pr3.1-13} a) $x = 3,5 \text{ cm}$, $l = h \geq L$, kde L je délka sloupce rtuti, který vyvine barometrický tlak b .

KP 4.6-8

ysl-pr3.1-14} a) $p_1 = 7,5 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2}$, b) $m_1 - m_2 = 0,641 \text{ g}$.

KP 4.6-9

ysl-pr3.1-15} a) $3,4 \cdot 10^{-9} \text{ m}$, $a/d = 11,2$, b) $a = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $a/d = 1,04$.

KP 4.6-10

ysl-pr3.1-16} $p = 2,35 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

KP 4.6-11

ysl-pr3.1-17} $\tau = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

KP 4.6-12

ysl-pr3.1-18} a) $\bar{v} = 3,18 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$, b) $\bar{v}_k = 3,37 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$, c) $v_p = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$.

KP 4.6-13

ysl-pr3.1-19} a) $\bar{v}_k = 427 \text{ m s}^{-1}$, b) $T' = 73,2 \text{ K}$, $T'' = 1172 \text{ K}$.

KP 4.6-14

ysl-pr3.1-20} $\bar{v}_{k,Ar} = 441 \text{ m s}^{-1}$, $\bar{v}_{k,He} = 1393 \text{ m s}^{-1}$.

KP 4.6-15

ysl-pr3.1-21} a) $U_{He} = 3,741 \cdot 10^6 \text{ J kmol}^{-1}$, b) $\Delta U_{He} = 1,247 \cdot 10^4 \text{ J kmol}^{-1}$, c) $Q/n_m = n_m c_v \Delta T$, $Q/n_m = c_v \Delta T = 3/2 R \Delta T$.

KP 4.6-16

ysl-pr3.1-22} $M_{Ar} = 39,6 \text{ kg kmol}^{-1}$, $m_{Ar} = 6,58 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.

KP 4.6-17

ysl-pr3.1-23} Argon: $\Delta W_K = 1,17 \cdot 10^{-22} \text{ J}$, Kyslík: $\Delta W_K = 0,56 \cdot 10^{-22} \text{ J}$.

KP 4.6-18

ysl-pr3.1-25} $\bar{v}_k = 493,1 \text{ m s}^{-1}$, $\bar{v} = 452,3 \text{ m s}^{-1}$, $v_p = 402,6 \text{ m s}^{-1}$.

KP 4.6-20

ysl-pr3.1-26} $h = 5,5 \cdot 10^3 \text{ m}$.

ysl-pr3.1-27} KP 4.6-21 $\Delta p = 0,360 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

KP 4.6-22

ysl-pr3.1-28} a) $n_o = 2,9 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$, b) $\bar{\lambda} = 3,85 \text{ m}$.

KP 4.6-23

ysl-pr3.1-29} a) $\bar{\lambda} = 4,95 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, b) $\bar{\lambda} = 7,9 \cdot 10^{-8} \text{ m}$.

KP 4.6-24

sl-pr3.1-30} a) $d = 2,56 \cdot 10^{-10}$ m, b) $\bar{\lambda} = 0,973$ m.

KP 4.6-25

sl-pr3.1-31} $T = 128$ K, $t = -91$ °C.

KP 4.6-26

sl-pr3.1-32} $T = nT_0$, $t = 273(n - 1)$ °C.

KP 4.6-27

sl-pr3.1-33} $p_2 = 1,88 \cdot 10^6$ N m⁻².

sl-pr3.1-34} KP 4.6-28 $\eta = 0,59$.

KP 4.6-29

a) $V = 8,48 \cdot 10^{-2}$ m³, b) $m_1 = 0,667$ kg.

Termodynamika

ysl-pr3.2-6}

KP 5.8-1

ysl-pr3.2-7} a) $Q_{142} = 60$ J, b) $Q_{21} = -70$ J, soustava teplo vydává, c) $Q_{14} = 50$ J, $Q_{42} = 10$ J.

KP 5.8-2

ysl-pr3.2-8} $W' = 2 \cdot 10^4$ J.

KP 5.8-3

ysl-pr3.2-9} $W' = Q - \Delta U = n_m c_p \Delta T - n_m c_V \Delta T = n_m R \Delta T$, pro $n_m = 1$ kmol, $\Delta T = 1$ K je číselná hodnota $\{W'\} = \{R\}$.

KP 5.8-4

sl-pr3.2-10} $Q = W' = -537$ J.

