1. Pomocí ekvivalentních a důsledkových úprav najděte řešení kvadratické rovnice $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Jak vypadá řešení pro $a = 0$? Návod: odečtěte od levé strany rovnice vhodnou konstantu tak, aby se dala vyjádřit jako druhá mocnina výrazu $(\alpha x + \beta)$.

   Řešení: Za podmínky $a \neq 0$ můžeme celou rovnici podělit a zavést označení $2B = b/a$, $C = c/a$. Máme

$$\begin{aligned} a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 / : a\ (a \neq 0),\ 2B = b/a, C = c/a \\ x^2 + 2B \cdot x + C = 0. \end{aligned}$$

   Teď se potřebujeme zbavit mocniny, tedy rovnici odmocnit. Přitom ale nechceme, aby neznámá x zůstala pod odmocninou, to by řešení neusnadnilo. Tomu se vyhneme jedině tak, že výrazy obsahující proměnnou x vyjádříme jako druhou mocninu vhodného výrazu. Zcela konkrétně: kdybychom na levé straně rovnice měli výraz $x^2 + 2Bx + B^2 = (x + B)^2$, mohli bychom jej snadno odmocnit. Nic nám ale nebrání jej získat, stačí k oběma stranám rovnice přičíst B^2 a odečíst C.

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot B \cdot x + C = 0 /{+B^2 - C} \\ x^2 + 2 \cdot B \cdot x + B^2 = B^2 - C \\ (x + B)^2 = B^2 - C /\sqrt{\ } \\ x + B = \pm\sqrt{B^2 - C}. \end{aligned}$$

   V posledním kroku přitom musíme uvážit, že odmocnina má dva možné výsledky. Dále už jenom odečteme B a řešení vyjádříme pomocí původních parametrů a, b, c:

$$\begin{aligned} x &= -B \pm \sqrt{B^2 - C} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4 \cdot a^2} - \frac{c}{a}} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4 \cdot a^2}} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

   Tím jsme získali výsledek známý ze středoškolských učebnic. ♣

2. Cyklista jede prvních 15 km trasy po rovině rychlostí $30\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, pak stoupá 20 minut do kopce rychlostí $15\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a 10 minut sjíždí rychlostí $60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Nakreslete graf cyklistovy rychlosti a dráhy cyklistou ujeté jako funkci času. Nakreslete graf jeho rychlosti jako funkci ujeté dráhy. Proč nemá smysl kreslit graf dráhy jako funkce rychlosti?

3. Nakreslete graf funkce $4 \sin(x - \frac{\pi}{4})$. V grafu nezapomeňte správně označit osy a zanést průsečíky funkce s osami. (Návod: Můžete zkusit vypočítat funkční hodnotu v závislosti na proměnné)

4. Dráha uražená částicí závisí na čase vztahem $s(t) = a_n \cdot t^n$. Určete její okamžitou rychlost a jednotku veličiny a_n pro libovolné celé kladné n (nebo alespoň $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$).

   Řešení: Řešení je založené na jednoduché úvaze. Umíme spočítat průměrnou rychlost během určitého časového intervalu. Čím je tento interval kratší, tím lépe průměrná rychlost odpovídá rychlosti okamžité (v nějakém časovém okamžiku ležícím uvnitř intervalu). Pro interval trvající nulový čas jsou rychlosti průměrná a okamžitá stejné.

Průměrnou rychlost v časovém intervalu počínajícím v čase t_1 a končícím v čase t_2 spočítáme jako dráhu uraženou za tento interval $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$ dělenou dobou trvání intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$v_p(t_1, t_2) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = a_n \frac{t_2^n - t_1^n}{t_2 - t_1}.$$

Dále si označíme $t_2 = t_1 + \Delta t$. Dráha v čase $t_1 + \Delta t$ je

$$s(t_1 + \Delta t) = a_n(t + \Delta t)^n.$$

Následující krok může být pro někoho matematicky poněkud obtížný - roznásobíme závorku a dostaneme

$$s(t_1 + \Delta t) = a_n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^{n-i} (\Delta t)^i = a_n[t^n + n(\Delta t)t^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t^2)].$$

Důležité je rozdělení členů podle exponentu u Δt. Máme člen konstantní vzhledem k Δt ($a_n t^n$), člen lineární ($a_n n(\Delta t)t^{n-1}$) a členy, v nichž Δt vystupuje ve vyšší mocnině, zde souhrnně označené jako $a_n \mathcal{O}(\Delta t^2)$. $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ nás podrobněji nezajímá, protože nakonec bude rovný nule.

