Pohyb tělesa po nakloněné rovině

Uvažujme nejprve příklad bez tření. Máme nakloněnou rovinu s úhlem sklonu α a po ní klouže těleso. V případě bez tření na těleso působí dvě síly, a to tíhová síla $\vec{F}_g$ a normálová síla $\vec{F}_n$. Tíhová síla působí kolmo k zemskému povrchu a její působiště uvažujeme v těžišti tělesa. Normálovou silou působí povrch nakloněné roviny na těleso (je to reakční síla na sílu, kterou těleso působí na nakloněnou rovinu). Normálová síla je kolmá na povrch nakloněné roviny a působí směrem od roviny do tělesa.

Abychom mohli tento příklad řešit, je třeba si nejprve zvolit soustavu souřadnic. Nejvýhodnější pro popis je soustava, kdy je osa x orientována podél nakloněné roviny (a svírá tedy ze zemským povrchem úhel α) a osa y kolmo k nakloněné rovině. U obou os x a y je také třeba zvolit orientaci. Osu x např. zorientujeme podél nakloněné roviny směrem dolů a osu y souhlasně s orientací normálové síly $\vec{F}_n$.

Dalším krokem je zapsat si souřadnice sil v námi zvolené soustavě souřadnic. V naší soustavě budou mít síly $\vec{F}_n$ a $\vec{F}_g$ následující souřadnice

$$\vec{F}_n = (0, N), \tag{1}$$

$$\vec{F}_g = (m \cdot g \cdot \sin\alpha, -m \cdot g \cdot \cos\alpha). \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Pro řešení budeme dále potřebovat druhý Newtonův zákon

$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}. \tag{4}$$

Ten je zápisem pro tři skalární rovnice

$$\sum_i F_{xi} = m \cdot a_x,$$
$$\sum_i F_{iy} = m \cdot a_y,$$
$$\sum_i F_{iz} = m \cdot a_z,$$

kde $\vec{F}_i = (F_{xi}, F_{yi}, F_{zi})$ jsou jednotlivé síly působící na těleso a jejich souřadnice a $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ je zrychlení telěsa a jeho reprezentace v souřadnicích. Problém budeme řešit separátně v x-ové a y-ové souřadnici. Jako $\vec{F}_i$ budou nyní vystupovat obě síly, které na těleso působí, tedy $\vec{F}_n$ a $\vec{F}_g$. Dosadíme jejich složky do předešlé soustavy souřadnic (pohyb v ose z neuvažujeme). Dostaneme

$$
\begin{aligned}
0 + m \cdot g \cdot \sin\alpha &= m \cdot a_x, \\
N - m \cdot g \cdot \cos\alpha &= m \cdot a_y.
\end{aligned}
$$

V případě bez tření nám k popisu pohybu na nakloněné rovině stačí první z rovnic. Po úpravě dostaneme

$$a_x = g \cdot \sin\alpha. \tag{5}$$

g i $\sin\alpha$ jsou konstanty, tedy i zrychlení a_x je konstantní. Podél nakloněné roviny tedy těleso koná rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením $a_x = g \cdot \sin\alpha$. Pokud chceme spočítat jeho dráhu, rychlost na konci nakloněné roviny atd., použijeme kinematických rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

Nyní budeme uvažovat tření mezi tělesem a nakloněnou rovinou. Toto tření budeme charakterizovat silou $\vec{F}_t$, pro jejíž velikost platí

$$F_t = f \cdot N, \tag{6}$$

kde N je velikost normálové síly $\vec{F}_n$ a f je součinitel smykového tření. Třecí síla působí vždy proti směru pohybu. Pokud se tedy těleso pohybuje po nakloněné rovině dolů, třecí síla míří podél nakloněné roviny směrem nahoru.

Uvažujme nyní případ, kdy se těleso pohybuje po nakloněné rovině směrem dolů se třením. Soustavu souřadnic necháme orientovanou stejně jako v případě bez tření. Napíšeme v ní opět složky všech tří sil, které na těleso působí

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_n &= (0,\, N), \\
\vec{F}_g &= (m \cdot g \cdot \sin\alpha,\, -m \cdot g \cdot \cos\alpha), \\
\vec{F}_t &= (-F_t, 0).
\end{aligned}
$$

Opět si napíšeme 2. Newtonův zákon

$$
\begin{aligned}
0 + m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_t &= m \cdot a_x, \\
N - m \cdot g \cdot \cos\alpha + 0 &= m \cdot a_y.
\end{aligned}
$$

Kromě těchto rovnic ale navíc víme, že těleso se podél námi zvolené osy y nepohybuje (protože mu brání povrch nakloněné roviny). Jestliže se v ose y nepohybuje, musí být y-ová složka jeho zrychlení nulová, tedy $a_y = 0$. Toto dosadíme do druhé z výše uvedených rovnic a dostaneme po úpravě a dosazení $F_t = f \cdot N$

$$
\begin{aligned}
m \cdot g \cdot \sin\alpha - f \cdot N &= m \cdot a_x, \\
N - m \cdot g \cdot \cos\alpha &= 0.
\end{aligned}
$$

Dále z druhé z rovnic vyjádříme velikost normálové síly N a dosadíme do první rovnice

$$
m \cdot g \cdot \sin\alpha - f \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a_x, \tag{7}
$$

a po pokrácení hmotnosti dostaneme rovnici pro zrychlení, se kterým se těleso pohybuje po nakloněné rovině

$$
a_x = g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha. \tag{8}
$$

V této rovnici jsou opět všechny veličiny konstanty, a těleso se tedy pohybuje s konstantním zrychlením. Pro popis jeho pohybu pak použijeme kinematické rovnice pro rovnoměrně zrychlený pohyb s výše odvozenou hodnotou zrychlení.