KP 5.8-5

sl-pr3.2-11} a) $W = -0,83 \cdot 10^3$ J, b) $\Delta U = 2,11 \cdot 10^3$ J, c) $Q = 2,953 \cdot 10^3$ J, d) $W = -0,83 \cdot 10^3$ J.

KP 5.8-6

sl-pr3.2-12} a) $P = 38,5$ kW, b) $m = 3,31 \cdot 10^3$ kg.

KP 5.8-7

sl-pr3.2-13} a) $p_1 = 4,54 \cdot 10^6$ N m⁻², $p_2 = 2,58 \cdot 10^6$ N m⁻², $p_3 = 1,72 \cdot 10^6$ N m⁻², $p_4 = 1,26 \cdot 10^6$ N m⁻²,
b) $p_1 = 6 \cdot 10^6$ N m⁻², $p_2 = 4 \cdot 10^6$ N m⁻², $p_3 = 3 \cdot 10^6$ N m⁻², $p_4 = 2,4 \cdot 10^6$ N m⁻².

KP 5.8-8

sl-pr3.2-14} $p = 3,24 \cdot 10^6$ N m⁻², $T = 764$ K = 491 °C, $A = 4,25 \cdot 10^3$ J.

KP 5.8-9

sl-pr3.2-15} a) $W = 1,75 \cdot 10^5$ J, b) $W = 1,77 \cdot 10^5$ J.

KP 5.8-10

sl-pr3.2-16} $Q_a > Q_b$, $Q_a - Q_b = W'$, W' je práce vykonaná systémem při kruhovém ději 1 - a - 2 - b - 1.

KP 5.8-11

sl-pr3.2-17} $W'_{max} = 1,47 \cdot 10^3$ J.

KP 5.8-12

sl-pr3.2-18} $Q_{2max} = 12,6 \cdot 10^3$ J.

KP 5.8-13

sl-pr3.2-19} Poměry objemů - v_2/v_1 při izotermické expanzi jsou různé; platí $(v_2/v_1) = (v_2/v_1)_2^n$.

KP 5.8-14

sl-pr3.2-20} b) $\eta = (T_1 - T_3)/T_1$.

KP 5.8-15

sl-pr3.2-21} a) $\eta = 1$, b) $\varepsilon \rightarrow \infty$.

KP 5.8-16

sl-pr3.2-22} a) $\Delta S_1 = -0,205$ J K⁻¹, b) $\Delta S_2 = -0,287$ J K⁻¹.

KP 5.8-17

sl-pr3.2-23} a) $\Delta S = 1,22 \cdot 10^3$ J K⁻¹, b) $\Delta S = 1,31 \cdot 10^3$ J K⁻¹,

KP 5.8-18

sl-pr3.2-24} a) $\delta Q = TdS$, δQ je teplo přijaté při malé změně teploty, plocha celého obrazce $S_1-1-2-S_2$ je $\int_{S_1}^{S_2} TdS = \int_1^2 \delta Q = Q$, b) Znaménko se určí z definice entropie $dS = \delta Q/T$, $T > 0$, $\delta Q > 0$, $dS > 0$, děj probíhá od $1 \rightarrow 2$, $Q_{12} > 0$, $Q_{21} < 0$.

KP 5.8-19

sl-pr3.2-25} a) Carnotův kruhový děj, b) Plocha $S_1-1-2-S_2$ je uměrná teplu Q_1 přijatém při izotermické expanzi, plocha $S_1-4-3-S_2$ teplu Q'_2 vydaném při izotermické kompresi, c) $\eta = (Q_1 - Q'_2)/Q_1 = (T_1 - T_2)/T_1$.

KP 5.8-20

sl-pr3.2-26} a) $\eta_1 = (T_1 - T_2)/2T_1$; b) $\eta_2 = (T_1 - T_2)/(T_1 + T_2)$, $\eta_1 < \eta_2$.

KP 5.8-21

sl-pr3.2-27} $\Delta S = (p/T)\{V_1 \ln[(V_1 + V_2)/V_1] + V_2 \ln[(V_1 + V_2)/V_2]\}$

KP 5.8-22

sl-pr3.2-28} $\Delta S = 4,19 \text{ J K}^{-1}$.

KP 5.8-23

sl-pr3.2-30} $\Delta S = 2,22 \text{ J K}^{-1}$, $T = 286 \text{ K}$.