Pro průměrnou rychlost teď máme

$$v_p(t_1, t_1 + \Delta t) = a_n \frac{t_1^n + n(\Delta t)t^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t^2) - t_1^n}{\Delta t} = a_n \frac{n(\Delta t)t^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t^2)}{\Delta t}$$

Nyní můžeme vydělit Δ, přitom podíl $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ a Δt bude obsahovat členy v Δt nejméně lineární, které si označíme $\mathcal{O}(\Delta t)$.

$$v_p(t_1, t_1 + \Delta t) = a_n(nt^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t)).$$

Chceme-li nyní znát okamžitou rychlost v čase t_1, položíme $\Delta t = 0$. Tento obrat můžeme provést až poté, co jsme vydělením dráhy a času odstranili Δt ze jmenovatele. Hodnota $\mathcal{O}(\Delta t)$ bude za podmínky $\Delta t = 0$ nulová.

$$v(t_1) = v_p(t_1, t_1 + 0) = a_n n t^{n-1}.$$

Jednotku a_n určíme následovně:

$$\begin{aligned} s &= a_n t^n \\ [s] &= [a_n][t]^n \\ \mathrm{m} &= [a_n]\mathrm{s}^n \\ [a_n] &= \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-n}. \end{aligned}$$

♣

5. Někdy se při televizním přenosu jízdy auta zdá, že se kola auta netočí. Jaká může být rychlost auta? Existuje více řešení. Potřebné údaje (rozměr kola, počet loukotí) odhadněte. Pokud se u jiného auta jedoucího stejně rychle točí kola dozadu, je průměr jeho kol větší nebo menší? Návod: v televizním vysílání se přenáší statické záběry s určitou frekvencí, které oko vnímá jako pohyb. Uvažujte například o situaci, kdy se mezi dvěma záběry kolo otočí tak, že polohy loukotí překrývají (tj. loukotě se posunou právě o jednu pozici).

Řešení: Televizní přenos se skládá z rychle po sobě následujících statických snímků. Frekvence snímků je $f = 25{,}\mathrm{s}^{-1}$ (televizory zobrazující s frekvencí $50{,}\mathrm{s}^{-1}$ nebo $100{,}\mathrm{s}^{-1}$ zobrazují jeden snímek vícekrát).

Kolo se zdánlivě netočí, pokud se na po sobě následujících snímcích nachází vždy ve stejné poloze. Tomu například odpovídá, když se kolo mezi dvěma snímky otočí právě jednou dokola. Existují ale i další možnosti. Kolo má N (zpravidla 5 -
,8) loukotí (paprsků) a při pootočení o úhel $\Phi_1 = 2\pi/N$ vypadá stejně jako před pootočením. Při pootočení kola o libovolný celočíselný násobek úhlu Φ_1 pak kolo opět vypadá nezměněně. Úhlová rychlost otáčení kola tedy musí být

$$\omega = \frac{M\Phi_1}{T} = M\Phi_1 f,$$

kde M je libovolné přirozené číslo a $T = 1/f$ je doba mezi dvěma po sobě následujícími snímky.

Při jedné otočce (o úhel 2π) se kolo odvalí o svůj obvod $2\pi r$, kde r je poloměr kola. Pokud kolo neprokluzuje, posune se o stejnou vzdálenost dopředu i automobil. Úhlové rychlosti ω tedy odpovídá posuvná rychlost $v = \omega r$.

