

# Písemná zkouška ze Základů matematiky 22. 1. 2009

Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	Součet

Každý příklad je hodnocen 8 body. Pro odpovědi využijte volného prostoru mezi příklady, případně druhé strany papíru. Test trvá 90 minut.

1. Nechť  $X = \{0, 1, 2\}$  je množina a  $f : X \rightarrow X$  zobrazení. Pro každou z následujících formulí naleznete nějaké zobrazení, které formuli splňuje, a nějaké zobrazení (to označte jako  $g$ ), které ji nesplňuje. Pokud takové  $f$  nebo  $g$  neexistuje, dokažte to.

a)  $(\exists x \in X)(\forall y \in X)((f \circ f)(y) = x \wedge f(x) \neq x)$ .

b)  $f(x) = y \leftrightarrow x = f(y)$ .

c)  $(f(x) = y \wedge f(y) = z) \rightarrow f(z) = x$ .

d)  $(\forall x, y \in X)(\exists n \in \mathbb{N})(f^n(x) = y)$ .

2. Uvažujme množiny

$$X = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid 1 \in A\},$$

$$Y = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid 1 \notin A\},$$

Najděte nějakou bijekci  $f : X \rightarrow Y$ , její inverzi  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  a ověřte, že jsou vzájemně inverzní.

3. Nechť  $X, Y, Z, Y_i, i \in I$  jsou množiny. Dokažte, že platí:

a)  $(X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z),$

b)  $X \cap \bigcup_{i \in I} Y_i = \bigcup_{i \in I} (X \cap Y_i).$

4. Načrtněte hasseovské diagramy všech vzájemně neizomorfních uspořádání na pětiprvkové množině, která mají:

a) právě jednu dvojici nesrovnatelných prvků,

b) největší a nejmenší prvek.

5. Popište multiplikatívními tabulkami grupy  $(\mathbb{Z}_4, +)$  a  $(\mathbb{Z}_5^\times, \cdot)$  a dokažte, že jsou izomorfní.