KP 5.8-25

sl-pr3.2-32} a) Je-li $p < p_{tr}$, b) Je-li $T > T_{kr}$.

KP 5.8-27

sl-pr3.2-33} b) $T_k = 114 \text{ K}$.

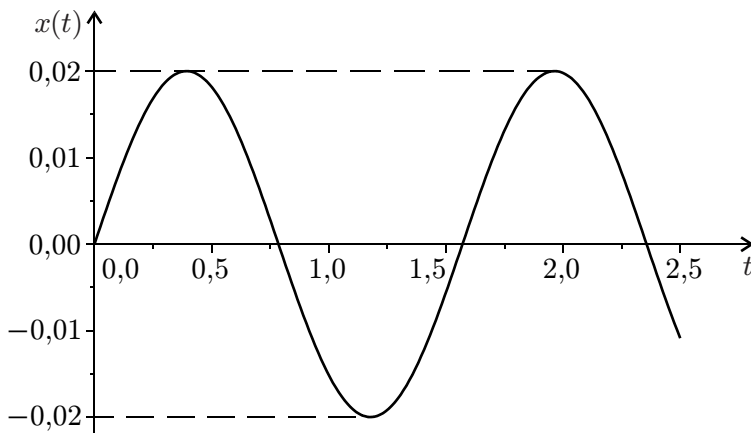
KP 5.8-28

$$T'/T = pv_k / [(p + a/v_k^2)(v_k - b)]$$

a) -40% , $(-14,5\%)$, b) -32% , (-8%) , c) 4% .

ysl-pr6.P-1} **Kmitání**

KP 6-9



Obr. 9.2: K výsledku KP 6-9.

{obr5.1-31V}

ysl-pr6.P-2}

KP 6-10

1. $\varphi = 32 \text{ rad}$;

2. a) $T = 0,419 \text{ s}$, b) $f = 2,39 \text{ Hz}$, c) $W = 0,003 \text{ m}$;

3. a) $\vec{r} = 0,027t \text{ m}$, b) $\vec{v} = -0,187t \text{ m s}^{-1}$, c) $\vec{a} = -6,14t \text{ m s}^{-2}$;

4. a) $F_v = 3,375t \sin(15t + 5,14) \text{ N}$, b) $\vec{F}_v(x=0) = \vec{0}$, c) $F_v(x = \pm A) = 3,375 \text{ N}$;

ysl-pr6.P-3} 5. a) $C_1 = 0,03 \text{ m}$, $C_2 = 15 \text{ rad s}^{-1}$, $C_3 = 0,429 \text{ rad}$, b) $C_4 = -0,125 \text{ m}$, $C_5 = 0,0327 \text{ m}$.

ysl-pr6.P-4}

KP 6-11

KP 6-12

1. $y(t) = 0,04 \sin(10,47t + 1,57) \text{ m}$;

2. a) $f = 1,67 \text{ Hz}$, b) $T = 0,6 \text{ s}$;
 3. a) $p = 0,0838 \text{ kg m s}^{-1}$, b) $E_k = 0,0175 \text{ J}$;
 4. $F_v = 0,877 \text{ N}$.

KP 6-13

1. $v = 3,77 \text{ m s}^{-1}$
 2. a) $E_k = 4,97 \text{ J}$, b) $p = 2,64 \text{ kg m s}^{-1}$;
 3. a) $a = 236,9 \text{ m s}^{-2}$ b) $F = 165,8 \text{ N}$ (\vec{a} , \vec{F} míří do rovnovážné polohy)

KP 6-14

1. $a = 78,96 \text{ m s}^{-2}$;
 2. $F = 236,9 \text{ N}$;
 3. Nahore: \vec{F}_1 dolů, $F_1 = 206,9 \text{ N}$; dole: \vec{F}_2 nahoru, $F_2 = 266,9 \text{ N}$;
 4. Odskakovalo by.

KP 6-15

1. $k = 667 \text{ jN m}^{-1}$;
 2. $f = 2,91 \text{ Hz}$;
 3. $N = 174$;
 4. $A = 0,02 \text{ m}$;
 5. $v = 0,365 \text{ m s}^{-1}$;
 6. a) $F_1 = 6,67 \text{ N}$; b) $F_2 = 3,35 \text{ N}$; (\vec{F}_1 , \vec{F}_2 nahoru).