Kola auta se zdánlivě netočí, je-li rychlost auta

$$v = 2\pi r \frac{M}{N} f$$

pro libovolné přirozené M. Pro $N = 5$ a $r = 28\,\mathrm{cm}$ je nejmenší rychlost, při níž jev pozorujeme (M=1) $v = 8{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 32\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Konečně zodpovíme otázku, jak se liší průměr kol auta, která se při stejné rychlosti pohybu točí zdánlivě dozadu. V této situaci kola nedokončí celou otočku o úhel Φ_1, ale pootočí se o úhel o něco menší. Úhlová rychlost otáčení kol je tedy menší. Protože posuvná rychlost je stejná, musí být průměr kol větší.

♣

6. Prezentace v rozsahu asi 10 minut na dané téma: Měření délky. Jednotky, měřidla. Jak velké jsou atom, molekula, světlo, živočišná buňka, vlas, planeta, sluneční soustava, galaxie. Eratosthenes a určení obvodu Země.

7. Prezentace v rozsahu asi 10 minut na dané téma: Aristotelovská představa o pohybu. Problém stálého pohybu planet. Kritika Aristotelovské představy a první Newtonův zákon.

8. Vyjádřete pomocí základních jednotek soustavy SI jednotku energie (joule, J) a jednotku elektrického odporu (ohm, Ω). Kontrolou jednotek zjistěte, který z následujících vztahů pro výkon (P) elektrického proudu (I) procházejícího spotřebičem s elektrickým odporem R by mohl být správně: (a) $P = I^2/R$, (b) $P = I^2 \cdot R$.

Řešení: Joule: Jeden joule je práce vykonaná silou jednoho newtonu posunující předmět po dráze jednoho metru: $\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$. Jinak také $W = F \cdot d$, $[W] = [F] \cdot [d]$, $\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.

Jeden newton je síla, která tělesu o hmotnosti jeden kilogram udělí zrychlení jeden metr za sekundu na druhou: $\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}{-2}$. Jinak také $F = ma$, $[F] = [m] \cdot [a]$, $\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}{-2}$.

Spojením obou vztahů máme $J = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}{-2}$

Ohm: Spotřebič má odpor jeden ohm, pokud jím při přiloženém napětí jeden volt prochází proud jeden ampér: $\Omega = \mathrm{V}/\mathrm{A}$. Jinak také $R = U/I$, $[R] = [U]/[I]$, $\Omega = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A}^{-1}$.

Mezi dvěma místy je potenciálový rozdíl (napětí) jeden volt, pokud je při přenesení náboje jeden coulomb vykonána práce jeden joule: $\mathrm{V} = \mathrm{J} \cdot \mathrm{C}$. Jinak také $U = W/q$, $[U] = [W]/[q]$, $\mathrm{V} = \mathrm{J} \cdot \mathrm{C}$.

Vodičem prochází proud jeden ampér, pokud jím za dobu jedné sekundy projde náboj jeden coulomb: $\mathrm{A} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Jinak také $I = Q/t$, $[I] = [Q]/[t]$, $\mathrm{A} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Spojením všech vztahů dostaneme $\Omega = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-2}$.

Ověření vztahů:
(a) $P = RI^2$
$[P] = \mathrm{W} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3}$, $[RI^2] = \Omega \cdot \mathrm{A}^2 = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3}$, tento vztah může platit (a také platí, což už ale jednotkovou analýzou zjistit nemůžeme).
(b) $P = R/I^2$ $[R/I^2] = \Omega \cdot \mathrm{A}^{-2} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-4}$. Kvůli odlišnému exponentu u ampéru jsou jednotky na levé a pravé straně rovnice odlišné, vztah tedy nemůže platit. ♣

9. Ze základních vlastností elektronu (hmotnost $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, náboj $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$) a základních fyzikálních konstant (Planckova konstanta $\hbar = 1{,}05\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$, permitivita vakua $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{N}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2}$) sestavte veličinu, jejíž jednotkou je délka, a spočítejte její hodnotu. Nápověda: $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$, $\mathrm{J} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$, $\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