KP 6-16

1. a) $f = 0,637 \text{ Hz}$, b) $T = 1,57 \text{ s}$;
 2. $k = 24 \text{ jN m}^{-1}$;
 3. a) $F_1 = 15 \text{ N}$; $F_2 = 14,18 \text{ N}$; $F_3 = 15,72 \text{ N}$.

KP 6-17

1. $F_1 = 0 \text{ N}$;
 2. $\vec{a} = \vec{g}$;
 3. $d = 0,2 \text{ m}$ od bodu uvolnění;
 4. a) $F_2 = 0 \text{ N}$; b) $F_4 = 5 \text{ N}$ (\vec{F}_3 , \vec{F}_4 nahoru);
 5. $\vec{a}' = -\vec{g}$;
 6. a) $f = 1,59 \text{ Hz}$; b) $A = 0,1 \text{ m}$.

KP 6-18 1. $k = 5,92 \text{ jN m}^{-1}$;

2. $k' = 4k/3$;
 3. $f' = 2f\sqrt{3}$.

KP 6-19

1. $E_p = 0,384 \text{ J}$
 2. $v = 0,554 \text{ m s}^{-1}$
 3. $f = 0,637 \text{ Hz}$,
 4. $A = 62 \text{ mm}$;
 5. $F = 3,84 \text{ N}$.

KP 6-20

1. $x_c = 0,6 \text{ m}$ od T_1 ;
 2. $I = 0,25 \text{ kg m}^2$;
 3. a) $\omega = 2 \text{ rad s}^{-1}$; b) $f = 0,318 \text{ Hz}$; c) $T = 3,14 \text{ s}$.

KP 6-21

1. $x_c = 0,5 \text{ m}$ od T_1 ;
 2. $I = 0,34 \text{ kg m}^2$;
 3. a) $\omega = 1,53 \text{ rad s}^{-1}$; b) $f = 0,244 \text{ Hz}$; c) $T = 4,10 \text{ s}$.

KP 6-22

1. $a = 0,144 \text{ m}$;

2. $I = 0,125 \text{ kg m}^2$;
s1-pr6.P-15} 3. a) $\omega = 3,72 \text{ rad s}^{-1}$; b) $f = 0,592 \text{ Hz}$; c) $T = 1,69 \text{ s}$.

KP 6-23

1. $a = 0,216 \text{ m}$;
2. $I = 0,200 \text{ kg m}^2$;

s1-pr6.P-16} 3. a) $\omega = 4,16 \text{ rad s}^{-1}$; b) $f = 0,662 \text{ Hz}$; c) $T = 1,51 \text{ s}$.

KP 6-24

1. $I = 2,03 \text{ kg m}^2$;
2. $I_c = 1,03 \text{ kg m}^2$.

s1-pr6.P-17}

KP 6-25 1. $I = 0,48 \text{ kg m}^2$;

s1-pr6.P-18} 2. $T = 1,54 \text{ s}$.

KP 6-26

1. $I = 1,76 \text{ kg m}^2$;

s1-pr6.P-19} 2. $T = 1,70 \text{ s}$.

KP 6-27 1. $I = 1,12 \text{ kg m}^2$;

s1-pr6.P-20} 2. $T = 1,572 \text{ s}$.

KP 6-28

1. $I = 0,39 \text{ kg m}^2$;

s1-pr6.P-21} 2. $T = 2,53 \text{ s}$.

s1-pr6.P-22} KP 6-29 $L = 0,6 \text{ m}$.

s1-pr6.P-23} KP 6-30 $T = 1,54 \text{ s}$.

KP 6-31

1. $I = 0,64 \text{ kg m}^2$;

2. $T = 1,78 \text{ s}$;

s1-pr6.P-24} 3. $L = 0,8 \text{ m}$.

KP 6-32

1. $T_1 = T_0$;

2. $T_2 = 2,236 \text{ s}$;

s1-pr6.P-25} 3. $T_3 = 1,826 \text{ s}$.

KP 6-33 1. $C = 1,7 \mu\text{F}$;

2. $Q = 1,27 \text{ mC}$;

s1-pr6.P-26} 3., 4., 5. $E_e = E = E_m 6,34 \cdot 10^{-2} \text{ J}$;

6. $I = 7,96 \text{ A}$.

KP 6-34

s1-pr6.P-27} a) $f_1 = 1,414 \cdot 10^3 \text{ Hz}$; b) $f_1 = 7,07 \cdot 10^2 \text{ Hz}$.

KP 6-35

1. $A_1 = 0,05 \text{ m}$;

2. $A_2 = 0,06 \text{ m}$;

3. $A_3 = 0,0739 \text{ m}$;

4. $A_4 = 0,0739 \text{ m}$;

s1-pr6.P-28} 5. $A_5 = 0,0872 \text{ m}$.

KP 6-36

s1-pr6.P-29} $A = 0,0834 \text{ m}$.

KP 6-37

s1-pr6.P-30} $x_2 = 0,0583 \sin(500t + 2,111) \text{ [SI]}$.

KP 6-38

1., 2., 3., $T_1 = T_2 = T_3 = 0,025 \text{ s}$.

Vlnění

{ysl-pr7.P-1}

KP 7-8

2. A, B, C, D právě v klidu; E, G nahoru, F dolů;
3. E ;

{ysl-pr7.P-2}

4. $v = 15 \text{ mm s}^{-1}$.

KP 7-9

1. a) ve směru $\vec{c} \dots x \in (x_D, x_G)$, b) proti směru $\vec{c} \dots x \in (x_G, x_C)$;
2. a) A právě v klidu, E, G ve směru \vec{c} , F proti směru \vec{c} ;
3. a) na tlak $x \in (x_A, x_B)$, b) na tah $x \in (x_D, x_A)$, $x \in (x_B, x_C)$,
4. Od $t_2 = 1,25 \text{ s}$.

{ysl-pr7.P-3}

KP 7-10

1. $u(x, t) = 0,02 \sin [50(t \mp x/8)]$ [SI];
2. $t_1 = 0,5 \text{ s}$,
3. a) $T = 0,126 \text{ s}$, b) $\varphi = \mp 25 \text{ rad}$, c) $u = 0,02 \text{ m}$, d) $v = 1,00 \text{ m s}^{-1}$, e) $a = 50 \text{ m s}^{-2}$;
4. $\lambda = 1 \text{ m}$.

{ysl-pr7.P-4}

KP 7-11

1. $f = 10 \text{ Hz}$;
2. $c = 6,28 \text{ m s}^{-1}$;
3. $\lambda = 0,628 \text{ m}$;
4. a) A dolů, $v_A = 0,628 \text{ m s}^{-1}$, b) B dolů, $v_B = 0,628 \text{ m s}^{-1}$;
5. \vec{a}_D nahoru, $a_D = 18 \text{ m s}^{-2}$, $a_{\max} = 39,5 \text{ m s}^{-2}$.

{ysl-pr7.P-5}

KP 7-12

1. A, C dolů, B nahoru;
2. $\lambda = 6 \text{ m}$;
3. $f = 10 \text{ Hz}$;
4. $U_0 = 2 \text{ mm}$;
5. $x = 7,5 \text{ m}$;
6. $x = 2,5 \text{ m}$.

{ysl-pr7.P-6}

KP 7-13

1. $f = f' = 2,5 \text{ Hz}$;
2. $\lambda = 20 \text{ m}$;
3. dolů.

{ysl-pr7.P-7}

KP 7-14

1. proti Oy ;
2. $U_0 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $f = 27,06 \text{ Hz}$;
3. $c = 340 \text{ m s}^{-1}$, $\lambda = 12,57 \text{ m}$;
4. $\varphi = 0$ pro Q_2 , 2π pro Q_3 , -2π pro Q_4 , π pro Q_5 rad;
5. $\Delta\varphi = 10\pi$ rad.

{ysl-pr7.P-8}

KP 7-15

1. $f_1 = 425 \text{ Hz}$;
2. $f_1 = f_2$;
3. $\lambda_2 = 3,41 \text{ m}$;
4. $K = 2,1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-2}$;
5. $\gamma = 4,76 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$.

{ysl-pr7.P-9}

KP 7-16

1. a) $t_1 = 0,613 \text{ s}$, b) $t_2 = 2,613 \text{ s}$;
2. $l = 880 \text{ m}$.