Řešení: Hledanou veličinu zapíšeme ve tvaru

$$x = (m_e)^a e^b \hbar^c (\varepsilon_0)^d$$

Jednotka na pravé straně rovnice je

$$[(m_e)^a e^b \hbar^c (\varepsilon_0)^d] = (\mathrm{kg}^a) \cdot (\mathrm{A} \cdot \mathrm{s})^b \cdot (\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1})^c \cdot (\mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^4)^d.$$

Po přeskládání koeficientů

$$[(m_e)^a e^b \hbar^c (\varepsilon_0)^d] = \mathrm{kg}^{a+c-d} \cdot \mathrm{m}^{2c-3d} \cdot \mathrm{s}^{b-c+4d} \cdot \mathrm{A}^{b+2d}.$$

Z druhé strany ale jednotka celého výrazu musí být shodná s jednotkou x, tedy metrem. To vede na soustavu rovnic pro koeficienty a, b, c, d. Například koeficient u kilogramu musí být 0, protože x ve své jednotce kilogram neobsahuje. To vede k rovnici $a + c - d = 0$. Podobně $2c - 3d = 1$, $b - c + 4d = 0$, $b + 2d = 0$. Řešením soustavy je $a = -1$, $b = -2$, $c = 2$, $d = 1$. Hledaný výraz je

$$x = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 4.21 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}.$$

Tento výraz se od Bohrova poloměru atomu vodíku (a_B) liší pouze faktorem 4π: $a_B = 4\pi x$. ♣

10. Pod jakým elevačním úhlem α je třeba hodit předmětem, aby při dané počáteční rychlosti v_0 dopadl co nejdál? Návod: spočítejte vzdálenost dopadu jako funkci úhlu α, maximum funkce najde z podmínky nulové derivace: $\frac{dx_D(\alpha)}{d\alpha} = 0$.

Řešení: Pro souřadnice předmětu v obecném čase platí

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t$$
$$y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2.$$

V okamžiku dopadu t_D musí být y-ová souřadnice rovna 0

$$v_0 \sin \alpha t_D - \frac{1}{2} g t_D^2 = 0.$$

Odtud

$$t_D = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}.$$

x-ová souřadnice v čase t_D udává vzdálenost dopadu. Platí pro ni

$$x_D \equiv x(t_D) = v_0 \cos \alpha t_D = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha .$$

Maximum x_D jako funkce α najdeme z podmínky nulové derivace

$$\frac{dx_D(\alpha)}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}[(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2] = 0.$$

Tato podmínka je splněna pro $\sin \alpha = \pm \cos \alpha$, tedy $\tan \alpha = \pm 1$. Jediným řešením v rozsahu smysluplných úhlů ($0°$ - $90°$) je $\alpha = 45°$. ♣

11. Jak se zvýší dostřel děla d (při stejné počáteční rychlosti koule v_0 a stejném náměrném úhlu α), pokud jej umístíme na skalní útes ve výši h nad vodorovnou rovinou?

Řešení: Pro souřadnice dělové koule platí

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t$$
$$y(t) = h + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Nejprve určíme dobu dopadu t_D z podmínky $y(t_D) = 0$,

$$h + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.$$

Odtud

$$t_D = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh}}{g}.$$

Řešení s minusem vede na záporný čas a je nefyzikální (odpovídá okamžiku, kdy - při umělém rozšíření letu střely před okamžik výstřelu - střela protíná povrch země a míří vzhůru). Řešení s plusem dosadíme do vztahu pro x-ovou souřadnici. Dostáváme tak pro dostřel

$$x_D \equiv x(t_D) = \frac{v_0 \cos \alpha}{g}[v_0 \sin \alpha + \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh}]$$

Rozdíl dostřelů (pro dostřel z nulové výšky využijeme předchozí příklad) je

$$\Delta x_D = \frac{v_0 \cos \alpha}{g}[\sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 + 2gh} - v_0 \sin \alpha].$$

♣