{ysl-pr7.P-10}

KP 7-17

1. $\lambda_1 = 0,553 \text{ m}$;

2. a) $dv = 0,607 \text{ m s}^{-1}$ b) $d\lambda = 0,001 \text{ m}$;
 3. $v_2 = 355,1 \text{ m s}^{-1}$.
- sl-pr7.P-11} **KP 7-18**
 a) 1. $U_m = 1,09 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, 2. $V_m = 6,84 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$, 3. $A_m = 43,0 \text{ m s}^{-2}$.
 sl-pr7.P-12} b) 1. $U_m = 1,87 \cdot 10^{-8} \text{ m}$, 2. $V_m = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$, 3. $A_m = 0,738 \text{ m s}^{-2}$.
- KP 7-19**
 1. $U_m \in (1,09 \cdot 10^{-11}; 1,09 \cdot 10^{-5}) \text{ m}$;
 sl-pr7.P-13} 2. $P_m \in (2,93 \cdot 10^{-5}; 2,93 \cdot 10^1) \text{ Pa}$.
- KP 7-20**
 a) 1. $c = 1261 \text{ m s}^{-1}$; 2. $\lambda = 2,87 \text{ m}$;
 sl-pr7.P-14} b) 1. $c = 315,2 \text{ m s}^{-1}$; 2. $\lambda = 0,846 \text{ m}$.
- KP 7-21**
 1. $c = 5,19 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$;
 sl-pr7.P-15} 2. a) $\lambda_k = 2,4/(2k - 1) \text{ m}$; b) $f = (2k - 1) \cdot 2,16 \cdot 10^3 \text{ Hz}$, $k = 1, 2, 3, \dots$
- KP 7-22**
 Mosaz:
 1. $c = 3,25 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$
 2. a) $\lambda_k = 2,4/(2k - 1) \text{ m}$; b) $f = (2k - 1) \cdot 1,36 \cdot 10^3 \text{ Hz}$, $k = 1, 2, 3, \dots$
 Hliník:
 1. $c = 5,33 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$
 sl-pr7.P-16} 2. a) $\lambda_k = 2,4/(2k - 1) \text{ m}$; b) $f = (2k - 1) \cdot 2,22 \cdot 10^3 \text{ Hz}$, $k = 1, 2, 3, \dots$
- KP 7-23**
 1. a) $\lambda_k = (1 \text{ m})/k$, b) $f_k = k \cdot 200 \text{ Hz}$, $k = 1, 2, \dots$;
 2. $c = 200 \text{ m s}^{-1}$;
 3. $F = 160 \text{ N}$;
 sl-pr7.P-17} 4. $dF/F = 1\%$.
- KP 7-24**
 1. a) $\lambda_k = (1,6 \text{ m})/k$, b) $f_k = k \cdot 60 \text{ Hz}$, $k = 1, 2, \dots$;
 2. $c = 96 \text{ m s}^{-1}$;
 3. $F = 69,1 \text{ N}$;
 sl-pr7.P-18} 4. $dF/F = 3,33\%$.
- KP 7-25**
 1. $c = 290,4 \text{ m s}^{-1}$;
 2. $F = 255 \text{ N}$;
 sl-pr7.P-19} 3. $l' = 0,242 \text{ m}$.
- KP 7-26**
 1. $\Delta\varphi = \pm 14,8 \text{ rad}$;
 2. $\alpha = 0^\circ, \pm 25,15^\circ, \pm 58,21^\circ$;
 sl-pr7.P-20} 3. $\beta = 12,27^\circ, \pm 39,61^\circ$.
- KP 7-27**
 1. $\pm\Delta\varphi = 12,58 \text{ rad} - 6,283 \text{ rad}$;
 2. $\alpha = \pm 19,47^\circ, \pm 90^\circ$;
 sl-pr7.P-21} 3. $\beta = 0^\circ, \pm 41,81^\circ$.
- KP 7-28**
 1. sem namalovat obrázek??
 2. sem namalovat obrázek??
 3. Maximum: $h = 18,75 \text{ m}$, $56,25 \text{ m}$, atd.; minimum: $h' = 0 \text{ m}$, $37,5 \text{ m}$ atd.;
 sl-pr7.P-22} 4. ve výšce h' .
- KP 7-29**

- ysl-pr7.P-23} 1. $T' = 4,16$ m;
2. $T'' = 6,25$ m.

KP 7-30

$v = 6000 \text{ m s}^{-1}$.

ysl-pr8.P-1} **Optika**

KP 8-1

1. $\lambda_2 = 434,8$ nm;
2. $\lambda_3 = 375$ nm;
3. $t = 3,27 \cdot 10^{-11}$ s;
ysl-pr8.P-2} 4. a) $\lambda_k = 1656 \text{ nm}/(2k - 1)$, b) $\lambda'_k = 1289,3 \text{ nm}/(2k - 1)$.

KP 8-2

ysl-pr8.P-3} $d_k = (2k - 1) \cdot 100,5$ nm.

KP 8-3

1. $\lambda_k = 851,2$ nm/ k ;
2. $\lambda'_k = 1702,4$ nm/ $(2k - 1)$;
3. $\lambda_2 = 425,6$ nm, $\lambda'_2 = 567,5$ nm.;
4. Žlutozelená;
ysl-pr8.P-4} 5. $\Delta\varphi = 4,18$ rad.

KP 8-4

1. $\lambda_k = 788,8$ nm/ k ;
2. $\lambda'_k = 1577,6$ nm/ $(2k - 1)$;
ysl-pr8.P-5} 3. $\lambda_2 = 394,4$ nm, $\lambda'_k = 525,9$ nm.

KP 8-5

2. $\alpha = 0,006043^\circ$
3. $h = 6,328 \cdot 10^{-6}$ m;
ysl-pr8.P-6} 4. $N' = 26,6$.

KP 8-6

1. $\gamma = 2\alpha_1$, kde $\alpha_1 = 0,07950^\circ$;
ysl-pr8.P-7} 2. $\alpha_5 = 0,3975^\circ$.

KP 8-7

ysl-pr8.P-8} $\alpha_1 = 19,47^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$.

KP 8-8

ysl-pr8.P-9} Za podmínky $a < \lambda$.

KP 8-9

1. $\gamma = 2\alpha_1$, kde $\alpha_1 = 1,525 \cdot 10^{-5}$ rad;
ysl-pr8.P-10} 2. $d = 0,1144$ mm.

KP 8-10

1. $\gamma = 2\alpha_1$, kde $\alpha_1 = 9,65 \cdot 10^{-5}$ rad;
ysl-pr8.P-11} 2. a) $d_1 = 1,93$ m, b) $d_2 = 7,41 \cdot 10^4$ m.

KP 8-11

ysl-pr8.P-12} 1. Pro $\lambda = 555$ nm je $s_1 = 43,3$ m, $s_2 = 260,0$ m.

KP 8-12

1. $d = 3,11 \cdot 10^{-6}$ m.
2. $\alpha_1 = 10,21^\circ$;
ysl-pr8.P-13} 3. $\alpha'_1 = 10,92^\circ$;

KP 8-13

1. $\alpha \in (4,589^\circ; 8,743^\circ)$;

s1-pr8.P-14} 2. a) nepřekrývají se, b) překrývají se.
KP 8-14
 $1,110 \mu\text{m} < d > 1\,665 \mu\text{m}$.

10. Fyzikální a astronomické konstanty

{tabulky}

rychlost světla ve vakuu	c	$= 2,997\,925 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
klidová hmotnost elektronu	m_e	$= 9,109\,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
elementární náboj	e	$= 1,602\,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
elektronvolt	eV	$= 1,662\,25 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
atomová hmotnostní jednotka	$u(= m_u)$	$= 1,660\,44 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
klidová hmotnost protonu	m_p	$= 1,672\,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
klidová hmotnost neutronu	m_n	$= 1,674\,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
hmotnost částice alfa	m_α	$= 4,002\,76 \text{ u}$
hmotnost deuteronu	m_D	$= 2,014\,18 \text{ u}$
Avogadrova konstanta	N_A	$= 6,022\,52 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Planckova konstanta	h	$= 6,625\,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
konstanta Stefanova-Boltzmannova zákona	σ	$= 5,669\,7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
konstanta Wienova zákona	b	$= 2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
permitivita vakua	ϵ_0	$= 10^7 / (4\pi c^2) = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
permeabilita vakua	μ_0	$= 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
konstanta Wienova zákona	b	$= 2,897\,8 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$
molární plynová konstanta	R	$= 8,314\,3 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmanova konstanta	k	$= 1,380\,54 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Rydbergova konstanta	R_H	$= 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
Bohrův poloměr	a_0	$= 5,291\,7 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0,529\,17 \text{ \AA}$
Bohrův magneton	μ_B	$= 9,273\,2 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$
normální tlak	b_n	$= 1,013\,25 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$
teplota trojného bodu vody	T_{tr}	$= 273,16 \text{ K}$
rychlost zvuku ve vzduchu, 0° C	c	$= 331,6 \text{ m s}^{-1}$
rychlost zvuku ve vodě, 0° C	c	$= 1\,450 \text{ m s}^{-1}$
hustota vzduchu ($0^\circ \text{ C}, p_n$)	ρ	$= 1,293\,0 \text{ kg m}^{-3}$
oceli	ρ	$= 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
mosazi	ρ	$= 8,5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
hliníku	ρ	$= 2,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
modul pružnosti oceli	E	$= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$
mosazi	E	$= 9,0 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$
hliníku	E	$= 7,4 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$
teplota trojného bodu vody	T_{tr}	$= 273,16 \text{ K}$

{TabKonst}

gravitační konstanta	$\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
normální tíhové zrychlení	$g = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$ ($g = 10 \text{ m s}^{-2}$ v příkladech)
hmotnost Země	$M_Z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
střední poloměr Země	$R_Z = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
střední rychlost oběhu Země	$v_Z = 2,98 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$
perioda oběhu Země	$T_Z = 365,26 \text{ dní}$
hmotnost Slunce	$M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
střední poloměr Slunce	$R_S = 6,960 \cdot 10^8 \text{ m}$
střední vzdálenost středů Země a Slunce	$R_{ZS} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$
hmotnost Měsíce	$M_M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
poloměr Měsíce	$R_M = 1,73 \cdot 10^6 \text{ m}$
perioda oběhu Měsíce	$T_M = 27,32 \text{ dní}$
střední vzdálenost středů Země a Měsíce	$R_{ZM} = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$
střední vzdálenost středů Pluta a Slunce	$R_{PS} = 5,9 \cdot 10^{12} \text{ m}$

Literatura

- [1] Halliday, D., Resnik, R., Walker, J.: Fyzika, VUTIUM a PROMETHEUS, 2000.
- [2] Šindelář, V. a kol.: Metrologie a zavedení soustavy jednotek SI, sv. 1, SNTL, Praha 1975
- [3] Norma: ČSN 01 1300
- [4] Škrášek, J.-Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I, SNTL, Praha 1983
- [5] Suchomel, J.-Plačková, J.-Kříž, J.: Diferenciální počet, VUT, Brno 1978
- [6] Šantavý, I. a kol.: Vybrané kapitoly z fyziky, VUT, Brno 1984 (skriptum)
- [7] Urgošík, B.: Fyzika, SNTL, Praha 1981
- [8] Boček, L.: Tenzorový počet, SNTL, Praha 1976
- [9] Požadavky z matematiky pro přijímací řízení na VŠT, SPN, Praha 1983
- [10] Liška, M.-Šantavý, I.: Fyzika II, SNTL Praha 1981, VUT, Brno 1985 (skriptum)
- [11] Einstein, A.: Elektrodynamika pohybujících se těles (německy v Annalen der Physik 1905, sv. 17, str. 891)
- [12] Schwarz, J. a kol.: Fyzika I, SNTL, Praha 1981
- [13] Beiser, A.: Úvod do moderní fyziky, Academica, Praha 1978
- [14] Binko, J.: Fyzikální a technické veličiny, SNTL, Praha 1968
- [15] Hajko, V.: Fyzika v příkladech, SNTL, Bratislava 1970
- [16] Halliday, D.-Resnik, R.: Physics, New York 1967
- [17] Saveljev, I. V.: Kurs obščej fiziki I, Nauka, Moskva 1982
- [18] Veis, Š. a kol.: Všeobecná fyzika 1, SNTL/ALFA, Bratislava 1981
- [19] Putilkov, K. A.: Termodinamika, Nauka, Moskva 1971
- [20] Fermi, E.: Termodinamika, Izdat. Universit., Charkov 1973
- [21] Ja. de Bur: Vvedeije v molekuljarnuju fiziku i termodinamiku, Izdat. inostran. lit., Moskva 1962
- [22] Binko, J.-Kašpar, J.: Fyzika stavebního inženýra, SNTL/ALFA, Praha 1983
- [23] Ford, K.: Classical and modern physics I–III, XEROX, Lexington 1976

LITERATURA

- [24] Alonso, M.-Finn, E.: Fundamental university physics I–III, Addison - Wesley, Reading, Mass., 1976
- [25] Horák, Z.-Krupka, F.: Fyzika, SNTL/SVTL, Praha 1966
- [26] Marion, J. B.-Thorton, T. S.: Classical dynamics of particles and systems, Harcourt Brace and Company, Orlando 1995